MATEMATİK 8

İLKÖĞRETİMİN SEKİZİNCİ SINIFI İÇİN DERS KİTABI

Dr. Kostadin Trenčevski
Dr. Biljana Krsteska
Vesna Bojaxhieva

lamina

MATEMATİK 8 İlköğretimin sekizinci sınıfı için ders kitabı
Telif hakları © 2026, Ars Lamina – Yayınları

Yayımlayan
Ars Lamina – Yayınları, Üsküp 2026

Genel Yayın Yönetmeni
Branka Bugariska

Editör
Biljana Stoyoska Zlatkov

Yazarlar
Dr. Kostadin Trençevski
Dr. Biljana Krsteska
Vesna Boyaciyeva

Makedoncadan çeviri
M-r Selsebil Karaağaç
Orijinalin başlığı: „Математика 8 учебник за осмо одделение во основно образование“

Dil Redaksiyonu
Önder Özgürlü

Hakemler
Prof. Dr. Lyupço Nastovski
Prof. Dr. Krutan Rasimi
Yovanka Vangelova

Tasarım
Pointer Creative Agency

Grafik ve teknik düzenleme
Ars Lamina – Yayınları

Baskı
Branko Gapo – Grafik Üretimi, Üsküp 2026

Baskı adedi
900

Tüm hakları saklıdır. Bu kitabın hiçbir bölümü, yayıncının yazılı izni olmaksızın fotokopi, kayıt veya bilgi erişim sisteminde saklama dâhil olmak üzere elektronik ya da mekanik herhangi bir yöntemle, herhangi bir biçimde çoğaltılamaz veya aktarılamaz.

Bu ders kitabı, Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığının 5.6.2026 tarihli ve 26-708/1 sayılı, ilköğretimin VIII. sınıfı için Matematik ders kitabının onaylanması ve kullanılması hakkındaki Kararı ile dokuz yıllık ilköğretimde kullanılmak üzere onaylanmıştır.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=512.161

TRENÇEVSKI, Kostadin
Matematik 8 : İlköğretimin sekizinci sınıfı için ders kitabı / Kostadin Trençevski, Biljana Krsteska, Vesna Boyaciyeva ; [Makedoncadan çeviri Selsebil Karaağaç]. - Üsküp : Ars Lamina – Yayınları, 2026. - 410 стр. : илустр. ; 26 см

Превод на делото: Математика 8 : учебник за осмо одделение во основно образование

ISBN 978-608-280-322-7

1. Krsteska, Biljana [автор] 2. Boyaciyeva, Vesna [автор]

COBISS.MK-ID 69245445

BU DERS KİTABINI NASIL KULLANACAKSIN?

Ders kitabı **beş konuya** ayrılmıştır ve her konunun farklı bir rengi vardır:

KONU 1: Sayılar ve sayılarla işlemler

KONU 2: Geometri

KONU 3: Cebir

KONU 4: Ölçme

KONU 5: Verilerle çalışma

Her konudaki içerikler kolay ve sade bir biçimde ele alınmıştır ve bu amaçla farklı alanlar kullanılmaktadır.

Etkinlik

Her ders, önceki yıllarda öğrendiklerini hatırlayacağın sorular veya görevlerin bulunduğu bir giriş etkinliği ile başlar.

Örnek 1

Çözümlü örnekler, derste öğrenilen kuralları nasıl kullanacağını sana gösterecektir.

Alıştırma 1

Bu alıştırmalar, çözümlü örneklere benzerdir ve onları kendi başına çözmelisin.

Bu alanda, derste öğrenilen kavramlar tanımlanmıştır ve alıştırmalardaki istekleri anlayabilmen için bunları öğrenmen önemlidir.

Bu alanda, derste önemli olan ve alıştırmaları çözebilmen için öğrenmen gereken özellikler veya kurallar verilmiştir.

ALIŞTIRMA SORULARI

Her dersin sonunda, o derste öğrenilenleri tekrar edeceğin alıştırmalar vardır.

Araştırma

Bu alanda, bilgileri genişletme ve derinleştirme amacıyla alıştırmalar verilmiştir.

Her konunun sonunda, konudaki materyali tekrar etmek ve pekiştirmek için alıştırmalar vardır. Bu alıştırmalar, konunun her dersindeki bilgileri tekrar etmene ve derinleştirmene yardımcı olacaktır.

İçerik

KONU 1: SAYILAR VE SAYILARLA IŞLEMLER

1. BAĞINTI KAVRAMI 8
2. BAĞINTILARIN ÖZELLİKLERİ 13
3. DENKLİK BAĞINTISI VE SIRALAMA BAĞINTISI 18
4. PRATİKTE BAĞINTILAR 21
5. RASYONEL SAYILAR 25
6. SONSUZ DEVİRLİ ONDALIK SAYILAR 30
7. KESİRLERİN, ONDALIK SAYILARIN VE YÜZDELERİN EŞİTLİĞİ 33
8. KESİRLERİN VE YÜZDELERİN MİKTARLAR ÜZERİNDEN HESAPLANMASI .. 37
9. YÜZDELERİN UYGULANMASI 40
10. ORAN 42
11. ORANTILI BÜYÜKLÜKLER 47
12. RASYONEL SAYILARI TOPLAMA VE ÇIKARMA 54
13. RASYONEL SAYILARI ÇARPMA VE BÖLME 59
14. RASYONEL SAYILARLA YAPILAN İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ 64
15. RASYONEL SAYILARLA SAYISAL İFADELER 68
16. BİLEŞİK KESİRLER 70
17. TABANI TAM SAYI VE ÜSSÜ (KUVVETİ) DOĞAL SAYI OLAN ÜSLÜ İFADELER 74
18. KAREKÖK VE KÜPKÖK 78
19. SAYILARIN $a \cdot 10k$ BİÇİMİNDE YAZILMASI, $a, k \in \mathbb{N}$ 84
20. TABANLARI EŞİT OLAN KUVVETLERİ ÇARPMA VE BÖLME 90

KONU 2: GEOMETRI

1. KENARLARI PARALEL OLAN AÇILAR VE KENARLARI DİK OLAN AÇILAR . 100
2. ÇEMBER, DAİRE VE ELEMANLARI 105
3. ÇEVRE AÇI 111
4. BAZI ÖZEL ÜÇGEN ÇEŞİTLERİNİN ÇİZİMLERİ 117
5. EŞLİK KAVRAMI. EŞ ÜÇGENLER 122
6. ÜÇGENLERDE EŞLİK KOŞULLARI (KRİTERLERİ) 127
7. PİSAGOR TEOREMİ 138

8. PİSAGOR TEOREMİNİN ÜÇGENLERDE UYGULANMASI 145
9. DÖRTGEN. PARALELKENAR. DİKDÖRTGEN, EŞKENAR DÖRTGEN VE KARE 149
10. YAMUK VE DELTOİD 156
11. PİSAGOR TEOREMİNİN DÖRTGENLERDE UYGULANMASI 163
12. ÇİZİM PROBLEMLERİ 169
13. ÇOKYÜZLÜLER, KÜRE VE KÜRESEL YÜZEY 175
14. DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLER 180
15. ÇOKYÜZLÜLERDE KÖŞE, AYRIT VE YÜZ SAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİ 183
16. KARMAŞIK ÜÇ BOYUTLU (3B) GEOMETRİK CİSİMLERİN ÇİZİMİ 186
17. ÖTELEME, DÖNDÜRME VE EKSENEL SİMETRİ KOMBİNASYONLARI 189
18. EKSENEL SİMETRİ, DÖNDÜRME VE ÖTELEME KOMBİNASYONLARINI BELİRLEME 194

KONU 3: CEBİR

1. MONOM 202
2. MONOMLARDA (TEK TERİMLİLERDE) TOPLAMA VE ÇIKARMA 206
3. POLİNOMLAR (ÇOKTERİMLİLER). POLİNOMUN DERECESİ 210
4. POLİNOMLARDA (ÇOK TERİMLİLERDE) TOPLAMA VE ÇIKARMA 215
5. POLİNOMLARDA ÇARPMA 219
6. POLİNOMUN MONOMA BÖLÜNMESİ 222
7. TAM RASYONEL İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ 225
8. TAM RASYONEL İFADELERDE VE FORMÜLLERDE DEĞİŞKENLERİN YERİNE TAM SAYI DEĞERLERİNİN YAZILMASI 228
9. DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEMLER KURMA VE ÇÖZME 233
10. BİR BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI 237
11. SAYI VE ŞEKİL DİZİLERİ (ÖRÜNTÜLERİ) 242
12. BİR DİZİNİN GENEL TERİMİNİ BULMA (BELİRLEME) 245
13. FONKSİYON 251
14. DOĞRUSAL FONKSİYON. DOĞRUSAL FONKSİYONUN GRAFİĞİ 258
15. DOĞRUSAL FONKSİYONUN DEĞİŞİMİ 264
16. GRAFİĞİ VERİLEN DOĞRUSAL FONKSİYONUN KURALININ BULUNMASI 273

KONU 4: ÖLÇME

1. ZAMAN ÖLÇÜ BİRİMLERİ. 286
2. ZAMAN BAĞLAMINDA GRAFİKLER 289
3. ÇEMBERİN UZUNLUĞU. 297
4. ÇEMBER YAYININ UZUNLUĞU 301
5. BİLEŞİK 2B ŞEKİLLERİN ÇEVRESİ 306
6. PARALELKENARIN ALANI 311
7. ÜÇGENİN ALANI 315
8. YAMUĞUN ALANI 320
9. EŞKENAR DÖRTGENİN, DELTOİDİN VE KARENİN ALANI 324
10. DAİRENİN ALANI 328
11. DAİRE DİLİMİNİN, DAİRE PARÇASININ VE DAİRESEL HALKANIN ALANI 331
12. PRİZMANIN VE PİRAMİDİN ALANI 336
13. PRİZMANIN VE PİRAMİDİN HACMİ 342

KONU 5: VERILERLE ÇALIŞMA

1. HEDEF KİTLE (NÜFUS) VE ÖRNEKLEM 353
2. AYRIK VERİLER. SIKLIK TABLOSU (KESİKLİ VERİLER. FREKANS TABLOSU) 359
3. ARAŞTIRMANIN PLANLANMASI VE VERİ TOPLAMA 365
4. DİYAGRAMLAR 372
5. GÖVDE-YAPRAK DİYAGRAMI (DAL VE YAPRAK GRAFİĞİ) 378
6. GRUPLANDIRILMIŞ VERİLER İÇİN İSTATİSTİKSEL HESAPLAMALAR 383
7. TEMEL OLAY. KARŞIT OLAY. OLASILIK 388
8. AYRIK OLAYLAR. BAĞIMLI VE BAĞIMSIZ OLAYLAR 395

Konu 1:

SAYILAR VE SAYILARLA İŞLEMLER

Öğrenme sonuçları:

Bu konuyu öğrenirken şunları yapabileceksin:

- Kümeler arasındaki ilişkileri kullanarak günlük yaşam bağlamındaki problemleri çözmeyi.
- Kesirlerin, ondalık sayıların ve yüzdelerin eşitliğini, farklı nicelikleri karşılaştırırken uygulamayı.
- Oran ve orantılılık ile günlük yaşam bağlamındaki problemleri çözmeyi.
- Rasyonel sayılarla işlemleri günlük yaşam bağlamında kullanmayı.
- Tabanı tam sayı ve kuvvet göstergesi doğal sayı olan üslü ifadeleri, doğal sayıların karekökünü ve küpkökünü günlük yaşam bağlamında kullanmayı.

1. BAĞINTI KAVRAMI

Etkinlik

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$
kümeleri verilmiştir.

a) A ve B kümelerinin tüm sıralı ikililerinden oluşan $A \times B$ kümesini adlandır, ardından tablo ve açıklayıcı biçimde göster.

b) Kartezyen çarpım $A \times B$'nin M, N ve P olmak üzere üç isteğe bağlı alt kümesini yaz.

Matematikte çok önemli bir kavramla, bağıntı (ilişki) kavramıyla tanışacağız. Bu kelime günlük yaşamda geniş bir anlama sahiptir, ancak matematikte çok kesin bir anlam ve içeriğe sahiptir.

Örnek 1

Çizim 1'de, Venn diyagramı ile dört öğrenciden oluşan A kümesi ve beş şehirden oluşan B kümesi gösterilmiştir:

$A = \{$Vlatko, Maylinda, Bilyana, Borçe$\}$ ve

$B = \{$Bitola, Ştip, Üsküp, Debre, Ohri$\}$.

Oklarla, A kümesindeki her öğrencinin B kümesindeki hangi şehirlerde bulunduğu gösterilmiştir. Diyagramdan ne sonuç çıkarılabilir?

Vlatko'dan iki ok çıkmaktadır; biri Bitola'ya, diğeri ise Üsküp'e yöneliktir. Bunlar, Vlatko'nun Bitola ve Üsküp'te bulunduğunu gösterir. Vlatko'nun Bitola ile **bağıntılı** (ilişkili) olduğunu, aynı zamanda Vlatko'nun Üsküp ile de **bağıntılı** (ilişkili) olduğunu söyleriz.

Maylinda'dan hiçbir ok çıkmamaktadır. Bu, Maylinda'nın belirtilen şehirlerin hiçbirinde bulunmadığı anlamına gelir. Maylinda'nın belirtilen şehirlerin hiçbiriyle bağıntılı olmadığını söyleriz.

Debre şehrine hiçbir ok gelmemektedir. Bu, öğrencilerden hiçbirinin bu şehirde bulunmadığı anlamına gelir. Öğrencilerden hiçbirinin Debre şehriyle **bağıntılı** (ilişkili) **olmadığını** söyleriz.



çiz. 1

Bu durumda, A ve B kümelerinin elemanları arasında "... şehrini ziyaret etmiştir..." **ilişkilendirme** kuralına göre oklar yardımıyla bir bağıntı verildiğini söyleriz. Çizim 1'de, A ve B kümelerinin elemanları Venn diyagramlarıyla gösterilmiş, iki kümeden bağıntılı olan elemanlar ise oklarla birbirine bağlanmıştır. Böyle bir gösterim biçimine, verilen bağıntının **grafikle** gösterimi denir.

Çizim 1'deki grafikte bulunan her ok, nesnelerden oluşan bir sıralı ikilinin yerine geçer. Bu ikililerden birincisi A'nın elemanıdır ve okun başlangıcında bulunur; ikincisi ise B'nin elemanıdır ve okun sonunda bulunur. Ne kadar ok varsa, o kadar sıralı ikili vardır.

Buna göre, Örnek 1'de şu sıralı ikilileri elde ederiz:

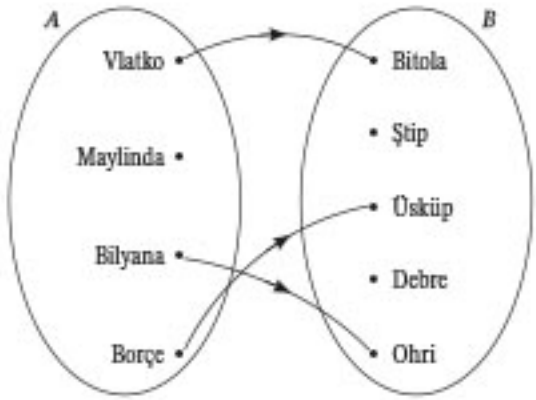
(Vlatko, Bitola), (Vlatko, Üsküp), (Bilyana, Bitola), (Bilyana, Štip), (Bilyana, Üsküp), (Bilyana, Ohri), (Borçe, Üsküp), (Borçe, Ohri).

A'dan B'ye bağıntı içinde bulunan tüm sıralı ikililer, kesin olarak belirlenmiş bir küme oluşturur. Bu küme, A ve B kümelerinin Kartezyen çarpımının bir alt kümesidir.

Alıştırma 1

Çizim 2'de, A ve B kümeleri arasında "... doğmuştur..." ilişkilendirme kuralına göre belirlenen bağıntının grafiği gösterilmiştir.

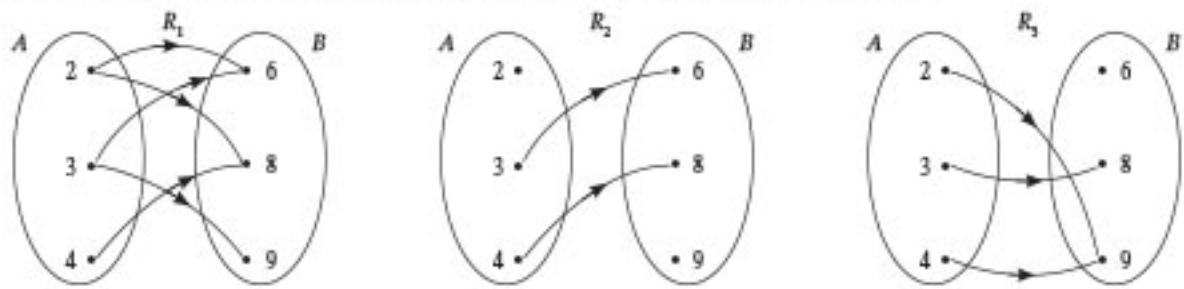
A kümesindeki bir öğrenci, B kümesindeki birden fazla şehirle bağıntılı olabilir mi? Cevabını açıkla.



çiz. 2

Alıştırma 2

Çizim 3'te, A ve B kümeleri arasında R_1, R_2 ve R_3 olmak üzere üç bağıntı grafik yardımıyla verilmiştir. R_1 bağıntısının ilişkilendirme kuralı "... içinde bulunur..." şeklinde belirlenmiştir. R_2 ve R_3 bağıntılarının her birinin ilişkilendirme kuralını keşfetmeye çalış.



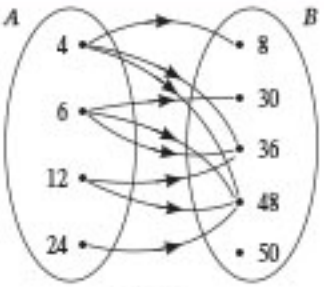
çiz. 3

A ve B iki boş olmayan küme olsun. Kartezyen çarpım $A \times B$'nin her R alt kümesine, A ve B kümeleri arasında bağıntı denir.

Eğer $(x, y) \in R$ ise x'in y ile **bağıntılı** olduğunu söyleriz ve $x\,R\,y$ şeklinde yazarız.

Örnek 2

$A = \{4, 6, 12, 24\}$ ve $B = \{8, 30, 36, 48, 50\}$ kümeleri verilmiştir.
Çizim 4'te, A ve B kümeleri arasında R: "... sayısının bölenidir..." bağıntısının grafiği gösterilmiştir.
R bağıntısını:
a) açıklamalı biçimde, b) tablo biçiminde göster.



çiz. 4

$A \times B$ Kartezyen çarpımının bir alt kümesi olarak düşünülen R bağıntısını şöyle gösterebiliriz:
a) **Açıklamalı biçimde**, bağıntılı olan elemanlar arasındaki ilişkiyi belirterek
$R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ ve } x \mid y\}$;
b) **Tablo biçiminde**, R'yi oluşturan tüm sıralı ikilileri yazarak
$R = \{(4, 8), (4, 36), (4, 48), (6, 30), (6, 36), (6, 48), (12, 36), (12, 48), (24, 48)\}$.

Alıştırma 3

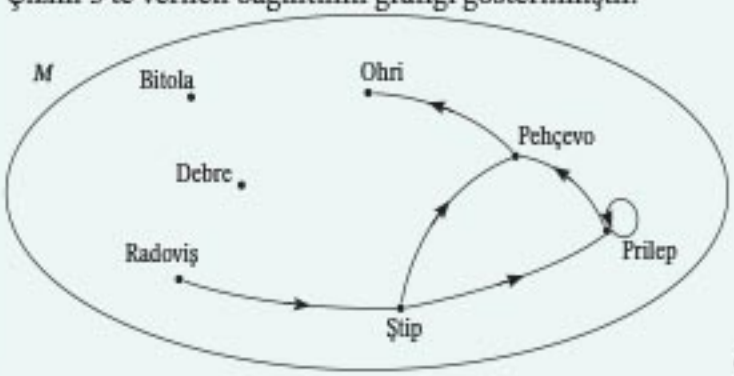
$A = \{4, 6, 17, 18\}$ ve $B = \{6, 19, 20, 24\}$ kümeleri verilmiştir. A kümesinden B kümesine R: "...den 2 küçüktür..." bağıntısını göster.
a) grafikle, b) açıklamalı biçimde, c) tablo biçiminde.

Bağıntılar, aynı kümenin elemanları arasında da verilebilir.

Örnek 3

M = {Bitola, Prilep, Štip, Ohri, Debre, Radoviş, Pehçevo} kümesi verilmiştir.
M kümesindeki "... şehrinin adının son harfi, ... şehrinin adının ilk harfidir." bağıntısının grafiğini çiz.

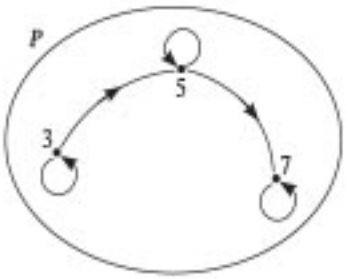
Çizim 5'te verilen bağıntının grafiği gösterilmiştir.



çiz. 5

Alıştırma 4

Çizim 6'daki grafikle gösterilen P = {3, 5, 7} kümesinin elemanları arasındaki *R* bağıntısını göster:
a) açıklamalı biçimde, b) tablo biçiminde.



çiz. 6

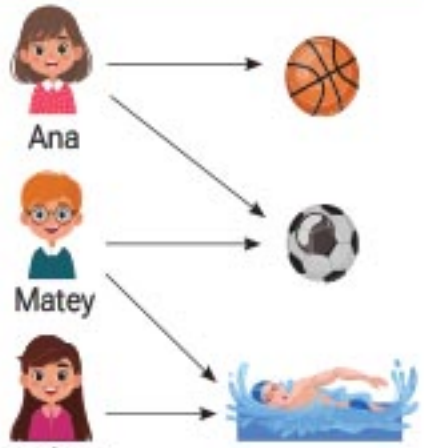
Alıştırma 5

$Q = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ kümesinde
$R = \{(x, y) \mid x, y \in Q \text{ ve } y = x + 2\}$ bağıntısı verilmiştir. *R* bağıntısını göster:
a) grafikle, b) tablo biçiminde.

Alıştırma 6

Resim 1'de Ana, Matey ve Liridona'nın en sevdiği sporlar gösterilmiştir.
Onlar futbol, basketbol ve yüzme sporları arasından seçim yapmaktadır.

a) *R*: "... için en sevilen spor ...dır." bağıntısını tablo biçiminde göster.
b) İki çocuğun aynı en sevdiği spor var mı?
c) Herhangi bir çocuğun birden fazla en sevdiği spor var mı?



Resim 1

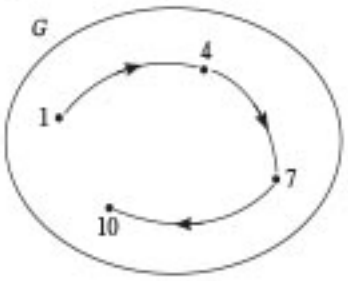
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Sunulan dondurma tatlarından vanilya, çikolata ve çilek arasından İva vanilya tadını, Boris ise çikolata tadını seçti.
   a) *R*: "... tadını seçti." bağıntısını grafikle göster.
   b) İki öğrenci aynı dondurma tadını seçti mi?
   c) Herhangi bir öğrenci birden fazla dondurma tadı seçti mi?
   d) Seçilmemiş bir dondurma tadı var mı?

2. Öğretmen, Petar, Emina ve Mariya adlı öğrencilere hangi sporları yaptıklarını sordu. Şu cevabı aldı:
   Petar futbol yapıyor, Emina jimnastik yapıyor,
   Mariya yüzme yapıyor ve Petar basketbol yapıyor.
   a) *R*: "... yapıyor." bağıntısını grafikle göster.
   b) Herhangi bir öğrenci birden fazla spor yapıyor mu?
   c) Hiçbir spor yapmayan bir öğrenci var mı?

3. C ve *D* kümelerinin elemanları arasındaki *R* bağıntısını grafikle göster, eğer:
a) $C = \{6, 9, 18, 29, 36\}$, $D = \{12, 15, 24, 27, 35, 42\}$ ve *R*: „...den 6 büyüktür...“,
b) $C = \{30, 24, 27, 18, 9, 12\}$, $D = \{8, 10, 3, 6, 9, 5\}$ ve *R*: „...den 3 kat küçüktür...“.

4. Çizim 7'deki grafikle gösterilen $G = \{1, 4, 7, 10\}$ kümesinin elemanları arasındaki *R* bağıntısını göster: a) açıklamalı biçimde, b) tablo biçiminde.



çiz. 7

5. $P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ kümesinde $R = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ ve } y = 2x\}$ bağıntısı verilmiştir. *R* bağıntısını göster: a) grafikle, b) tablo biçiminde.

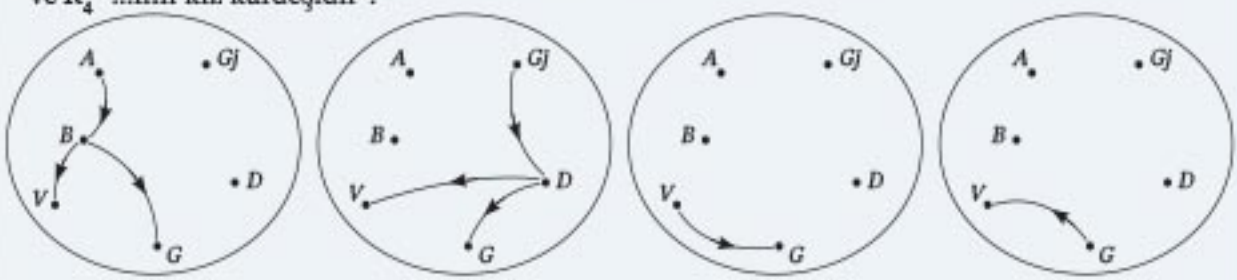
6. Ana, geçen haftanın her iş gününde bir spor yarışmasına hazırlanmak için egzersiz yaptı. Her gün kaç dakika egzersiz yaptığını ve kaç kalori harcadığını not etti.
Onun haftalık egzersizine ait veriler tabloda gösterilmiştir:

haftanın günleri	egzersiz süresi (dk)	kalori (kcal)
pazartesi	20	100
salı	30	150
çarşamba	25	125
perşembe	40	200
cuma	35	175

Egzersiz süresi ile harcanan kalori arasındaki bağıntıyı açıkla.
Belirlenen bağıntıyı göster: a) grafikle, b) tablo biçiminde.

Araştırma

Bir ailenin üyelerinden oluşan $C = \{A, B, V, G, D, Gj\}$ kümesinde şu bağıntılar verilmiştir:
R_1 "...nın babasıdır", R_2 "...nın annesidir", R_3 "...nın erkek kardeşidir"
ve R_4 "...nın kız kardeşidir".



Bağıntı R_1 Bağıntı R_2 Bağıntı R_3 Bağıntı R_4

çiz. 8

Çizim 8'de gösterilen grafiklerini kullanarak aile üyeleri arasındaki yapıyı ve akrabalık ilişkilerini keşfet.

2. BAĞINTILARIN ÖZELLİKLERİ

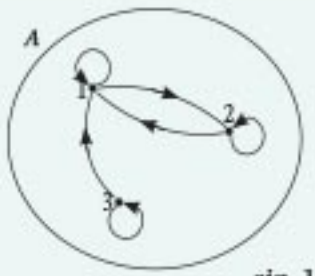
Matematikten, aynı zamanda günlük yaşamdan örnekler aracılığıyla, bağıntıların özelliklerinin neden önemli olduğunu ve bir kümedeki elemanlar arasındaki ilişkileri kesin ve mantıklı bir biçimde tanımlamana nasıl yardımcı olacağını keşfedeceksin.

A kümesinde tanımlı bir R bağıntısında, her $x \in A$ için $(x, x) \in R$ ise, yani
her $x \in A$ için $x\,R\,x$
oluyorsa R bağıntısına **yansımalı bağıntı** denir.

Örnek 1

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$ bağıntısı verilmiştir.
R bağıntısının yansımalı olup olmadığını kontrol et.

Bağıntı yansımalıdır, çünkü sıralı ikililer
(1, 1), (2, 2) ve (3, 3) R'ye aittir, yani
$1\,R\,1$, $2\,R\,2$ ve $3\,R\,3$'tür. Bu da her $x \in A$ için $x\,R\,x$ koşulunun sağlandığı anlamına gelir.
Aynı sonuca, Çizim 1'de gösterilen bağıntının grafiğini incelersek de ulaşabiliriz. Her x elemanından bir ok çıkar ve bu ok yine aynı elemanda sona erer. Buna **halka** denir.



çiz. 1

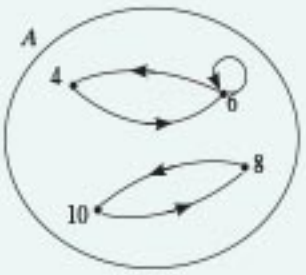
A kümesinde tanımlı bir R bağıntısınıda her $x, y \in A$ için $(x, y) \in R$ iken $(y, x) \in R$ her
$x, y \in A$ için $x\,R\,y$ ve, $y\,R\,x$
oluyorsa R bağıntısına **simetrik bağıntı** denir.

Örnek 2

$A = \{4, 6, 8, 10\}$ kümesinde
$R = \{(4, 6), (6, 6), (6, 4), (8, 10), (10, 8)\}$ bağıntısı verilmiştir.
R bağıntısının simetrik olup olmadığını kontrol et.

R'deki (6, 6) ikilisi için (6, 6) ikilisi de R'ye aittir,
R'deki (4, 6) ikilisi için (6, 4) ikilisi de R'ye aittir,
R'deki (6, 4) ikilisi için (4, 6) ikilisi de R'ye aittir,
R'deki (8, 10) ikilisi için (10, 8) ikilisi de R'ye aittir,
(10, 8) ikilisi için de (8, 10) ikilisi R'ye aittir.
Bu da her $x, y \in A$ için $x\,R\,y$ olmasının $y\,R\,x$ olmasını gerektirdiği koşulunun sağlandığı anlamına gelir.

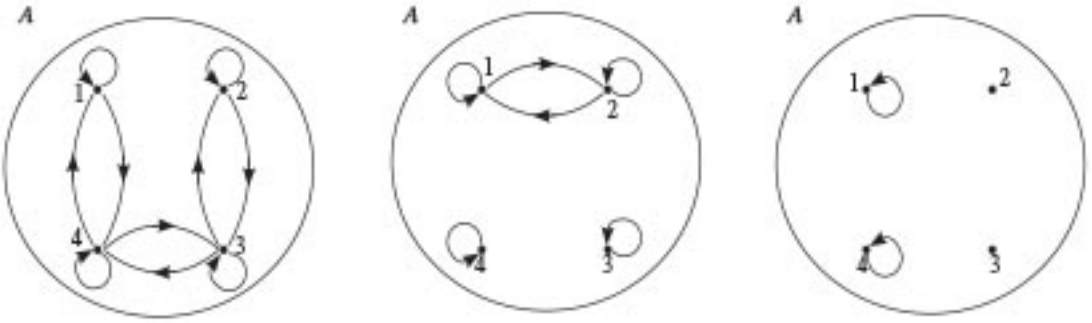
Buna göre R bağıntısı simetriktir.
Aynı sonuca, çizim 2'de gösterilen R bağıntısının grafini inceleyerek de ulaşabiliriz.
x elemanından y elemanına bir ok varsa, y elemanından da x elemanına bir ok olduğunu fark ederiz; yani R bağıntısının grafında yalnızca çift yönlü bağlantılar vardır. Bu durumda halkayı da **çift yönlü bağlantı** olarak kabul ederiz.



çiz. 2

Alıştırma 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesindeki R_1, R_2 ve R_3 bağıntıları, Çizim 3'te kendi grafikleriyle gösterilmiştir. Bunlardan hangileri yansımalı, hangileri simetriktir? Cevabını açıkla.



Bağıntı R_1 Bağıntı R_2 Bağıntı R_3
çiz. 3

Alıştırma 2

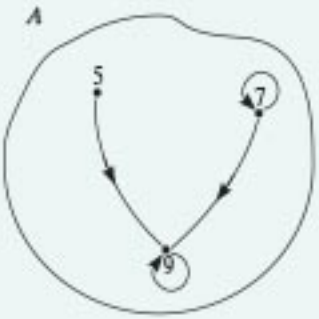
Marko, Sonya ve Erol aynı binada yaşamaktadır. Marko dördüncü katta, Sonya beşinci katta, Erol ise dördüncü katta yaşamaktadır. Öğrenciler arasında, yaşadıkları kata göre R: "... ile aynı katta yaşamaktadır..." bağıntısı belirlenmiştir.
a) Bağıntıyı tablo biçiminde ve grafikle göster.
b) R bağıntısı yansımalı ve simetrik midir? Cevabını açıkla.

A kümesindeki R bağıntısına, ancak ve ancak her $x, y \in A$ için $(x, y) \in R$ ve $(y, x) \in R$ olması $x = y$ sonucunu gerektiriyorsa **ters simetrik (antisimetrik)** denir; yani
$x R y$ ve $y R x$ olması her $x, y \in A$ için $x = y$ sonucunu gerektirir.

Örnek 3

$A = \{5, 7, 9\}$ kümesinde $R = \{(5, 9), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\}$ bağıntısı verilmiştir.
R bağıntısının ters simetri (antisimetri) olup olmadığını kontrol et.

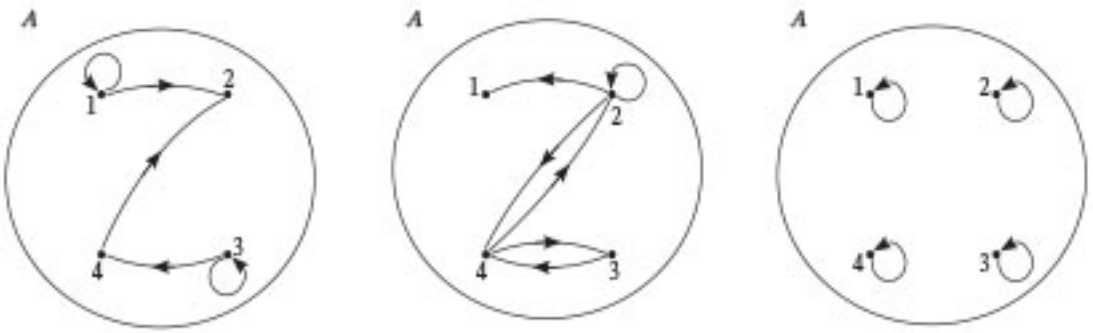
R'deki (5, 9) ikilisi için (9, 5) ikilisi R'ye ait değildir, ayrıca R'deki (7, 9) ikilisi için (9, 7) ikilisi R'ye ait değildir. Buna göre, her $x, y \in A$ için $x\,R\,y$ ve $y\,R\,x$ ise $x = y$ olur. Bu, bağıntının ters simetrik olduğu anlamına gelir. Aynı sonuca, Çizim 4'te gösterilen R bağıntısının grafiğini incelersek de ulaşabiliriz. Dikkat ederiz ki x elemanından y elemanına bir ok varsa ve $x \neq y$ ise, y elemanından x elemanına bir ok yoktur. Yani R bağıntısının grafiğinde, halkalar dışında hiçbir çift yönlü bağlantı yoktur.



çiz. 4

Alıştırma 3

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesindeki R_1, R_2 ve R_3 bağıntıları, Çizim 5'te kendi grafikleriyle gösterilmiştir. Bağıntılardan hangileri yansımalı, hangileri anti simetriktir? Cevabını açıkla.



Bağıntı R_1 Bağıntı R_2 Bağıntı R_3

çiz. 5

Alıştırma 4

Filip, İvan ve Lidiya aynı okula gitmektedir. Filip'in 14 yaşında, İvan'ın 12 yaşında, Lidiya'nın ise 7 yaşında olduğu bilinmektedir. Öğrenciler arasında, yaşlarına göre R: "...den daha büyüktür..." bağıntısı belirlenmiştir.

a) Bağıntıyı tablo biçiminde ve grafikle göster.

b) R bağıntısı antisimetrik midir? Cevabını açıkla.

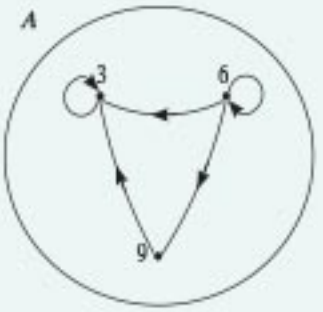
A kümesindeki R bağıntısına, ancak ve ancak her $x, y, z \in A$ için $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in R$ olması $(x, z) \in R$ sonucunu gerektiriyorsa **geçişlidir** denir; yani

$x\,R\,y$ ve $y\,R\,z$ olması her $x, y, z \in A$ için $x\,R\,z$ sonucunu gerektirir.

Örnek 4

$A = \{3, 6, 9\}$ kümesinde $R = \{(3, 3), (6, 6), (6, 3), (6, 9), (9, 3)\}$ bağıntısı verilmiştir. Bağıntının geçişli olup olmadığını kontrol et.

Tüm olası durumları kontrol edelim:
A R'deki (3, 3) ve (3, 3) ikilileri için (3, 3) ikilisi R'ye aittir;
R'deki (6, 6) ve (6, 6) ikilileri için (6, 6) ikilisi R'ye aittir;
R'deki (6, 6) ve (6, 3) ikilileri için (6, 3) ikilisi R'ye aittir;
R'deki (6, 6) ve (6, 9) ikilileri için (6, 9) ikilisi R'ye aittir;
R'deki (6, 3) ve (3, 3) ikilileri için (6, 3) ikilisi R'ye aittir;
R'deki (6, 9) ve (9, 3) ikilileri için (6, 3) ikilisi R'ye aittir.
R'deki (9, 3) ve (3, 3) ikilileri için (9, 3) ikilisi R'ye aittir;
Her $x, y, z \in A$ için $x\,R\,y$ ve $y\,R\,z$ ise $x\,R\,z$ koşulunun sağlandığını görüyoruz.



çiz. 6

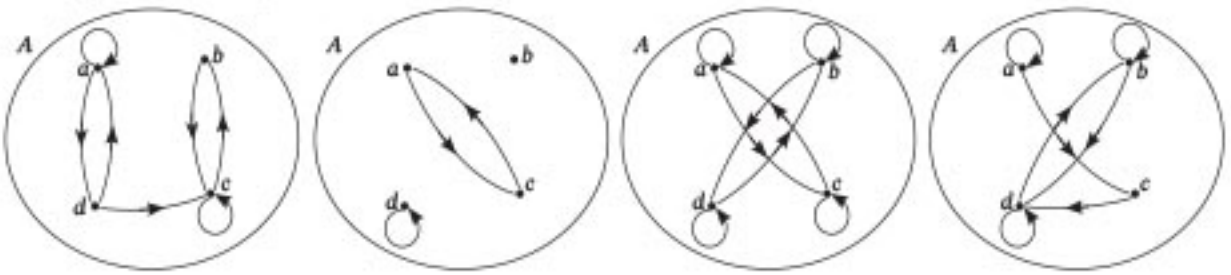
Aynı sonuca, Çizim 6'da gösterilen R bağıntısının grafiğini incelersek de ulaşabiliriz. Dikkat ederiz ki x elemanından y elemanına bir ok varsa ve y elemanından z elemanına bir ok varsa, x elemanından z elemanına da bir ok vardır. Kontrole halkaları da dâhil ederiz.

Alıştırma 5

Okul bahçesinde Ana, Besid, Vera ve Goran adlı öğrenciler spor egzersizi için sıraya dizilmektedir. Öğretmen, öğrencileri boylarına göre dizmek istemektedir. Ana 150 cm boyundadır, Besid 155 cm boyundadır, Vera 150 cm boyundadır ve Goran 160 cm boyundadır. Öğretmen R: "...den daha uzundur veya onunla aynı boydadır..." bağıntısını kullanmaktadır.
a) Bağıntıyı tablo biçiminde ve grafikle göster.
b) Bağıntının yansımalı, simetrik, ters simetrik ve geçişli olup olmadığını belirle.

ALIŞTIRMA SORULARI

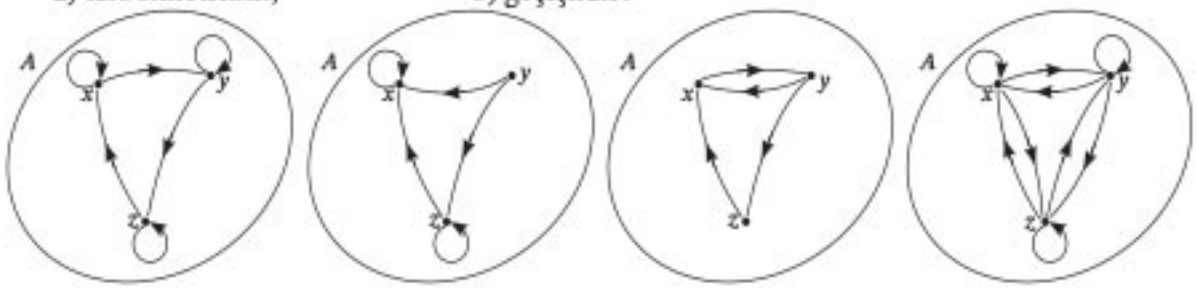
1. Çizim 7'de $A = \{a, b, c, d\}$ kümesindeki R_1, R_2, R_3 ve R_4 bağıntılarından hangileri:
   a) yansımalıdır, b) simetriktir?



Bağıntı R_1 Bağıntı R_2 Bağıntı R_3 Bağıntı R_4

çiz. 7

2. Çizim 8'de S = {x, y, z} kümesindeki R_1, R_2, R_3 ve R_4 bağıntılarından hangileri:
a) ters simetriktir, b) geçişlidir?



Bağıntı R_1 Bağıntı R_2 Bağıntı R_3 Bağıntı R_4

çiz. 8

3. X = {a, b, c, d} kümesinde R_1, R_2, R_3 ve R_4 bağıntıları şu şekilde verilmiştir:
R_1 = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, c)}, R_2 = {(a, b), (a, d), (b, c), (d, c)},
R_3 = {(a, b), (a, c), (a, d), (d, b)} ve R_4 = {(a, b), (a, c), (c, b), (d, d)}.
Verilen bağıntılardan hangileri geçişlidir?

4. T = {1, 2, 3, 5} kümesinde şu bağıntılar verilmiştir: R_1: "...den küçüktür...",
R_2: "...den küçük değildir...", R_3 = {(x, y) | x, y ∈ T, x + y çift sayıdır} ve
R_4 = {(3, 2), (1, 1), (2, 3), (5, 5), (1, 5), (5, 1)}.
Her bağıntıyı grafikle göster ve özelliklerini incele: yansımalılık, simetriklik, ters simetriklik ve geçişlilik.

5. Deyan 19 yaşındadır, Simona 16 yaşındadır, Goran ise 18 yaşındadır.
A = {Deyan, Simona, Goran} kümesinde R: "...den daha gençtir..." bağıntısı verilmiştir.
a) R bağıntısını grafikle göster.
b) Bağıntı geçişli midir? Cevabını açıkla.

6. Elena, İgor, Marko ve İlir adlı öğrenciler birer müzik eseri seslendirmiştir. Öğretmen, öğrenciler arasında seslendirilen eserin temposuna göre (dakikadaki vuruş sayısı) bir bağıntı kurmak istemektedir. Elena'nın eserinin temposu dakikada 60 vuruş, İgor'un dakikada 100 vuruş, Marko'nun dakikada 60 vuruş, İlir'in ise dakikada 120 vuruştur.
a) R: "...nın eserinin temposuyla aynı veya ondan daha yavaş tempoda bir eser seslendirmiştir..." bağıntısını grafikle göster.
b) Bağıntının özelliklerini incele: yansımalılık, simetriklik, ters simetriklik ve geçişlilik.

7. D = {Almanya, Fransa, İspanya, İtalya, Belçika, İsviçre} kümesinde R: "...ile ortak kara sınırına sahiptir..." bağıntısı belirlenmiştir.
a) R bağıntısını grafikle göster.
b) Bağıntı yansımalı, simetrik veya geçişli midir? Cevabını açıkla.
Yönerge: Hangi ülkelerin ortak kara sınırına sahip olduğunu belirlemek için coğrafya haritası veya internet kullan.

Araştırma

Aile üyelerinin kümesini tablo biçiminde yaz. Sonra, şu bağıntıları tablo biçiminde yaz:
R1: "...den daha yaşlıdır..." ve R_2: "...den daha genç değildir...".
a) R_1 ve R_2 bağıntılarının özelliklerini incele.
b) R_1 ve R_2 bağıntılarının hangi özellik bakımından farklı olduğunu keşfet.

3. DENKLİK BAĞINTISI VE SIRALAMA BAĞINTISI

Etkinlik

L = {35, 25, 38, 75, 573, 735, 921} kümesinde
R: "...ile aynı onlar basamağı rakamına sahiptir..." bağıntısı verilmiştir.
a) Bağıntıyı grafikle göster. b) Bağıntının özelliklerini incele.

A kümesinde tanımlı bir R bağıntısı; yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa bu bağıntıya **denklik bağıntısı** denir.

Denklik bağıntısı, bazı özelliklere göre eşit kabul edilen elemanları ilişkilendirir.

Örnek 1

Ana dili öğretmeni, öğrencilere aynı anlama sahip farklı kelimeleri, yani eş anlamlıları gruplandırma görevi verir. Örneğin "mutlu", "sevinçli" ve "neşeli" kelimeleri eş anlamlıdır. Bu şekilde, ana dildeki kelimeler kümesinde bir denklik bağıntısı belirlenmiş olur mu?

Evet, çünkü bu bağıntı:
- yansımalıdır, çünkü her kelime kendi kendisinin eş anlamlısıdır;
- simetriktir, çünkü örneğin "mutlu" kelimesi "sevinçli" kelimesinin eş anlamlısı ise, "sevinçli" kelimesi de "mutlu" kelimesinin eş anlamlısıdır;

- geçişlidir, çünkü örneğin "mutlu" kelimesi "sevinçli" kelimesinin eş anlamlısı ise ve "sevinçli" kelimesi "neşeli" kelimesinin eş anlamlısı ise, "mutlu" kelimesi de "sevinçli" kelimesinin eş anlamlısıdır.

Yani eş anlamlılar, anlamlarına göre bir denklik bağıntısı belirler.

Alıştırma 1

Bir otoparktaki tüm arabaların oluşturduğu S kümesinde *R*: "...ile aynı renge sahiptir..." bağıntısını inceliyoruz. *R*'nin S kümesinde bir denklik bağıntısı olup olmadığını kontrol et.

Etkinlik

L = {1, 2, 3, 5} kümesinde *R*: "...den küçük değildir..." bağıntısı verilmiştir.
a) Bağıntıyı grafikle göster. b) Bağıntının özelliklerini incele.

A kümesinde tanımlı bir *R* bağıntısı; yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa bu bağıntıya **sıralama bağıntısı** denir.

Sıralama bağıntısı, belirli bir özelliğe göre (büyüklük, yükseklik, sayıca çokluk vb.) kümenin elemanları arasında bir sıra oluşturur.

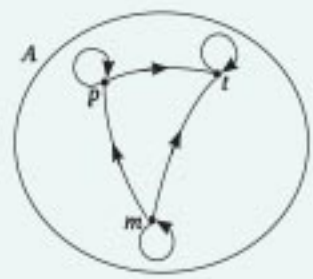
Örnek 2

A = {p, m, t} kümesinde *R*: "...İngiliz alfabesinde ...den sonra değildir..." bağıntısı verilmiştir.
a) *R* bağıntısını grafikle göster.
b) *R*'nin denklik bağıntısı mı yoksa sıralama bağıntısı mı olduğunu kontrol et.

a) *R* bağıntısının grafiği çizim 1'de gösterilmiştir.

b) *R* bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- yansımalı: p, İngiliz alfabesinde p'den sonra değildir, bu da (p, p) ∈ *R* anlamına gelir;
  m, İngiliz alfabesinde m'den sonra değildir, bu da (m, m) ∈ *R* anlamına gelir; ve t, İngiliz alfabesinde t'den sonra değildir, bu da (t, t) ∈ *R* anlamına gelir.



çiz. 1

- ters simetrik: m, İngiliz alfabesinde p'den sonra değildir, bu nedenle p'nin İngiliz alfabesinde m'den sonra olmadığı doğru değildir, bu da (m, p) ∈ *R*, fakat (p, m) ∉ *R* anlamına gelir;
  p, İngiliz alfabesinde t'den sonra değildir, bu nedenle t'nin İngiliz alfabesinde p'den

sonra olmadığı doğru değildir, bu da (p, t) ∈ *R*, fakat (t, p) ∉ *R* anlamına gelir; ve m, İngiliz alfabesinde t'den sonra değildir, bu nedenle t'nin İngiliz alfabesinde m'den sonra olmadığı doğru değildir, bu da (m, t) ∈ *R*, fakat (t, m) ∉ *R* anlamına gelir.

- geçişli: m, İngiliz alfabesinde p'den sonra değildir ve p, İngiliz alfabesinde t'den sonra değildir, ayrıca m de İngiliz alfabesinde t'den sonra değildir; bu da (m, p) ∈ *R* ve (p, t) ∈ *R* olmasının (m, t) ∈ *R* olmasını gerektirdiği anlamına gelir.

Örnek 3

Sistematik muayenede Petar'ın boyunun 160 cm, Nina'nın boyunun 170 cm ve İzet'in boyunun 180 cm olduğu belirlenmiştir. Öğrenciler kümesinde *R*: "...ile aynı boya veya ondan daha kısa boya sahiptir..." bağıntısı verilmiştir. Bu şekilde öğrenciler kümesinde bir sıralama bağıntısı belirlenmiş olur mu?

Öğrenciler Petar, Nina ve İzet farklı boylara sahiptir.
R bağıntısı yansımalıdır, çünkü her öğrenci kendi boyuyla aynı boya sahiptir.
R bağıntısı antisimetriktir, çünkü: Petar, Nina ile aynı boya veya ondan daha kısa boya sahiptir, fakat Nina, Petar ile aynı boya veya ondan daha kısa boya sahip değildir; Petar, İzet ile aynı boya veya ondan daha kısa boya sahiptir, fakat İzet, Petar ile aynı boya veya ondan daha kısa boya sahip değildir; Nina, İzet ile aynı boya veya ondan daha kısa boya sahiptir, fakat İzet, Nina ile aynı boya veya ondan daha kısa boya sahip değildir.
R bağıntısı geçişlidir, çünkü bir öğrenci başka bir öğrenciyle aynı boya veya ondan daha kısa boya sahipse ve ikinci öğrenci üçüncü bir öğrenciyle aynı boya veya ondan daha kısa boya sahipse, o zaman birinci öğrenci de üçüncü öğrenciyle aynı boya veya ondan daha kısa boya sahiptir.
Yani *R*, bir sıralama bağıntısıdır.
Not: Verilen bir öğrenci kümesinde iki öğrenci aynı boya sahipse, bu şekilde belirlenen bağıntı ters simetrik olmayacaktır. Neden?

Alıştırma 2

$A = \{3, 5, 7\}$ kümesinde şu bağıntılar verilmiştir: $R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ ve } x = y\}$ ve $R2 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ ve } x \leq y\}$. Bağıntıları göster: a) tablo biçiminde, b) grafikle.
Bağıntılardan herhangi biri denklik bağıntısı veya sıralama bağıntısı mıdır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. $B = \{22, 28, 35, 43, 82\}$ kümesinde *R*: "...ile aynı birler basamağı rakamına sahiptir..." bağıntısı verilmiştir.
   a) *R* bağıntısını grafikle göster.
   b) *R*'nin denklik bağıntısı mı yoksa sıralama bağıntısı mı olduğunu kontrol et.

2. $K = \{a, b\}$ kümesinde $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ bağıntısı verilmiştir. R, denklik bağıntısı mı yoksa sıralama bağıntısı mıdır?

3. $M = \{3, 5, 7, 9\}$ kümesinde R: "...den büyük veya ona eşittir..." bağıntısı verilmiştir.
   a) R bağıntısını grafikle göster.
   b) R'nin denklik bağıntısı mı yoksa sıralama bağıntısı mı olduğunu kontrol et.

4. Sayısal ifadeler kümesi $C = \{18 - 2 \cdot 3, 30 - 3 \cdot 4, 4 \cdot 5 - 8, 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4, (5 - 2) \cdot 4\}$ üzerinde R: "...ile aynı değere sahiptir..." bağıntısı verilmiştir.
   a) R bağıntısını grafikle göster.
   b) R'nin denklik bağıntısı mı yoksa sıralama bağıntısı mı olduğunu kontrol et.

5. Bir okuldaki öğrenciler kümesinde belirlenen R_1: "...den daha uzun değildir...", R_2: "...den daha yaşlı değildir..." ve R_3: "...den daha ağır değildir..." bağıntıları sıralama bağıntıları mıdır? Cevabını açıkla.

6. Tarih derslerinde öğrenciler şu bilgileri almıştır: Konstantinopolis'in Osmanlılar tarafından fethedilmesi 1453 yılında gerçekleşmiştir, Amerika'nın Kolomb tarafından keşfedilmesi 1492 yılında gerçekleşmiştir, Fransız Devrimi 1789 yılında gerçekleşmiştir ve İnsan Hakları Bildirgesi'nin imzalanması 1948 yılında gerçekleşmiştir.
   a) Bu olaylar arasında, gerçekleşme zamanlarına göre bir R bağıntısı kur.
   b) R bir sıralama bağıntısı mıdır?

Araştırma

İnternet üzerinden bilgi yardımıyla kâğıt, plastik poşet, alüminyum kutu ve elma kabuğu atıklarının doğada ayrışma süreleriyle ilgili veriler bul. Atıkları ayrışma sürelerine göre sırala. Atıklar arasında bir sıralama bağıntısı kurulabilir mi? Cevabını gerekçelendir.

4. PRATİKTE BAĞINTILAR

Etkinlik

Ana, Boris, Dragan ve Emina adlı öğrenciler futbol, basketbol veya voleybol oynarlar. Ana ve Dragan'ın voleybol oynadığı, Boris'in futbol ve basketbol oynadığı, Emina'nın ise basketbol oynadığı bilinmektedir.

a) Öğrenciler arasında R: "...ile aynı sporu oynar..." bağıntısını tablo biçiminde, açıklayıcı biçimde ve grafikle göster.

b) R bir denklik bağıntısı mıdır? Neden?

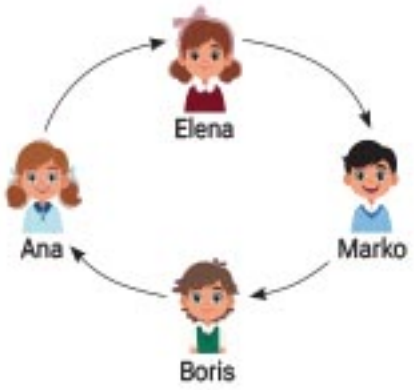
Örnek 1

Bir kütüphanede öğrenciler, resim 1'deki gibi okumak için birbirlerine kitap ödünç verirler.

a) Öğrenciler arasında R_1: "...e kitap ödünç vermiştir..." bağıntısını grafikle göster.

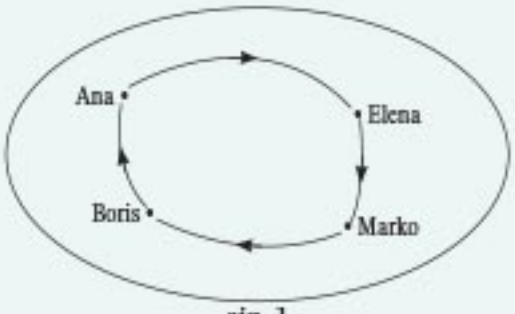
b) Bağıntının yansımalı, simetrik ve geçişli olup olmadığını kontrol et.

c) Öğrenciler arasında R_2: "...den bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabilir..." bağıntısını grafikle göster (örneğin, Ana Elena'ya kitap ödünç vermişse ve Elena da Marko'ya ödünç vermişse, Marko, Ana'dan Ana → Elena → Marko ödünç verme dizisiyle kitap alabilir). R_2 bir denklik bağıntısı mıdır?



resim 1

a) $R_1 = \{(\text{Ana, Elena}), (\text{Elena, Marko}), (\text{Marko, Boris}), (\text{Boris, Ana})\}$.
R_1 bağıntısının grafikle gösterimi çizim 1'de verilmiştir.



çiz. 1

b) R_1 bağıntısı:
- yansımalı değildir, çünkü örneğin Ana kendi kendine kitap ödünç veremez,
- simetrik değildir, çünkü örneğin Ana Elena'ya kitap ödünç vermiştir, fakat Elena Ana'ya kitap ödünç vermemiştir,
- geçişli değildir, çünkü örneğin Ana Elena'ya kitap ödünç vermiştir, Elena Marko'ya kitap ödünç vermiştir, fakat Ana Marko'ya kitap ödünç vermemiştir.

c) R_2 bağıntısına göre:

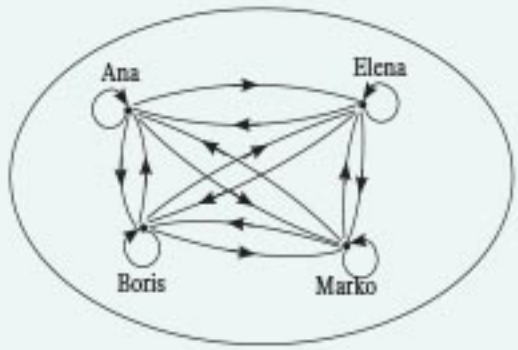
Ana, bir ödünç verme dizisi sonucunda şu kişilerden kitap alabilir:
Ana'dan (Ana → Elena → Marko → Boris → Ana),
Elena'dan (Elena → Marko → Boris → Ana),
Marko'dan (Marko → Boris → Ana), Boris'ten (Boris → Ana).

Elena, bir ödünç verme dizisi sonucunda şu kişilerden kitap alabilir:
Elena'dan (Elena → Marko → Boris → Ana → Elena),
Marko'dan (Marko → Boris → Ana → Elena),
Boris'ten (Boris → Ana → Elena), Ana'dan (Ana → Elena).

Marko, bir ödünç verme dizisi sonucunda şu kişilerden kitap alabilir:
Marko'dan (Marko → Boris → Ana → Elena → Marko),
Boris'ten (Boris → Ana → Elena → Marko),
Ana'dan (Ana → Elena → Marko), Elena'dan (Elena → Marko).

Boris, bir ödünç verme dizisi sonucunda şu kişilerden kitap alabilir:
Boris'ten (Boris → Ana → Elena → Marko → Boris),
Ana'dan (Ana → Elena → Marko → Boris),
Elena'dan (Elena → Marko → Boris), Marko'dan (Marko → Boris).

R_2 bağıntısının grafiği çizim 2'de gösterilmiştir.



çiz. 2

R_2 bağıntısı:

- yansımalıdır, çünkü her öğrenci, kendisinden başlayan dört ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabilir. Örneğin,
  Ana → Elena → Marko → Boris → Ana;
- simetriktir, çünkü bir öğrenci başka bir öğrenciden bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabiliyorsa, diğer öğrenci de birinci öğrenciden bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabilir. Örneğin, Elena Boris'ten bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabiliyorsa, yani Boris → Ana → Elena ise, Boris de Elena'dan bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabilir, yani Elena → Marko → Boris.
- geçişlidir, çünkü bir öğrenci başka bir öğrenciden bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabiliyorsa ve diğer öğrenci üçüncü bir öğrenciden bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabiliyorsa, o zaman birinci öğrenci üçüncü öğrenciden bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabilir. Örneğin, Marko Ana'dan bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabiliyorsa (Ana → Elena → Marko) ve Ana Boris'ten bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabiliyorsa (Boris → Ana), o zaman Marko Boris'ten bir ödünç verme dizisi sonucunda kitap alabilir (Boris → Ana → Elena → Marko).

Buna göre, R_2 bir denklik bağıntısıdır.

Alıştırma 1

Okulda büyük bir konser düzenlenmektedir ve öğrenciler birbirlerine sahne düzeni, müzik, ışıklar ve tanıtım hazırlığı için görevler vermektedir. Bilinenler şunlardır:
Ana, sahne düzeni grubuna liderlik eder ve Boris ile Elena'ya görevler verir;
Boris, müzik grubuna liderlik eder ve Marko ile Nina'ya görevler verir;
Marko, ışıklar grubuna liderlik eder ve Petra ile Damyan'a görevler verir;

Elena, tanıtım grubuna liderlik eder ve Ana ile Nina'ya görevler verir.
a) Öğrenciler arasında R_1: "...e görev verir..." bağıntısını tablo biçiminde ve grafikle göster.
b) R_1 bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişli olup olmadığını kontrol et.
c) R_2: "...den bir görev dizisi aracılığıyla görev alır..." bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişli olup olmadığını kontrol et.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Marko'nun su, şeker ve tuzu vardır ve bitki dikimi için bir çözelti yapmak istemektedir. O, şekeri suda çözer, ardından tuz ekler.
   a) Maddeler arasında R: "...den önce çözünür..." bağıntısını tablo biçiminde ve grafikle göster.
   b) R bağıntısının geçişli ve ters simetrik olup olmadığını kontrol et.

2. Laboratuvarda öğrenci, üç bardaktaki suyu ısıtır:
   bardak A: 20°C'den 50°C'ye, bardak B: 30°C'den 60°C'ye ve bardak V: 40°C'den 80°C'ye.
   a) Bardaklar arasında R: "...den daha yüksek başlangıç sıcaklığına sahiptir..." bağıntısını tablo biçiminde göster.
   b) R bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişli midir? Cevabını gerekçelendir.

3. Vodno Dağı'nın 1011 m yüksekliğinde, Bistra Dağı'nın 2621 m yüksekliğinde ve Korab Dağı'nın 2764 m yüksekliğinde olduğu bilinmektedir.
   a) Dağlar arasında R: "...den daha yüksektir..." bağıntısını tablo biçiminde ve grafikle göster.
   b) R bir sıralama bağıntısı mıdır? Cevabını gerekçelendir.

4. Bilişim sınıfında Zamira, Elena, Marko ve Boris adlı öğrenciler birbirleriyle dosya paylaşmaktadır. Zamira'nın Elena'ya dosya gönderdiği; Elena'nın Marko'ya dosya gönderdiği; Marko'nun Boris'e dosya gönderdiği bilinmektedir.
   a) Öğrenciler arasında R: "...e dosya gönderir..." bağıntısını tablo biçiminde ve grafikle göster.
   b) R bir denklik bağıntısı mıdır?

5. Okuldaki yenilenebilir kaynaklar projesinde gruplar küçük jeneratörler kurar; buna göre: güneş paneli enerjiyi bataryaya verir, batarya enerjiyi motora verir ve motor enerjiyi vantilatöre verir.
   a) Küçük jeneratörler arasında R_1: "...e enerji aktarır..." bağıntısını tablo biçiminde ve grafikle göster.
   b) Yeni bir R_2: "...e bir aktarım dizisi yoluyla etki edebilir..." bağıntısını belirle ve bunun denklik bağıntısı olup olmadığını kontrol et.

6. **Proje görevi**
   "Şehrimde Bağıntılar" projesi boyunca bağıntıları uygulayarak yaşadığın şehirdeki durumları daha yakından tanıyacak ve bunları iyileştirmenin yollarını bulma olanağına sahip olacaksın.
   Yaşadığın şehir için şu kümeleri belirle: okullar, pastaneler, sandviççiler, marketler, depolar, otobüs durakları, parklar ve müzeler.
   Belirtilen kümeleri en fazla 5 elemanla seç.

a) Küme içinde bir bağıntı belirle:

- okullar, öğrenci sayısına göre;
- okullar, eğitim kademesine göre;
- pastaneler, sunulan tatlı çeşitlerinin sayısına göre;
- sandviççiler, sunulan sandviç çeşitlerinin sayısına göre;
- marketler, satılan bir tür unun fiyatına göre;
- marketler, indirimde olan ürün sayısına göre;
- depolar, depolama alanının hacmine göre;
- otobüs durakları, aralarında doğrudan hat olup olmadığına göre;
- parklar, yüz ölçümüne göre;
- müzeler, sergi ürünlerinin sayısına göre.

b) Bağıntıları grafikle göster ve özelliklerini belirle. Bağıntılardan hangileri denklik bağıntısı, hangileri sıralama bağıntısıdır?

c) Belirlenen bağıntıların özelliklerinin şehirdeki yaşamı ve dinamizmi nasıl etkilediğini açıkla.

d) Yeni dolaylı etkiler ekleyerek yeni bağıntılar belirle ve bunları grafikle göster. Şehir yaşamının hangi yönlerinin iyileştirileceğini açıkla.

5. RASYONEL SAYILAR

Pozitif ve negatif rasyonel sayılar

Etkinlik

Selma, fiyatı 22 dinar olan 5 kalemlik bir set satın almak istiyor.
a) Bir kalemin fiyatı ne kadardır?
b) Bir kalemin fiyatını yazabileceğimiz bir doğal sayı var mıdır?
c) Bir kalemin fiyatını yazabileceğimiz bir tam sayı var mıdır?
d) Bir kalemin fiyatını nasıl yazabilirsin?

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ içinde çıkarma ve bölme işlemleri her zaman yapılamaz. Örneğin, $3 - 5$ farkına eşit olan bir doğal sayı yoktur.

Negatif sayıların ve sıfırın tanıtılmasıyla doğal sayılar kümesini, çıkarma işleminin her zaman yapılabilir olduğu tam sayılar kümesi $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ kümesine genişlettik.

Ancak bölme işlemi, doğal sayılar kümesinde hâlâ yapılamaz. Örneğin, 3 : 4 bölümüne eşit olan bir doğal sayı yoktur.
Doğal sayılar kümesinde bölme ile ilgili sorunu aşmak için bu kümeyi yeni sayılarla – kesirlerle genişlettik.

Bu anlamda, örneğin, 3 : 4 bölümünün $\frac{3}{4}$ kesrine eşit olduğunu ve $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\cdots$ olduğunu kabul ederiz.
Yeni kesirler kümesinde doğal sayılar da bulunur, çünkü her doğal sayı paydası 1 olan bir kesir biçiminde yazılabilir.
Örneğin, $1=\frac{1}{1}$, $2=\frac{2}{1}$, $3=\frac{3}{1}$, ...

$\frac{a}{b}$ kesri biçiminde yazılan her sayı, burada $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere, **pozitif rasyonel sayı** olarak adlandırılır.

Tüm pozitif rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}^+$ ile gösteririz.
Bu şekilde yazarız: $\mathbb{Q}^+=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

Örneğin, $\frac{3}{4}$, 5, $\frac{7}{6}$ ve $\frac{11}{5}$ sayıları pozitif rasyonel sayılardır.

Alıştırma 1

Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur: a) $\mathbb{N}=\mathbb{Z}^+$, b) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}^+$, c) $\mathbb{Z}^+\subseteq\mathbb{Q}^+$, d) $\mathbb{Z}^+=\mathbb{Q}^+$?

Bölme işlemi, tam sayılar kümesinde de her zaman yapılamaz.
Örneğin, 3 : (−4) bölümüne eşit olan bir tam sayı yoktur.
Tam sayılar kümesinde bölme ile ilgili sorunu aşmak için bu kümeyi yeni sayılarla genişletmemiz gerekir.
Bu amaçla, örneğin, şu eşitliğin geçerli olduğunu kabul edeceğiz:

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\cdot(-1)}{3\cdot(-1)}=\frac{2}{-3},$$

bu da $\frac{-2}{3}$ ve $\frac{2}{-3}$ kesirlerinin aynı sayıyı temsil ettiği anlamına gelir. Bu sayıyı $-\frac{2}{3}$ ile göstereceğiz,

yani $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$ geçerlidir.

Bu, örneğin, $\frac{2}{3}$ kesrinin yanında $-\frac{2}{3}$ kesrini de incelememiz gerektiği anlamına gelir.
Yeni kesirler kümesinde negatif tam sayılar da bulunur, çünkü bunların her biri paydası 1 olan bir kesir biçiminde yazılabilir.
Örneğin, $-1=\frac{-1}{1}$, $-2=\frac{-2}{1}$, $-3=\frac{-3}{1}$,....

$-\frac{a}{b}$ kesri biçiminde yazılan her sayı, burada $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere, **negatif rasyonel sayı** olarak adlandırılır.

Tüm negatif rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}^-$ ile gösteririz.

Bu şekilde yazarız: $\mathbb{Q}^- = \left\{-\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

Örneğin, $-\frac{3}{4}, -4, -\frac{5}{3}, -\frac{17}{19}$ sayıları negatif rasyonel sayılardır.

Alıştırma 2

Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur: a) $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Q}^-$, b) $\mathbb{Z}^- \neq \mathbb{Q}^-$, c) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^-$?

Rasyonel sayılar

Tüm pozitif rasyonel sayılar, tüm negatif rasyonel sayılar ve sıfır sayısının birleşimine **rasyonel sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir, yani

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$.

Etkinlik

Çizim 1'deki diyagramı incele ve doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ve rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ arasındaki ilişkiyi açıkla.



çiz. 1

$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ eşitliklerinden, burada $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere, her rasyonel sayıyı **standart biçimde** $\frac{a}{b}$, olarak yazabileceğimiz sonucuna varırız; burada $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Buna göre, rasyonel sayılar kümesini şu biçimde yazabiliriz:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$.

ve

Örnek 1

Tabloda, bir gün boyunca Üsküp'te ölçülen sıcaklık değerleri verilmiştir:

zaman	sabah saat 10	öğle saat 12	öğleden sonra saat 3	akşam saat 7	gece saat 10
sıcaklık	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

Her zaman aralığında sıcaklığın saat başına değişimi ne kadardır?

Sabah saat 10'dan öğle saat 12'ye kadar olan aralıkta, sıcaklığın saat başına değişimi $\frac{14\,°C-11\,°C}{2\,h}=\frac{3}{2}\frac{°C}{h}$ olur.

Öğle saat 12'den öğleden sonra saat 3'e kadar olan aralıkta, sıcaklığın saat başına değişimi $\frac{17\,°C-14\,°C}{3\,h}=1\frac{°C}{h}$ olur.

Öğleden sonra saat 3'ten akşam saat 7'ye kadar olan aralıkta, sıcaklığın saat başına değişimi $\frac{10\,°C-17\,°C}{4\,h}=\frac{-7}{4}\frac{°C}{h}$ olur.

Akşam saat 7'den gece saat 10'a kadar olan aralıkta, sıcaklığın saat başına değişimi $\frac{5\,°C-10\,°C}{3\,h}=\frac{-5}{3}\frac{°C}{h}$ olur.

Sıcaklığın saat başına değişiminin ölçü sayıları şu rasyonel sayılardır: $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{-7}{4}$ ve $\frac{-5}{3}$.

Bunların arasında pozitif rasyonel sayılar $\frac{3}{2}$ ve 1, negatif rasyonel sayılar ise $\frac{-7}{4}$ ve $\frac{-5}{3}$'tür.

1 sayısı aynı zamanda hem tam sayı hem de doğal sayıdır.

Örnek 2

$-4, \frac{1}{2}, -3, \frac{-1}{3}, 2, \frac{-3}{7}, \frac{5}{6}, 9$ rasyonel sayılarından hangileri:

a) pozitif rasyonel sayılar, b) negatif rasyonel sayılar,
c) tam sayılar, d) doğal sayılardır?

a) Pozitif rasyonel sayılar $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{5}{6}$ ve 9'dur.

b) Negatif rasyonel sayılar $-4, -3, \frac{-1}{3}$ ve $\frac{-3}{7}$'dir.

c) Tam sayılar $-4, -3$, 2 ve 9'dur.

d) Doğal sayılar 2 ve 9'dur.

Alıştırma 3

$P=\{-1, 0, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, 8\}$ kümesi verilmiştir. Aşağıdaki kümeleri yaz:

a) $M=\{x \mid x\in P \text{ и } x\in\mathbb{Z}\}$, b) $M=\{x \mid x\in P \text{ ve } x\in\mathbb{Q}^+\}$, c) $M=\{x \mid x\in P \text{ ve } x\in\mathbb{Q}^-\}$.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki cümleyi bir rasyonel sayı yardımıyla yaz:
   a) Mira'nın 11 000 dinar borcu vardır,
   b) Sonya'nın 300 boncuğu vardır,
   c) bugün sıcaklık sıfırın 4 °C altındadır,
   d) dün sıcaklık sıfırın 11 °C üstündeydi,
   e) Ohri Gölü'nün su seviyesi, normal su seviyesinden $\frac{15}{2}$ cm daha düşüktür.

2. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur:
   a) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}^-$, b) $8 \in \mathbb{Z}^-$, c) $-55 \in \mathbb{Q}^+$, d) $0 \in \mathbb{Q}$, e) $0 \in \mathbb{Z}$?

3. Aşağıdaki kümeleri yaz:
   a) Beş pozitif rasyonel sayıdan oluşan A kümesi,
   b) Beş negatif rasyonel sayıdan oluşan B kümesi,
   c) Beş rasyonel sayıdan oluşan C kümesi.

4. Leyla, $\frac{5}{3}$ sayısının rasyonel sayı olduğunu, 5'in ise yalnızca doğal sayı olduğunu söylüyor. Sead, her ikisinin de rasyonel sayı olduğunu söylüyor. Kim haklıdır?

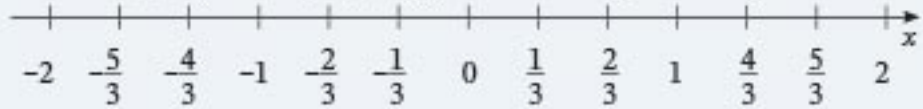
5. İlk satırdaki çözülmüş örneğe göre tabloyu defterine geçir ve doldur.

	kümeler						
sayı	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^+$	$\mathbb{Q}^-$
$-\frac{1}{4}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
0							
$-\frac{9}{2}$							
7							
−11							

6. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur:
   a) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^+$, b) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, c) $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, d) $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\} = \mathbb{Q}$,
   e) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \varnothing$, f) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$, g) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, h) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$?

Araştırma

1. Çizim 2'de birkaç rasyonel sayı sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.



çiz. 2

a) Tam sayıların sayı doğrusu üzerine yerleştirilmesi kuralını hatırla. Benzer bir kurala göre rasyonel sayıları da sayı doğrusu üzerinde gösteririz. Rasyonel sayıların sayı doğrusu üzerinde gösterilme kuralını açıklamaya çalış. Hangi rasyonel sayılar sıfırın sağında, hangileri sıfırın solunda gösterilir?

b) Bir sayı doğrusu çiz ve 6 rasyonel sayı seç: 3 pozitif ve 3 negatif rasyonel sayı.

2. a) Tam sayıları sayı doğrusu yardımıyla karşılaştırma kuralını hatırla. Rasyonel sayıları sayı doğrusu yardımıyla karşılaştırma kuralını açıklamaya çalış.
b) Pozitif rasyonel sayılar için şu kuralın geçerli olduğunu hatırla:

$\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$ çünkü $2 \cdot 5 < 3 \cdot 4$; $\frac{7}{6} > \frac{4}{9}$ çünkü $7 \cdot 9 > 4 \cdot 6$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ çünkü $3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$.

Aynı kurala göre şu sayıları karşılaştır:

$\frac{-2}{3}$ ve $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$ ve $\frac{-4}{5}$; $\frac{-4}{5}$ ve $\frac{-4}{5}$, $\frac{-2}{3}$ ve $\frac{-4}{6}$.

Sonra cevabını sayı doğrusu yardımıyla doğrula.
c) Standart biçimde yazılmış rasyonel sayıları karşılaştırmak için genel bir kural çıkar.

6. SONSUZ DEVİRLİ ONDALIK SAYILAR

Her kesrin, payın paydaya bölünmesiyle elde edilen bölüm bulunarak ondalık sayı biçiminde yazılabileceğini hatırla.

Etkinlik

Dairenin boyalı kısmını yaz:
a) kesirle, b) ondalık sayı ile.



Örnek 1

Kesri ondalık sayı ile yaz: a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{1}{3}$.

a) $\frac{3}{4} = 0,75$ Bölme işlemi sona erdiğinde **sonlu ondalık sayı** elde ederiz.

b) $\frac{1}{3} = 0,333...$ Bölme işlemi sona ermediğinde **sonsuz devirli ondalık** sayı ya da kısaca **devirli ondalık sayı** elde ederiz.

- Ondalık virgülden hemen sonra aynı sırayla tekrarlanan sonlu bir rakam dizisi bulunan devirli ondalık sayıya **saf devirli ondalık sayı** denir.
- Birkaç sıfır olmayan ondalık basamaktan sonra aynı sırayla tekrarlanan sonlu bir rakam dizisi bulunan devirli ondalık sayıya **karma devirli ondalık sayı** denir.
- Tekrarlanan rakam dizisine **ondalık sayının devri** denir.

Sonlu ondalık sayılara örnek olarak şu sayılar verilebilir: 2,65 ve 36,567834.
0,3333333333333... = 0,(3) sayısı, devri 3 olan saf devirli ondalık sayıdır.
2,3(27) = 2,3272727272727... sayısı, devri 27 olan karma devirli ondalık sayıdır.

Alıştırma 1

Aşağıdaki kesri ondalık sayı ile yaz: a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{11}{37}$.

Elde edilen ondalık sayılardan hangisi sonlu ondalık sayı, hangisi sonsuz ondalık sayıdır? Sonsuz ondalık sayının devri kaçtır?

Örnek 2

Ondalık sayıyı kesirle yaz: a) 0,25; b) 0,(16); c) 2,36(4).

a) 0,25 sayısı sonlu ondalık sayıdır. Ondalık kesir biçiminde yazılabilir:

$$x = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

b) 0,(16) sayısı, devri 16 olan saf devirli ondalık sayıdır. Aşağıdaki işlemle kesir olarak yazılabilir:

$0,(16) = x$	Bilinmeyen kesri x ile gösteririz.
$0,(16) \cdot 100 = x \cdot 100$	Devir iki basamaklı bir sayı olduğu için
$16,(16) = x \cdot 100$	her iki tarafı 100 ile çarparız.
$16 + 0,(16) = x \cdot 100$	Ondalık sayıyı bir tam sayı ile verilen ondalık sayının toplamı olarak yazarız.
$16 + x = x \cdot 100$	0,(16) yerine x yazarız ve bilinmeyen x'e göre doğrusal denklemi çözeriz.
$16 = x \cdot 100 - x$	
$16 = x(100 - 1)$	
$x = \frac{16}{100-1} = \frac{16}{99}.$	Çözümü $x = \frac{16}{99}$'dur.

Buna göre, $0,(16) = \frac{16}{99}$ elde ederiz.

c) 2,36(4) sayısı karma devirli ondalık sayıdır. Kesir olarak şu şekilde yazılabilir:

$2{,}36(4) = x$ Bilinmeyen kesri x ile gösteririz.

$236{,}(4) = 100 \cdot x$ Virgülü ikinci ondalık basamağın sonuna taşıdığımız için her iki tarafı 100 ile çarparız.

$2364{,}(4) = 1000 \cdot x$ Ondalık sayının devrinin başlangıcından önce 3 rakam bulunduğu için $2{,}36(4) = x$ denkleminin iki tarafını 1000 ile çarparız.

İki denklemi birbirinden çıkarırız.

$2364{,}(4) - 236{,}(4) = 1000 \cdot x - 100 \cdot x$

$2128 = 900 \cdot x$

$$x = \frac{2128}{900} = \frac{532}{225} = 2\frac{82}{225}.$$

Buna göre, $2{,}36(4) = 2\frac{82}{225}$ elde ederiz.

Alıştırma 2

Ondalık sayıyı kesirle yaz: a) 0,75; b) 0,(6); c) 2,1(45).

Alıştırma 3

"Yeşil Halka" bisiklet rotasında güzergâh üç bölümden oluşmaktadır: uzunluğu 0,(6) km olan *A* bölümü, uzunluğu 1,2(3) km olan *B* bölümü ve uzunluğu 2,(45) km olan *C* bölümü.

a) Uzunlukları kesir olarak yaz.

b) Tam bir turun uzunluğu ne kadardır?

c) Marko 3 tur atmış ve ardından ayrıca *A* bölümünü sürmüştür. Marko kaç kilometre yol gitmiştir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kesri ondalık sayı ile yaz: a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{9}{20}$, d) $\frac{77}{390}$, e) $\frac{77}{330}$.
2. Devirli ondalık sayı gösterimini kullanarak sayıyı yaz:
   a) 0,3989898..., b) 4,7102102..., c) 0,2540314031..., d) 243,2526161....
3. Kesirle yazılmış ondalık sayının devrini bul: a) $\frac{7}{9}$, b) $\frac{42}{37}$, c) $\frac{118}{123}$.
4. Devirli ondalık sayıyı kesir olarak yaz:
   a) 0,(7); b) 3,(21); c) 1,2(34); d) 4,3(123); e) 5,12(7).
5. Çadır kurmak için uzunlukları 0,(8) m, 2,3(5) m ve 3,(27) m olan üç ip kesiliyor.
   a) Her ipin uzunluğunu kesir olarak ifade et.
   b) Üç ipin toplam uzunluğu 10 m ise, kesildikten sonra kaç metre ip kalır?
6. Bir otomobil 1 km uzunluğunda yol gitmiştir. Yolun 0,4 km uzunluğundaki birinci bölümünü otomobil 0,(833) km/h ortalama hızla gitmiştir. Yolun 0,6 km uzunluğundaki ikinci bölümünde otomobil 1,2(5) km/h hızla hareket etmiştir.
   a) Verilen hızları kesirle yaz.
   b) Yolun her bölümünü gitmek için saat cinsinden ne kadar zaman gerekmiştir?

7. KESİRLERİN, ONDALIK SAYILARIN VE YÜZDELERİN EŞİTLİĞİ

Etkinlik

Ana'nın bir parça çikolatası vardı. Boryan, Ana'nın çikolatanın $\frac{1}{2}$'sini yediğini söylüyor; Merita, çikolatanın 0,5'ini yediğini söylüyor; Suad ise çikolatanın %50'sini yediğini söylüyor. Boryan, Merita ve Suad, farklı yollarla Ana'nın yediği aynı çikolata parçasını mı ifade etmişlerdir? Cevabını açıkla.

Örnek 1

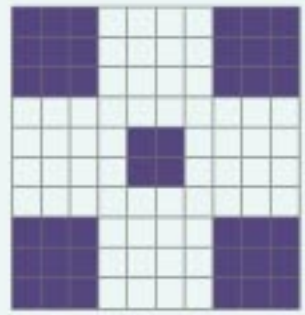
Çizim 1'deki karenin ne kadarlık kısmı boyalıdır?

Karenin boyalı kısmını üç şekilde yazabiliriz:

karenin $\frac{40}{100}$'ü,

karenin 0,4'ü,

karenin %40'ı.



çiz. 1

Örnek 2

Kesri yüzde olarak ifade et: a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{1}{3}$.

a) $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$, b) $\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=\frac{300}{8}\%=37,5\%$, c) $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\cdot 100\right)\%\approx 33,3\%$.

Örnek 3

Ondalık sayıyı yüzde olarak ifade et: a) 0,42; b) 3,6; c) 0,054.

a) $0,42=(0,42\cdot 100)\%=42\%$, b) $3,6=(3,6\cdot 100)\%=360\%$, c) $0,054=(0,054\cdot 100)\%=5,4\%$

Bir sayı veya kesir, önce 100 ile çarpılıp sonra elde edilen çarpımın yanına yüzde işareti "%" yazıldığında yüzde olarak ifade edilir.

Örnek 4

Yüzdeleri kesir olarak ifade et: a) %37, b) %18, c) %56.

a) $\%37=\frac{37}{100}$, b) $\%18=\frac{18}{100}=\frac{9}{100}$, c) $\%56=\frac{56}{100}=\frac{14}{25}$.

Örnek 5

Yüzdeleri ondalık sayı ile ifade et: a) %8, b) %70, c) %35.

a) $\%8=\frac{8}{100}=0,08$; b) $\%70=\frac{70}{100}=0,7$; c) $\%35=\frac{35}{100}=0,35$.

Yüzdeler sayıya çevrilirken, yüzde sayısı 100'e bölünür ve yüzde işareti "%" kaldırılır.

Örnek 6

Çizim 2'deki dikdörtgenin yeşil renkle boyanmış kısmını yüzde olarak ifade et.

$\frac{4}{5}=\left(\frac{4}{5}\cdot 100\right)\%=\%80$

Dikdörtgenin %80'i yeşil renkle boyanmıştır.

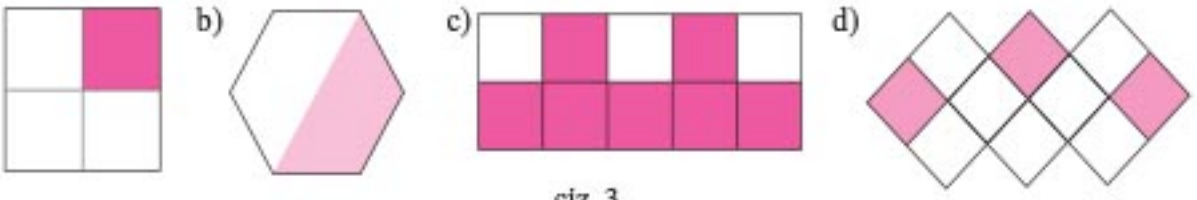


çiz. 2

Alıştırma 1

Çizim 3'teki şeklin boyalı kısmını yüzde olarak ifade et:

a) b) c) d)



çiz. 3

Örnek 7

Mariya restoranda 8 parçaya bölünmüş bir pizza sipariş etmiştir. O, 3 parça yemiş, arkadaşı Arta ise 1 parça yemiştir. Pizzanın şu kısmını kesir ve yüzde ile yaz:

a) Mariya'nın yediği kısmı, b) Arta'nın yediği kısmı, c) yenmeden kalan kısmı.

a) Mariya pizzanın $\frac{3}{8}$'ini, yani pizzanın %37,5'ini yemiştir, çünkü

$$\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=\%37.$$

b) Arta pizzanın $\frac{1}{8}$'ini, yani pizzanın %12,5'ini yemiştir, çünkü

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{8}\cdot 100\right)\%=\%12{,}5.$$

c) Pizzanın yenmeden kalan kısmı $\frac{1}{2}$'dir, yani pizzanın %50'sidir, çünkü

$$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{4}{8}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \text{ ve } \frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=\%50.$$

Örnek 8

Mina, tüm hafta için meyve satın almak istiyor. Mağazada fiyatlar şu şekildedir:
elma: $\frac{1}{2}$ kg 30 denar, muz: 0,75 kg 45 denar, portakal: kg'ın %40'ı 24 denar.

a) Her meyve için kilogram başına fiyatı hesapla.

b) Tüm meyveleri miktarlarıyla birlikte kesir, ondalık sayı ve yüzde biçiminde ve kilogram fiyatlarıyla göstereceğin bir tablo yap.

c) Mina'nın 90 denarı vardır. Bütün bütçesini kullanmak için ne satın alabilir?

a) Eğer $\frac{1}{2}$ kg elma 30 denar ise, o zaman 1 kg $30 : \frac{1}{2} = 30 \cdot 2 = 60$ denar eder.

Eğer 0,75 kg muz 45 denar ise, o zaman 1 kg $45 : 0{,}75 = 60$ denar eder.

Eğer 0,4 kg portakal 24 denar ise, o zaman 1 kg $24 : 0{,}4 = 60$ denar eder.

b)

meyve	kesir	ondalık sayı	yüzde	1 kg fiyatı
elma	$\frac{1}{2}$	0,5	50%	60 denar
muz	$\frac{3}{4}$	0,75	75%	60 denar
portakal	$\frac{2}{5}$	0,4	40%	60 denar

c) Bütün meyvelerin kilogram fiyatı aynıdır. Mina, bütün bütçesini kullanmak için farklı meyve türlerini toplam 1,5 kg olacak şekilde satın alabilir.

Alıştırma 3

Okul mutfağında ara öğün için öğrenciler meyve suyu satın almaktadır. Andrey 1 litrelik portakal suyunun $\frac{3}{5}$'ini, Bela 1 litrelik elma suyunun 0,6'sını ve Vanya 1 litrelik greyfurt suyunun %60'ını içmiştir.

a) İçilen her meyve suyu miktarını kesir, ondalık sayı ve yüzde ile yazacağın bir tablo yap.

b) Her öğrenci kaç mililitre meyve suyu içmiştir?

c) Hangi öğrenci en çok, hangisi en az meyve suyu içmiştir?

d) Tabloyu kullanarak kısa bir sonuç yaz.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Tabloyu defterine geçir ve doldur:

yüzde	%42				%12
ondalık sayı		0,65		0,07	
kesir			$\frac{17}{20}$		

2. Matematik yarışmasında bir öğrenci soruların $\frac{2}{5}$'ini çözmüştür.

a) $\frac{2}{5}$ kesrini ondalık sayı olarak ifade et.

b) Aynı kesri yüzde olarak ifade et.

c) 0,4 ve %40, $\frac{2}{5}$ ile aynı miktarları mı belirler? Cevabını gerekçelendir.

d) Başka bir öğrenci soruların %75'ini çözmüşse, buna karşılık gelen kesir ve ondalık sayı nedir?

3. Mağazada Yusuf $\frac{2}{3}$ kg elma, Marko 0,5 kg muz ve Ana bir kilogram portakalın %80'ini satın almıştır. Kim en fazla miktarda meyve satın almıştır?

4. Bogdan 3 gün aynı patikada koşmuştur. Birinci gün patikanın 0,6'sını, ikinci gün patikanın $\frac{5}{8}$'ini ve üçüncü gün patikanın %55'ini koşmuştur.
Hangi gün patikanın en büyük kısmını koşmuştur?

5. Sofiya, Damyan ve Arbnora'nın aynı miktarda parası vardı.
Onlar bir yatırım fonuna para yatırdılar.
Sofiya parasının 0,75'ini, Damyan parasının $\frac{5}{8}$'ini,
Arbnora ise parasının %70'ini yatırdı.
Hangi öğrenci en fazla para yatırmıştır?

Kodu tara ve alıştırmaları çöz.

6. Öğrenciler kilden modeller yapıyorlar. Melita modelinin $\frac{9}{20}$'sini, Anya modelinin 0,45'ini, Marko ise modelinin %50'sini tamamladı.
Modelin en büyük kısmını kimin yaptığını tahmin et ve tam bir model elde etmek için üç modeli nasıl birleştirebileceklerini öner.

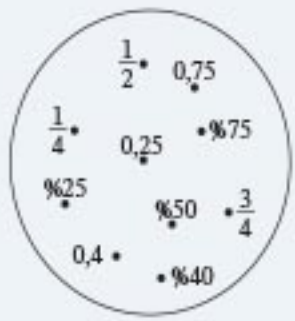
Araştırma

Çizim 4'teki diyagramı defterine geçir.

a) Aynı miktarı ifade eden kesri, ondalık sayıyı ve yüzdeyi eşleştir.

b) Diyagramda gösterilen kümede tanımlanan
R: "...ile aynı miktarı temsil eder..." bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişli midir?

c) *R* bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır?



çiz. 4

8. KESİRLERİN VE YÜZDELERİN MİKTARLAR ÜZERİNDEN HESAPLANMASI

Etkinlik

Bir kutuda 100 şeker vardır. %25'i kırmızı, %50'si mavi ve geri kalanı sarıdır.
a) Kutuda kaç kırmızı, kaç mavi ve kaç sarı şeker vardır?
b) Tüm şekerlerin ne kadarlık kısmı sarıdır? Sarı şekerlerin kısmını kesir ve yüzde ile ifade et.
c) Tüm şekerlerin %50'sini yersen, geriye kaç tane kalır?

Örnek 1

Okul kütüphanesi için 120 kitap satın alınmıştır. Bunların %40'ı bilimsel literatür, $\frac{1}{4}$'ü roman, kalanları ise diğer kategorilerdir.
a) Kaç kitap bilimsel literatürdür?
b) Kaç kitap romandır?
c) Kalan kitapları toplam kitap sayısının kesri ve yüzdesi olarak ifade et.
d) Hangi kategoride en çok, hangi kategoride en az kitap vardır?

a) Bilimsel literatür, 120 kitabın %40'ıdır, yani $0{,}4 \cdot 120 = 48$ kitaptır.
b) 120 kitabın $\frac{1}{4}$'ü romandır, yani $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$ kitaptır.
c) Diğer kategorilerden $120 - (48 + 30) = 120 - 78 = 42$ kitap vardır.
120 kitabın kesri olarak kalan kategoriler $\frac{42}{120} = \frac{7}{20}$'dir.
120 kitabın yüzdesi olarak kalan kategoriler $\frac{42}{120} \cdot 100 = \%35$'tir.

d)

kategori	kitap sayısı	kesir	yüzde
bilimsel literatür	48	$\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$	40%
romanlar	30	$\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$	25%
kalanlar	42	$\frac{7}{20}$	35%

En çok kitap bilimsel literatür kategorisindedir: 48 kitap veya kitap sayısının %40'ı.
En az kitap roman kategorisindedir: 30 kitap veya kitap sayısının %25'i.
Kalan kategoriler 42 kitap veya kitap sayısının %35'idir.

Alıştırma 1

Okul spor kulübü için yeni spor malzemeleri satın alınmaktadır. Toplam 150 malzeme satın alınmıştır; bunların $\frac{1}{3}$'ü futbol topu, %20'si tenis raketi ve geri kalanı egzersiz ipidir.

a) Kaç futbol topu satın alınmıştır?
b) Kaç tenis raketi satın alınmıştır?
c) İplerin sayısını toplam miktarın kesri ve yüzdesi olarak ifade et.
d) Hangi malzeme kategorisinin en fazla, hangisinin en az temsil edildiğini karşılaştır.
e) Eğer 10 ip daha eklenirse, iplerin yüzdesi artar mı yoksa azalır mı? Cevabını gerekçelendir.

Örnek 2

Laboratuvarda oda sıcaklığında şekerli su çözeltisi hazırlanmaktadır. 300 ml suda 100 g şeker çözülür. Sonra tamamen çözünen 200 g şeker daha eklenir.
a) Şeker, başlangıç çözeltisinin kütlesinin ne kadarlık kısmını oluşturur?
b) Başlangıç çözeltisindeki şeker yüzdesi kaçtır?
c) 200 g şeker daha eklendikten sonra yeni şeker yüzdesi kaçtır?
d) Derişim artmış mıdır ve yüzde kaç artmıştır?

a) 1 ml su $\approx$ 1 g su varsayımı altında, şeker başlangıç çözeltisinin

$$\frac{100\,\text{g}}{(300\,\text{g}+100\,\text{g})}=\frac{100\,\text{g}}{400\,\text{g}}=\frac{1}{4}$$ 'ünü oluşturur.

b) Başlangıç çözeltisindeki şeker yüzdesi

$$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=\%25$$'tir.

c) 200 g şeker daha eklendikten sonra, şeker yeni çözeltinin

$$\frac{100\,\text{g}+200\,\text{g}}{400\,\text{g}+200\,\text{g}}=\frac{300\,\text{g}}{600\,\text{g}}=\frac{1}{2}$$ 'sini oluşturur.

Yeni çözeltideki şeker yüzdesi

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 50}{2\cdot 50}=\%50$$'dir.

d) Çözeltideki şeker derişimi

$$\%50-\%25=\%25$$

oranında artmıştır; bu beklenen bir durumdur, çünkü şeker miktarı artmış, su miktarı ise aynı kalmıştır.

Alıştırma 2

Okul laboratuvarında su yosunu hücrelerinin yapısı araştırılmaktadır. Bir örnekte 600 hücre vardır. Bunların $\frac{2}{3}$ 'ü yeşil su yosunu hücreleri, %20'si kırmızı su yosunu hücreleri ve geri kalanı diğer su yosunu türlerinin hücreleridir.
a) Kaç hücre yeşil su yosunlarındandır??
b) Kaç hücre kırmızı su yosunlarındandır??
c) Kaç hücre diğer su yosunu türlerindendir? Bunların sayısını toplam hücre sayısının kesri ve yüzdesi olarak ifade et.
d) Hangi su yosunu hücresi kategorisinin en fazla, hangisinin en az temsil edildiğini karşılaştır.
e) Kırmızı su yosunu hücrelerinin sayısı 30 hücre artarsa, kırmızı su yosunu hücrelerinin yüzdesi ne kadar değişir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Okul yemekhanesinde toplam 200 öğle yemeği porsiyonu hazırlanmaktadır. Porsiyonların $\frac{3}{8}$'i vejetaryenler için, porsiyonların %30'u glutensizdir ve vejetaryen değildir, geri kalanı ise normal porsiyonlardır.

a) Vejetaryenler için kaç porsiyon vardır? b) Kaç porsiyon glutensizdir?
c) Kaç porsiyon normaldir? Bunların sayısını toplam porsiyon sayısının kesri ve yüzdesi olarak ifade et.
d) Hangi porsiyon türü en fazla, hangisi en az temsil edilmektedir?
e) 20 normal porsiyon daha hazırlanırsa, normal porsiyonların yüzdesi nasıl değişir?

2. Bir mağazada Petar üç ürün satın almıştır. Birincisi %15 indirimle 1 200 denar, ikincisi %20 indirimle 850 denar ve üçüncüsü %10 indirimle 600 denardır.

a) İndirimden sonra Petar'ın her ürün için ne kadar ödeyeceğini hesapla.
b) İndirimlerden sonra toplam kaç denar tasarruf eder?
c) İndirimden sonra her ürünün toplam fiyat içindeki payını yüzde olarak ifade et.

3. Bir okulda 240 öğrenci vardır ve öğrenciler proje için gruplara ayrılır. Öğrencilerin $\frac{1}{3}$'ü çevre araştırması grubunda, %25'i bilişim grubunda ve geri kalanı fizik grubundadır.

a) Her grupta kaç öğrenci vardır?
b) Her gruptaki öğrenci sayısını toplam öğrenci sayısının yüzdesi olarak ifade et.
c) Grupları karşılaştır ve hangisinde en çok, hangisinde en az öğrenci olduğunu belirle.

4. Kimya deneyinde bir çözelti yapılmaktadır. 750 ml suda 90 g şeker çözülmüştür. Sonra 60 g şeker daha eklenmiştir.

a) Eklemeden önce çözeltideki şeker yüzdesini hesapla.
b) Eklemeden sonra yeni şeker yüzdesini hesapla.
c) Şeker artışını, başlangıç çözeltisinin bir kısmı olarak kesirle ifade et.

5. Bir spor kulübünde 180 malzeme satın alınmaktadır. $\frac{2}{5}$'i futbol topu, %30'u basketbol topu ve geri kalanı tenis raketidir.

a) Her kategoriden kaç malzeme vardır?
b) Malzeme sayısını toplam malzeme sayısının kesri ve yüzdesi olarak ifade et.
c) 10 futbol topu satılırsa, bu futbol toplarının yüzdesini nasıl etkiler?

6. Bir gölde yapılan araştırmada 600 balık vardır. $\frac{1}{4}$'ü klarki, 150'si sazan ve geri kalanları diğer balık türlerindendir.

a) Diğer türlerden kaç balık vardır? Diğer balık türlerinin tüm balıklara göre payını kesirle ifade et.
b) Her kategorideki balık sayısını yüzde olarak ifade et.
c) Gölde en fazla hangi balık kategorisi bulunmaktadır? Klarkiler mi yoksa sazanlar mı daha fazladır?

Kodu tara ve alıştırmaları çöz.

9. YÜZDELERİN UYGULANMASI

Etkinlik

Bir mağazada şu ürünler satılmaktadır: ütü 1200 denar, televizyon 32000 denar, dizüstü bilgisayar 78000 denar ve mikrodalga fırın 4000 denar. Bu fiyatlar %20 artmıştır.
a) Her ürünün fiyatı kaç denar artmıştır?
b) Artıştan sonra her ürünün fiyatı ne kadardır?

Örnek 1

Bir alışveriş merkezinde bir ceketin fiyatı 3600 denardır. Önce kampanya nedeniyle %25 indirilmiş, sonra yeni fiyat KDV eklenmesi nedeniyle %10 artırılmıştır.
a) İndirimden sonra ceket kaç denar olur?
b) Daha önce indirilmiş fiyatın artırılmasından sonra kaç denar olur?
c) Mila'nın 3000 denarı varsa, ceketi satın alabilir mi? Cevabını açıkla.

a) Ceketin indirimi, 3600 denarın %25'idir ve

$$\%25 \cdot 3600 = \frac{25}{100} \cdot 3600 = 900 \text{ denar eder.}$$

Ceketin yeni fiyatı $3600 - 900 = 2700$ denardır.

Ceketin yeni fiyatına, ceket fiyatının $\%100 - \%25 = \%75$'ini hesaplayarak da ulaşabiliriz:

$$\%75 \cdot 3600 = \frac{75}{100} \cdot 3600 = 2700 \text{ denar.}$$

b) KDV eklenmesi nedeniyle yeni fiyatın %10 artırılması, 2700'ün %10'udur ve

$$\%10 \cdot 2700 = \frac{10}{100} \cdot 2700 = 2700 \text{ denar eder.}$$

KDV dâhil ceketin fiyatı $2700 + 270 = 2970$ denardır.

c) Mila'nın 3000 denarı vardır. Çünkü

$3000 - 2970 = 30$ denar,

Mila ceketi satın alabilecek ve geriye 30 denarı kalacaktır.

Alıştırma 1

Petrovi ailesi, ocak ayında 4800 denarlık elektrik faturası ödemiştir. Şubat ayında tasarruf nedeniyle tüketim %15 azalmıştır, ancak elektrik fiyatının artması nedeniyle mart ayı faturası %20 artmıştır.
a) Şubat ayı faturası ne kadardır?
b) Mart ayı faturası ne kadardır (artıştan sonra)?
c) Mart ayı faturası, ocak ayı faturasıyla karşılaştırıldığında kaç denar daha fazladır?

Örnek 2

Bir laboratuvar kabında 500 g su bulunmaktadır. Isıtma nedeniyle deney sırasında suyun %12'si buharlaşmıştır. Daha sonra kaba 100 g tuz eklenir ve çözünene kadar karıştırılır.
a) Buharlaşmadan sonra suyun yeni kütlesi ne kadardır?
b) Tuz eklendikten sonra çözeltinin toplam kütlesi ne kadardır?

a) Buharlaşan suyun kütlesi 500'ün %12'sidir ve

$$\%12 \cdot 500 = \frac{12}{100} \cdot 500 = 60 \text{ gram eder.}$$

Suyun yeni kütlesi $500 - 60 = 440$ gramdır.

b) Çözeltinin toplam kütlesi

$$440 \text{ g (su)} + 100 \text{ g (tuz)} = 540 \text{ g'dir.}$$

Alıştırma 2



Bir Petri kabında başlangıçta 250 000 bakteri bulunan bir bakteri kolonisi yetiştirilmektedir. 6 saat sonra bakteri sayısı %40 artmıştır. Ek 6 saatten sonra bakteri sayısı ayrıca %25 daha artar.
a) İlk 6 saatten sonra bakteri sayısı kaçtır?
b) Toplam 12 saatten sonra bakteri sayısı kaçtır?
c) Koloni, başlangıçtaki sayıya göre toplam yüzde kaç artmıştır?

ALIŞTIRMA SORULARI

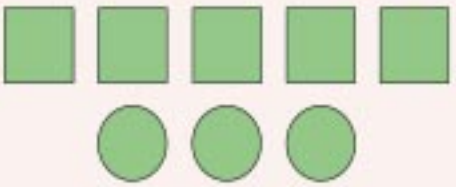
1. Bir mağazada dizüstü bilgisayarın fiyatı 48 000 denardır. Kampanya döneminde önce %15 indirilmiş, sonra yeni fiyat üzerinden ek olarak %10 daha indirilmiştir.
   a) Dizüstü bilgisayarın son fiyatı ne kadardır?
   b) İndirim, basitçe %25 indirimle aynı mıdır?
2. Bir akvaryumda 120 balık vardı. Birkaç ay sonra balık sayısı %35 arttı. Sonra yeni balık sayısının %20'si yetersiz oksijen nedeniyle öldü. Sonunda akvaryumda kaç balık kaldı?
3. Bir gölün su hacmi 50 000 000 m^3'tür. Kuraklık sırasında su seviyesi %12 azalır. Ertesi yıl yağışlar, su miktarını yeni hacmin %8'i kadar artırır. Bu değişikliklerden sonra gölün hacmi ne kadardır?
4. Laboratuvarda 800 g su ve 200 g tuz ile bir çözelti hazırlanır. Sonra suyun %10'u buharlaşır. Buharlaşmadan sonra çözeltinin yeni kütlesi ne kadardır ve tuzun yüzde derişimi kaçtır?
5. Bir USB'nin kapasitesi 64 GB'tır. Üzerinde alanın %75'ini kaplayan dosyalar saklanmıştır. Öğrenci, yer açmak için bu verilerin %20'sini silmiştir. Silme işleminden sonra kaç GB bellek boş kalır?
6. Bir ürünün fiyatı önce %10 artar, sonra %10 azalırsa, son fiyat başlangıç fiyatıyla aynı olur mu? Cevabını açıkla.

10. ORAN

Oranı Sadeleştirme

Etkinlik

Çizim 1'e göre aşağıdakilerin bölümünü yaz:
a) daire sayısının kare sayısına,
b) kare sayısının daire sayısına.
Yazdığın bölümler nasıl adlandırılır ve neyi gösterir?



çiz. 1

Aynı türden iki büyüklüğün, aynı ölçü biriminde ölçülen ölçü sayılarının $a : b$ bölümü, bu iki büyüklüğün **oranı** olarak adlandırılır.
a ve b sayıları oranın **terimleri** olarak adlandırılır. $a : b$ yazılışını "a'nın b'ye oranı" şeklinde okuruz.

Örnek 1

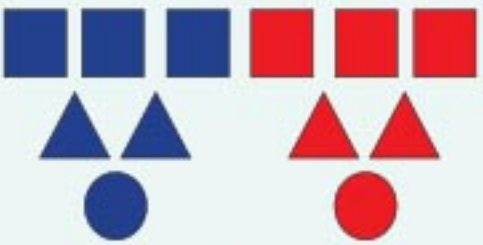
Verilen oranları kısaltılmış olarak tek bir oran şeklinde yaz.
a) 4 : 9 ve 9 : 5, b) 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 ve 8 : 3.

a) 4 : 9 ve 9 : 5 oranlarından, yine oran olarak adlandırdığımız 4 : 9 : 5 kısaltılmış yazımı elde edilir. Bu oran üç terimden oluşur ve "4'ün 9'a, 9'un 5'e oranı" şeklinde okunur.
b) 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 ve 8 : 3 oranlarıyla, beş terimi olan 7 : 2 : 9 : 8 : 3 oranı belirlenir.

Örnek 2

Çizim 2'ye göre aşağıdakilerin oranını yaz:
a) üçgenlerin karelere oranı,
b) dairelerin üçgenlere ve karelere oranı.

a) Üçgenlerin karelere oranı 4 : 6'dır.
Bu, **her 4 üçgene karşılık 6 kare** olduğu anlamına gelir.
Her 2 üçgene karşılık 3 kare olduğunu görebiliriz, bu nedenle 4 : 6 oranı 2 : 3 oranına **sadeleştirilebilir**. İki oranın aynı ilişkiyi belirlediği anlamında 4 : 6 = 2 : 3 şeklinde yazarız.



çiz. 2

4 : 6 oranından, her bir terimi
EBOB (4, 6) = 2'ye bölündüğünde 2 : 3 oranı elde edilir.
2 : 3 oranının terimleri aralarında asal doğal sayılardır, yani
EBOB (2, 3) = 1'dir ve bu oran daha fazla sadeleştirilemez.

b) Dairelerin üçgenlere ve karelere oranı 2 : 4 : 6'dır.
Yani **her 2 daireye karşılık 4 üçgen ve her 4 üçgene karşılık 6 kare** vardır.
Her 1 daireye karşılık 2 üçgen ve her 2 üçgene karşılık 3 kare olduğunu görebiliriz, bu nedenle 2 : 4 : 6 oranı 1 : 2 : 3 oranına sadeleştirilebilir.
İki oranın aynı ilişkiyi belirlediği anlamında 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3 şeklinde yazarız.

2 : 4 : 6 oranından, her bir terimi EBOB (2, 4, 6) = 2'ye bölündüğünde 1 : 2 : 3 oranı elde edilir. 1 : 2 : 3 oranı için EBOB (1, 2, 3) = 1 geçerlidir ve bu oran daha fazla sadeleştirilemez.

Örnek 3

Oranı sadeleştir:

a) 3 : 18 : 6 : 30, b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$, c) 1,25 : 0,5 : 2,75, d) %45 : %52 : %17, e) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm.

a) 3 : 18 : 6 : 30 = 1 : 6 : 2 : 10 — Her terimi EBOB (3, 18, 6, 30) = 3'e böleriz.

b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \left(12 \cdot \frac{1}{2}\right) : \left(12 \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(12 \cdot \frac{3}{4}\right)$
$= 6 : 8 : 9$ — Her terimi EKOK (2, 3, 4) = 12 ile çarparız.

c) 1,25 : 0,5 : 2,75 = 125 : 50 : 275
$= 5 : 2 : 11$ — Her terimi 100 ile çarparız (ondalık basamağı en fazla olan ondalık sayının sahip olduğu ondalık basamak sayısı kadar sıfırı olan onluk birimle).

d) %45 : %52 : %17 $= \frac{45}{100} : \frac{52}{100} : \frac{17}{100}$
$= 45 : 52 : 17$ — Yüzdeleri kesirle yazarız.

e) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm = 25 cm : 10 cm : 3 cm
$= 25 : 10 : 3$ — Uzunlukları **aynı birimde** ifade ederiz.

Alıştırma 1

Oranı sadeleştir: a) %36 : 0,6 : 6, b) 0,5 kg : 250 g : 1,25 kg.

Alıştırma 2

Komşular Açe ve Mirsad, çitlerini boyamak için mavi, sarı ve beyaz boya karıştırmışlardır.

Açe şunları karıştırmıştır: 2,4 l mavi, 4 l sarı ve 1,6 l beyaz boya.
Mirsad şunları karıştırmıştır: 1,8 l mavi, 3 l sarı ve 1,2 l beyaz boya.

Aynı miktarda karıştırılmış boya elde ettiler mi? Aynı yeşil renk tonunu elde ettiler mi?
Yönerge: Açe ve Mirsad'ın boyaları hangi oranlarda karıştırdığını yaz, sonra bu oranları sadeleştir.

Bir Miktarı Verilen Oranda Bölme

Bir miktar, verilen bir oranda iki veya daha fazla parçaya bölündüğünde, her parçanın ne kadar olduğunu bulabiliriz.

Etkinlik

Arkadaşlar İva ve Mariya, doğum günü pastasını 2 : 3 oranında paylaşmışlardır.
a) İva 2 parça aldıysa, Mariya kaç parça almıştır?
b) Pasta arkadaşlar arasında paylaştırılmak için kaç eşit parçaya kesilmiştir?



Örnek 1

250 denarlık bir miktar, Luka, İlina ve Sead arasında 3 : 5 : 2 oranında paylaştırılmıştır. Her biri kaç denar almıştır?

Luka'nın aldığı her 3 parçaya karşılık, İlina 5 parça, Sead ise 2 parça alır. Toplam

$3 + 5 + 2 = 10$ parça vardır.

1 parçanın değerini bulmak için 250 denarlık miktarı 10'a böleriz:

$250 : 10 = 25$ denar.

Bir parçanın değeri 25 denardır.
Luka $3 \cdot 25 = 75$ denar, İlina $5 \cdot 25 = 125$ denar, Sead ise

$2 \cdot 25 = 50$ denar almıştır.

Alıştırma 1

Böl: a) 48 şekeri 1 : 2 : 3 oranında, b) 440 metreyi 6 : 3 : 1 oranında.

Örnek 2

140 km uzunluğundaki bir otoyol, 2 : 5 : 3 : 4 oranında kesimlere ayrılmıştır. Her kesim kaç kilometre uzunluğundadır?

Birinci kesim 2 parçadan, ikinci kesim 5 parçadan, üçüncü kesim 3 parçadan ve dördüncü kesim 4 parçadan oluşur. Toplam

$2 + 5 + 3 + 4 = 14$ parça vardır.

1 parçanın uzunluğunu bulmak için 140 km'lik otoyol uzunluğunu 14'e böleriz:

$140 : 14 = 10$ km.

Bir parçanın uzunluğu 10 km'dir. Buna göre: birinci kesim $2 \cdot 10 = 20$ km uzunluğunda, ikinci kesim $5 \cdot 10 = 50$ km uzunluğunda, üçüncü kesim $3 \cdot 10 = 30$ km uzunluğunda ve dördüncü kesim $4 \cdot 10 = 40$ km uzunluğundadır.

Alıştırma 2

Bir basketbol maçında *A* takımı, *B* takımını 72 : 48 sonuçla yenmiştir.
Oyuncu başına atılan sayıların sayısı tabloda verilmiştir:

A takımı

oyuncu	atılan sayıların sayısı
Mirko	8
Senad	16
Filip	22
Mensur	18
İvan	8

B takımı

oyuncu	atılan sayıların sayısı
Besim	6
Savo	18
Fatmir	4
İliya	12
Mario	8

Organizatör şunları paylaştırmıştır:

a) Takımlara, atılan sayıların sayısına göre 20 spor ekipmanı kuponu.
Her takım kaç kupon aldı?

b) Oyunculara, attıkları sayıların sayısına göre spor etkinliklerine katılım için 60 kupon.
Her oyuncu kaç kupon aldı?

Örnek 3

Atletler Boris, Ana ve Halil atletizm pistinde tur koşmuşlardır. Boris'in tur sayısının Ana'nın tur sayısına ve Halil'in tur sayısına oranı 2 : 3 : 4'tür.
Boris'in 24 tur koştuğu bilinmektedir.
Ana kaç tur, Halil kaç tur koşmuştur? Atletler birlikte kaç tur koşmuşlardır?

Boris 24 tur koşmuştur ve bu, koşulan toplam turların 2 parçasını temsil eder.
Buna göre koşulan turların 1 parçası 12 turdur.
Ana $3 \cdot 12 = 36$ tur, Halil ise $4 \cdot 12 = 48$ tur koşmuştur.
Atletler birlikte $24 + 36 + 48 = 108$ tur koşmuşlardır.

Alıştırma 3

Lara, un, şeker ve meyve oranı 8 : 4 : 2 olan bir kek yapmıştır.

Lina'nın 400 g unu vardır ve aynı lezzette bir kek hazırlamak istemektedir.

Lina kendi keki için kaç gram şeker kullanmalıdır? Kaç gram meyve kullanmalıdır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Oranı sadeleştir:

a) 96 : 60 : 120 : 36, b) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} : \frac{1}{6} : \frac{7}{8}$, c) 1,6 : 6,4 : 4 : 2,4.

2. Oranı sadeleştir:

   a) 1800 g : 3 kg : 60 dag, b) 450 mm : 75 cm : 1,5 m : 1 m, c) 3 km : 150 m : 450 m,

   d) 25 cm : 1 m : 1,5 dm, e) 120 dakika : 4 saat : 2,5 saat, f) 900 ml : 4,5 l : 13,5 dl.

3. Bir süs şeridi üç parçadan oluşmaktadır. Birinci parçanın uzunluğu 1,2 m, ikinci parçanın uzunluğu 80 cm ve üçüncü parçanın uzunluğu 450 mm'dir. Süs şeridinin parçalarının uzunluklarına karşılık gelen oranı yaz ve sadeleştir.

4. Verilen oranda paylaştır:

   a) 780 kg'ı 2 : 7 : 4 oranında, b) 2520 m'yi 5 : 8 : 7 oranında,

   c) 3600 h'yi 2 : 8 : 5 : 3 oranında, d) 680 denarı 8 : 3 : 2 : 4 oranında.

5. Bir üçgenin iç açıları 4 : 3 : 5 oranındadır. Üçgenin iç açılarının ölçülerini hesapla.

6. Mersiha, Ece ve Tea kiralık bir dairede yaşamaktadır. Onlar, oda büyüklüklerine uygun olarak kirayı 1 : 2 : 2 oranında paylaşmaktadır. Toplam kira aylık 16 200 denardır. Her biri ne kadar kira ödemelidir?

7. Bir okulda dört kulüp vardır: edebiyat (e), matematik (m), bilişim (b) ve spor (s). Matematik kulübünde, edebiyat kulübündekinin iki katı kadar öğrenci vardır. Bilişim kulübünde, matematik kulübündekinin beş katı kadar öğrenci vardır.
   Bilişim kulübündeki öğrenci sayısı, spor kulübündeki üye sayısının yarısıdır. Her öğrenci en fazla bir kulübe üye olabilir.

   a) $e : m : b : s$ oranını yaz.

   b) Kulüplere toplam 132 öğrenci üye ise, her kulüpte kaç öğrenci vardır?

   Yönerge: Edebiyat kulübündeki öğrenci sayısını x ile göster, sonra diğer kulüplerin her birindeki öğrenci sayısını x cinsinden ifade et.

8. Öğrenciler Duşko, Maksim ve Mariya kazandıkları parayı sırasıyla 3 : 4 : 5 oranında paylaşmışlardır. Duşko 4500 denar almıştır. Maksim ve Mariya kaçar denar almıştır? Öğrencilerin kazandığı toplam miktar ne kadardır?

Araştırma

Amira, Boban ve Kalina'nın sahip oldukları para miktarı sırasıyla 6 : 5 : 4 oranındaydı. Kızlardan biri Boban'a 20 denar ödünç verdikten sonra para miktarları 5 : 6 : 4 oranında oldu.

a) Ödünç verme işleminden önce her birinin ne kadar parası vardı?

b) Kalina'nın Boban'a ödünç vermiş olması mümkün müdür? Cevabını gerekçelendir.

11. ORANTILI BÜYÜKLÜKLER

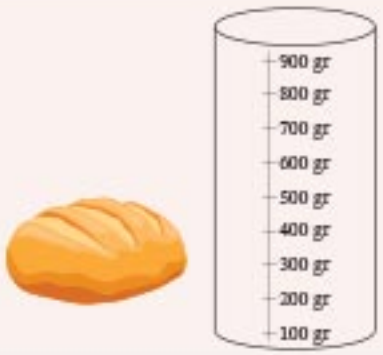
Doğru Orantılı Büyüklükler

Etkinlik

3 ekmek hazırlamak için fırıncı 720 gram un kullanmıştır.

a) 6 ekmek için ne kadar una ihtiyacı olur, 9 ekmek için ne kadar una ihtiyacı olur?

b) Ekmek sayısı arttıkça gerekli un miktarı nasıl değişir, ekmek sayısı azaldıkça nasıl değişir?



İki büyüklükten biri arttığında diğer büyüklük de aynı oranda artıyorsa, bu iki büyüklüğe **doğru orantılı** büyüklükler denir.

Başka bir deyişle, iki büyüklük doğru orantılıdır; eğer bir büyüklük kaç kat artarsa diğer büyüklük de o kadar kat artar, yani bir büyüklük kaç kat azalırsa diğer büyüklük de o kadar kat azalır.

Örnek 1

İki defter 160 denardır.

a) Üç kat daha fazla defter alırsak, kaç para öderiz?

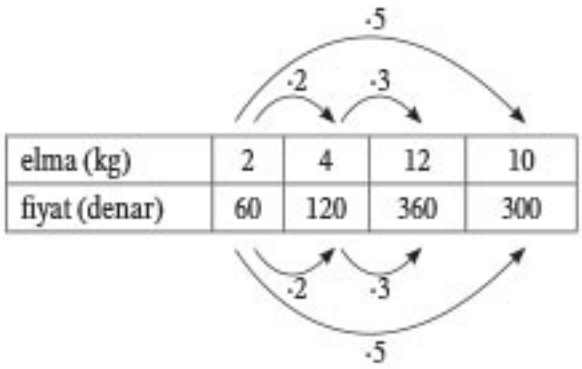
b) Defter sayısı ile defterler için ödememiz gereken para büyüklükleri arasındaki ilişki nasıldır?

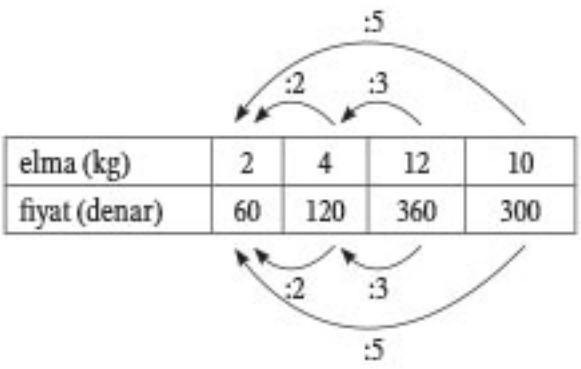
a) Üç kat daha fazla defter alırsak üç kat daha fazla öderiz. Üç kat daha fazla defter, 6 defterdir. Bunlar için üç kat daha fazla, yani

$$3 \cdot 160 = 480 \text{ denar öderiz.}$$

b) Defter sayısı ile defterler için ödememiz gereken para büyüklükleri doğru orantılıdır, çünkü bir büyüklük arttığında diğer büyüklük de aynı oranda artar.

Tablolarda, satın alınan elma miktarı kilogram cinsinden verilmiştir; satın alınan elma miktarı için ödememiz gereken tutar ise denar cinsinden ifade edilmiştir.



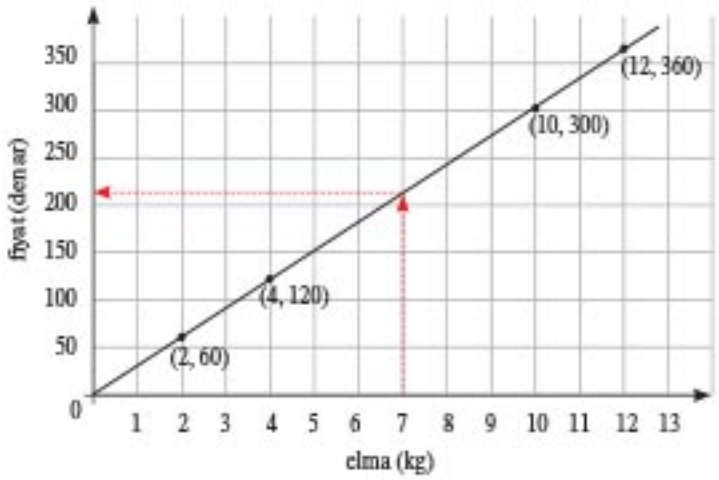


Satın alınan elma miktarı ile elmaların toplam fiyatı doğru orantılı büyüklüklerdir.

Ödememiz gereken para miktarı ile satın alınan elma miktarının karşılık gelen bölümlerinin

$$60 : 2 = 120 : 4 = 360 : 12 = 30$$

her zaman aynı sayı olduğunu fark edelim. Bu sayı, bir kilogram elmanın fiyatını belirler.
Elde edilen değerleri koordinat düzleminde noktalar olarak gösterirsek (çiz. 1), **koordinat başlangıcından geçen bir doğru** elde ederiz.



çiz. 1

Bizim örneğimizde yalnızca negatif olmayan büyüklükler vardır. Bu nedenle grafik, başlangıcı koordinat başlangıcında olan bir yarı doğrudur.
Tablo veya grafik yardımıyla, bunlarda gösterilmeyen değerleri de hesaplayabiliriz.

Tabloya göre şunu hesaplayabiliriz:

510 denar ile $510 : 30 = 17$ kg elma alırız, veya
17 kg elma için $17 \cdot 30 = 510$ denar ödememiz gerekir.

Grafikten şunu bulabiliriz:

7 kg elma için 210 denar ödememiz gerekir, veya
210 denar ile 7 kg elma alırız.

Örnek 2

Eğer 3 kg avokado 810 denar ise, 7 kg avokado kaç denar eder?

Eğer 3 kg avokado 810 denar ise, şunu hesaplayabiliriz:

1 kg avokado $810 : 3 = 270$ denardır,

7 kg avokado $7 \cdot 270 = 1890$ denar eder.

Alıştırma 1

Lindita 15 dakikada yürüyerek 1 km yol alır. Aşağıdaki sürelerde kaç kilometre yol alır:
a) 1 s, b) 2,5 s?

Örnek 3

$3\ m^2$ duvarı yeşil renge boyamak için 600 ml sarı ve 21 ml mavi boya gereklidir.
a) Duvarın $12\ m^2$'sini boyamak için her boyadan kaç mililitre gereklidir?
b) 0,828 l yeşil boya ile kaç metrekare boyanabilir?

a) Eğer $3\ m^2$ duvarı yeşil renge boyamak için 600 ml sarı boya ve 21 ml mavi boya gerekiyorsa, $12\ m^2$ için

$4 \cdot 600 = 2\,400$ ml sarı boya ve $4 \cdot 21 = 84$ ml mavi boya gerekecektir.

b) Eğer $3\ m^2$ duvarı yeşil renge boyamak için 600 ml sarı boya ve 21 ml mavi boya gerekiyorsa, $1\ m^2$ için

$600 : 3 = 200$ ml sarı boya ve $21 : 3 = 7$ ml mavi boya gerekecektir.

207 ml = 0,207 l yeşil boya ile $1\ m^2$ boyanabilir. $0,828 : 0,207 = 4$ olduğundan, 0,828 l yeşil boya ile $4\ m^2$ boyanabileceği sonucuna varırız.

Alıştırma 2

Terzi Emin 4 takım elbiseyi 16 günde diker.
a) 12 takım elbise dikmek için kaç güne ihtiyacı olur?
b) 64 günde kaç takım elbise diker?

Ters Orantılı Büyüklükler

Etkinlik

Bir okulda sekizinci sınıftan toplam 36 öğrenci vardır. Onlar geziye gitmek istiyor ve otobüs kiralamaları gerekiyor. Günlük otobüs kiralama ücretinin 36 000 denar olduğu bir teklifte karar kılmışlardır.
Hepsi geziye giderse, öğrenci başına ulaşım ücreti ne kadar olur? Eğer 12 çocuk geziye gidemezse, öğrenci başına ulaşım ücreti azalır mı yoksa artar mı?

İki büyüklükten biri arttığında diğer büyüklük aynı oranda azalıyorsa, bu iki büyüklüğe **ters orantılı büyüklükler** denir.

Başka bir deyişle, iki büyüklük ters orantılıdır; eğer bir büyüklük kaç kat artarsa diğer büyüklük o kadar kat azalır, yani bir büyüklük kaç kat azalırsa diğer büyüklük o kadar kat artar.

Örnek 4

İzciler, kamplarına 10 küçük kütük getirmelidir.

a) Görev için daha fazla izci gönüllü olursa, her izci daha çok mu yoksa daha az mı kütük taşır?

b) Görev için daha az izci gönüllü olursa, her izci kampa daha çok mu yoksa daha az mı kütük taşır?

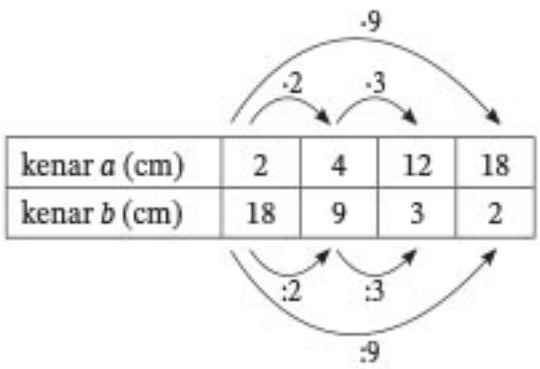
c) İzci sayısı, taşıyacakları kütük sayısı ile ters orantılı mıdır?

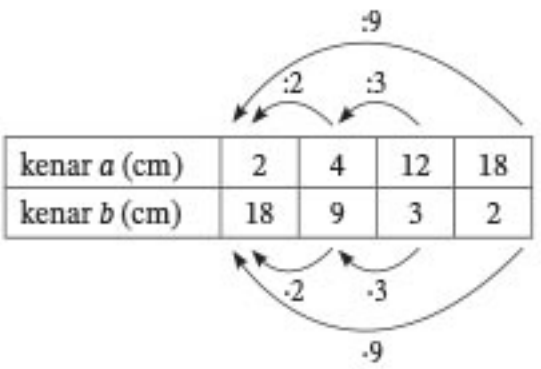
a) Göreve daha fazla izci gönüllü olursa, her biri daha az sayıda kütük taşır.

b) Göreve daha az izci gönüllü olursa, her izci daha fazla kütük taşır.

c) İzci sayısı ile izci başına düşen kütük sayısı ters orantılı büyüklüklerdir.

Tablolarda, alanı 36 cm² olan birkaç dikdörtgenin *a* ve *b* kenar uzunlukları santimetre cinsinden verilmiştir.





Bir kenar kaç kat azalırsa, diğer kenar o kadar kat artar ve tersi de geçerlidir; alan ise değişmeden kalır. Karşılık gelen çarpımlar

$$2 \cdot 18 = 4 \cdot 9 = 12 \cdot 3 = 18 \cdot 2 = 36,$$

her zaman dikdörtgenin alanını verir.

Tablo yardımıyla, tabloda gösterilmeyen değerler için *a* ve *b* kenarlarının uzunluklarını hesaplayabiliriz:

a kenarının uzunluğu 9 cm ise, *b* kenarının uzunluğu 36 : 9 = 4 cm'dir, veya

b kenarının uzunluğu 4 cm ise, *a* kenarının uzunluğu 36 : 4 = 9 cm'dir.

Örnek 5

24 işçi bir işi 16 günde yapıyorsa, aynı işi kaç günde yaparlar:
a) 6 işçi, b) 48 işçi?

a) 6 işçi, 4 kat daha az işçidir. Onlar işi 4 kat daha fazla günde yaparlar:

$4 \cdot 16 = 64$ gün.

b) 48 işçi, 2 kat daha fazla işçidir; bu nedenle işi 2 kat daha az günde yaparlar:

$16 : 2 = 8$ gün.

$24 \cdot 16 = 6 \cdot 64 = 48 \cdot 8 = 384$ olduğuna dikkat et.

Alıştırma 3

2 *l*'lik bir su kovası, bir şişe ile 60 saniyede doldurulmaktadır.
Kova aynı anda şu şekilde doldurulursa ne kadar süre gerekir:
a) iki şişe ile, b) üç şişe ile?

Örnek 6

Bir terası döşemek için alanı 30 cm^2 olan 80 fayans gereklidir. Alanı 25 cm^2 olan fayanslarla terası döşemek için kaç fayans gereklidir?

Terasın alanı $80 \cdot 30 = 2\,400$ cm^2'dir. Terası alanı 25 cm^2 olan fayanslarla döşemek için $2\,400 : 25 = 96$ tane 25 cm^2 alanlı fayans gereklidir.

Alıştırma 4

Daire ve ofis temizliği yapan iki şirket aynı reklam alanında reklam vermektedir. "Çisto" şirketi, kendi işçilerinden 4 kişinin bir daireyi 5 h'de temizleyebileceğini söylüyor; "Brzo" şirketi ise kendi işçilerinden 6 kişinin aynı daireyi 4 h'de temizleyebileceğini söylüyor. Dairenin eşit derecede temiz olacağı varsayılırsa, hangi şirket daha verimlidir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki büyüklüklerden hangileri doğru orantılıdır:
   a) Poğaça sayısı ile poğaçaları hazırlamak için kullanılan un miktarı?
   b) Arabanın hızı ile belirli bir mesafeyi almak için gereken süre?
   c) Belirli bir miktarı paylaşan erkek çocukların sayısı ile her erkek çocuğun alacağı miktar?
   d) Dondurma için ödediğimiz tutar ile bu tutara alabileceğimiz top sayısı?

2. Ekrem 100 m'yi 20 s sürede koşar.
   a) Aynı tempoyla koşarsa, 200 m, 300 m ve 400 m koşması için ne kadar zamana ihtiyacı olur?
   b) Pist uzunluğu ve koşma süresi için verilen ve elde edilen değerleri yazacağın bir tablo yap.
   c) Koşma süresinin pist uzunluğuna bağlılığını göstermek için grafiği çiz.
   d) Tablo ve grafiğe göre 30 s'de kaç metre koşacağını belirle.
3. Bir otomobil 355 km yol almak için 25 l yakıt tüketir. Otomobil 42 l yakıtla ne kadar yol alabilir?
4. Alanı 42 m^2 olan bir duvarı boyamak için 6 l boya gereklidir. 63 m^2 için kaç litre boya gereklidir?
5. Çiçekler için sıvı gübre şişesinin üzerinde, 10 l suya 20 ml gübre konulması gerektiği yazmaktadır.
   a) Gübrenin suya göre hangi oranda çözüldüğünü yaz.
   b) Zora ninenin çiçek sulama kovası 4 litre almaktadır. Zora nine sulama kovasına kaç mililitre gübre koymalıdır?
6. Aşağıdaki büyüklüklerden hangileri doğru orantılı, hangileri ters orantılıdır:
   a) İşçi sayısı ile onların belirli bir işi yaptıkları süre?
   b) Malın fiyatı ile belirli bir tutara satın alınabilecek mal miktarı?
   c) Alanı 1 cm^2 olan bir dikdörtgenin kenar uzunlukları?
7. a) x ve y büyüklükleri ters orantılı ise, tabloyu defterine geçir ve doldur:

x	1	2	3	4
y		6		

   b) Tabloya göre y = 1 için x'in karşılık gelen değerini belirle.
8. Bir tüp, aynı akış hızında tıbbi oksijen deposunu 50 dakikada doldurur. Depoyu doldurmak için ne kadar süre gereklidir:
   a) 2 tüple, b) 5 tüple, c) 10 tüple?
9. Ebeveynler mutfak için fayans satın almaktadır. Kenarı 50 cm olan kare fayanslar alırlarsa, 36 fayansa ihtiyaçları olacaktır. Anne, yine kare olan fakat kenarı 30 cm olan daha küçük fayansları tercih etmektedir.
   a) Küçük fayanslardan kaç parça gerekecektir?
   b) Büyük fayanslar parça başına 70 denar, küçük fayanslar ise parça başına 30 denar ise, hangi fayanslar için daha fazla ödeme yaparlar?

10. Proje görevi

Doğru orantılı ve ters orantılı bağıntıları kullanarak matematiğin doğa bilimlerindeki uygulamasını göreceksin.

1. Biyoloji

   Kalp atış sayını (bilekten veya boyundan) 10 s, 30 s ve 60 s boyunca ölç.

   a) Kalp atış sayısı, ölçme süresine nasıl bağlıdır?

   b) Bir tablo oluştur ve kalp atış sayısının ölçme süresine bağlılığının grafiğini çiz.

   c) Grafiğe göre 120 s'de kalp atış sayısının kaç olduğunu belirle.

2. Coğrafya

   Bir konum seç. Üç farklı zaman diliminde (örneğin saat 10'da, 11'de ve 12'de), tam 30 yaya geçene kadar geçen süreyi ölç. Sonra yaya akışını hesapla (30'un, 30 yayanın geçtiği süreye bölümü).

   a) Sürenin yaya akışına bağlılığı nasıldır, doğru orantılı mı yoksa ters orantılı mı?

   b) Sürenin yaya akışına bağlılığına ait bir tablo oluştur.

   c) Tabloya göre, yaya akışı dakikada 12 yaya ise 30 yayanın kaç dakikada geçeceğini belirle.

3. Fizik

   Okul bahçende üç parkur seç. Aynı hızla hareket ederek, her parkurun uzunluğunu ve her parkuru geçmen için gereken süreyi ölç.

   a) Aynı hızla hareket edersen, sürenin parkurun uzunluğuna bağlılığı nasıldır?

   b) Sürenin parkur uzunluğuna bağlılığına ait bir tablo oluştur ve grafiğini çiz.

   c) Grafiğe göre 20 m uzunluğundaki bir parkuru geçmen için ne kadar süre gerekeceğini belirle.

4. Kimya

   İki bardağı sırasıyla 100 ml ve 300 ml su ile doldur. Ardından her bardağa bir üzüm tanesi koy ve üzüm tanesi yüzeye çıkana kadar yarımşar çay kaşığı tuz ekleyip karıştır.
   Her bardağa ne kadar tuz eklediğini yaz.

   a) Eklenen tuz miktarının su miktarına bağlılığı nasıldır?

   b) Eklenen tuz miktarının su miktarına bağlılığına ait bir tablo oluştur ve grafiğini çiz.

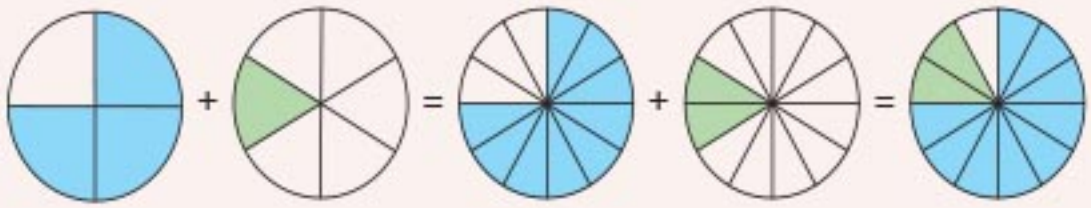
   c) Grafiğe göre üzüm tanesinin yüzeye çıkması için 400 ml suya ne kadar tuz eklemen gerektiğini belirle.

12. RASYONEL SAYILARI TOPLAMA VE ÇIKARMA

Rasyonel Sayıları Toplama

Etkinlik

Bir bisikletçi ilk saatte parkurun $\frac{3}{4}$ 'ünü, ikinci saatte ise parkurun $\frac{1}{6}$ 'sını geçmiştir. Bisikletçinin 2 saat içinde parkurun ne kadarını geçtiğini hesaplamak için, çizim 1'deki boyalı kısımlara karşılık gelen kesirli ifadeleri yaz.



çiz. 1

Bisikletçinin 2 saat içinde parkurun geçtiği kısmını hangi adımlarla hesapladığını açıkla.

Kodu tara ve kesirlerin nasıl toplandığını hatırla.

Örnek 1

Rasyonel sayıların toplamını hesapla: a) $\frac{2}{5}$ ve $\frac{-4}{5}$, b) $\frac{5}{6}$ ve $\frac{-3}{8}$.

a) Rasyonel sayılar, paydaları eşit kesirlerdir:

$\frac{2}{5}+\frac{-4}{5}=\frac{2+(-4)}{5}=\frac{-2}{5}$.

Kesirlerin paylarının toplamını pay olarak yazarız, payda ise kesirlerin paydalarına eşittir.

b) Rasyonel sayılar, paydaları farklı kesirlerdir:

$\frac{5}{6}+\frac{-3}{8}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{(-3)\cdot 3}{8\cdot 3}$

EKOK (6, 8) = 24, 24 : 6 = 4, 24 : 8 = 3.

$=\frac{20}{24}+\frac{-9}{24}=\frac{20+(-9)}{24}=\frac{11}{24}$.

Kesirleri eşit paydalı kesirlere dönüştürürüz, sonra eşit paydalı kesirler gibi toplarız.

- **Paydaları eşit olan kesirlerde toplama işlemi** yapılırken paylar toplanıp sonucun payına yazılır, ortak payda ise sonucun paydası olarak kalır.
- **Paydaları eşit olmayan kesirlerde toplama işlemi** yapılırken önce paydalar eşitlenir, ardından paydaları eşit olan kesirlerdeki gibi toplama işlemi yapılır.

Örnek 2

Rasyonel sayıların toplamını hesapla: a) $-3\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{4}$, b) $-7{,}5$ ve $3{,}67$.

a) $-3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 1}{4\cdot 1}=$

$=\frac{-14}{4}+\frac{1}{4}=\frac{-14+1}{4}=\frac{-13}{4}=-3\frac{1}{4}$,

Karma sayıları bileşik kesir olarak yazarız.

b) $-7{,}5+3{,}67=\frac{-75}{10}+\frac{367}{100}=\frac{-75\cdot 10}{10\cdot 10}+\frac{367}{100}$

$=\frac{-750}{100}+\frac{367}{100}=\frac{-750+367}{100}=-3\frac{83}{100}$.

Ondalık sayıları ondalık kesir olarak yazarız.

Alıştırma 1

Hesapla: a) $\frac{4}{9}+\frac{-5}{12}$, b) $\frac{-3}{5}+\frac{-7}{15}$, c) $\frac{-10}{11}+2\frac{7}{10}$, d) $-0{,}54+(-8{,}8)$.

Alıştırma 2

Bir dalgıç deniz yüzeyinin 12,5 m altında bulunuyordu. Sonra $2\frac{3}{5}$ m yukarı çıktı.

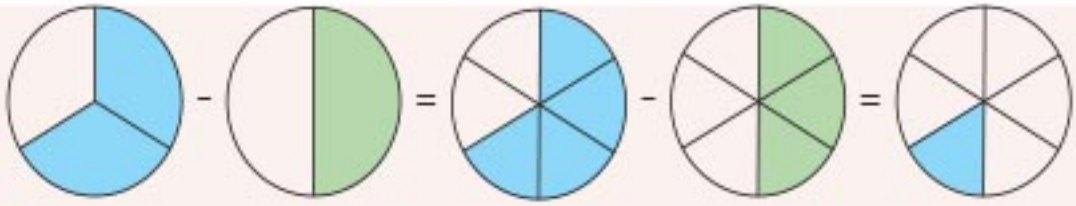
a) Dalgıç hangi derinlikte bulunmuştur?

b) Deniz yüzeyine daha yakın mı yoksa daha uzak mı olmuştur?

Rasyonel Sayıları Çıkarma

Etkinlik

Marangoz Besim, $\frac{2}{3}$ m uzunluğundaki bir tahtadan $\frac{1}{2}$ m uzunluğunda bir parça kesmiştir. Tahtadan geriye ne kadar kaldığını hesaplamak için, çizim 2'deki boyalı kısımlara karşılık gelen kesirli ifadeleri yaz.



çiz. 2

Örnek 3

Farkı hesapla: a) $\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}$, b) $\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}$.

a) Rasyonel sayılar, paydaları eşit kesirlerdir:

$\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{-3-2}{7}=\frac{-5}{7}$.

Payların farkı, sırasıyla sonuç kesrinin payı olarak yazılır; payda ise kesirlerin ortak paydası olarak kalır.

b) Rasyonel sayılar, paydaları farklı kesirlerdir:

$\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}=\frac{-3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}$

EKOK (8, 6) = 24, 24 : 8 = 3, 24 : 6 = 4.

$=\frac{-9}{24}-\frac{20}{24}=\frac{-9-20}{24}=\frac{-29}{24}=-1\frac{5}{24}$.

Kesirleri eşit paydalı kesirlere dönüştürürüz, sonra eşit paydalı kesirler gibi çıkarırız.

- **Paydaları eşit olan kesirlerde çıkarma işlemi** yapılırken eksilenin payından çıkanın payı çıkarılıp sonucun payına yazılır, ortak payda ise sonucun paydası olarak kalır.
- **Paydaları eşit olmayan kesirlerde çıkarma işlemi** yapılırken önce paydalar eşitlenir, ardından paydaları eşit olan kesirlerdeki gibi çıkarma işlemi yapılır.

Örnek 4

Farkı hesapla: a) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$, b) $-\frac{3}{5}-\frac{-4}{9}=$, c) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}=$, d) $-2{,}5-3{,}75$.

a) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11\cdot 3}{4\cdot 3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{33}{12}-\frac{4}{12}=\frac{33-4}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$,

b) $-\frac{3}{5}-\frac{-4}{9}=\frac{-3\cdot 9}{5\cdot 9}-\frac{-4\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{-27}{45}-\frac{-20}{45}=\frac{-27-(-20)}{45}=\frac{-7}{45}=-\frac{7}{45}$,

c) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}=\frac{-9}{4}-\frac{12}{7}=\frac{-9\cdot 7}{4\cdot 7}-\frac{-12\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{-63}{28}-\frac{-48}{28}=\frac{-63-(-48)}{28}=\frac{-15}{28}=-1\frac{11}{28}$,

d) $-2{,}5-3{,}75=\frac{-25}{10}-\frac{375}{100}=\frac{-25\cdot 10}{10\cdot 10}-\frac{375}{100}=\frac{-250-375}{100}=\frac{-625}{100}=\frac{-25}{4}=-6\frac{1}{4}$.

Alıştırma 3

Hesapla: a) $\frac{7}{16}-\frac{-5}{12}$, b) $\frac{-8}{15}-\frac{-6}{21}$, c) $-1\frac{5}{7}-3\frac{3}{4}$, d) $-12{,}54-15{,}2$.

Alıştırma 4

Bir kış günü Berovo'da sabah sıcaklık $-\frac{5}{2}$ °C idi. Öğlene kadar sıcaklık $3\frac{1}{4}$ °C yükseldi. Öğleden sonra ise 2,6 °C azaldı.

a) Öğle vakti sıcaklık kaç °C idi?

b) Öğleden sonra sıcaklık kaç °C idi?

c) Öğleden sonraki sıcaklık sabah sıcaklığından daha yüksek mi yoksa daha düşük müdür ve kaç derece fark vardır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Hesapla: a) $\frac{-1}{6}+\frac{-3}{8}$, b) $-13\frac{2}{3}+10\frac{1}{4}$, c) $-17+1\frac{5}{6}$, d) $-1{,}55+0{,}7$.

2. Hesapla: a) $\frac{1}{5}-\frac{3}{8}$, b) $-1\frac{2}{7}-\frac{1}{9}$, c) $-1-1\frac{5}{7}$, d) $-0{,}17-1{,}325$.

3. Ana ve Erol meyve almak için mağazaya gitmişlerdir. Ana $\frac{3}{4}$ kg elma, $\frac{2}{3}$ kg armut almıştır. Erol 2,4 kg portakal ve 1,35 kg mandalina almıştır.
   a) Ana kaç kilogram meyve almıştır?
   b) Erol kaç kilogram meyve almıştır?
   c) Kim daha fazla meyve almıştır ve kaç kilogram fazla almıştır?

4. Büyük bir bardakta 2,5 l su vardı. Isıtma sırasında $\frac{2}{5}$ l buharlaştı, sonra 1,1 l taze su eklendi. Bardaktaki toplam su miktarı ne kadardır?

5. Bir çözeltinin sıcaklığı −2,3 °C idi. Sonra $5\frac{3}{5}$ °C arttı, ardından 3,2 °C azaldı. Değişikliklerden sonra sıcaklık ne kadardır?

6. Bitkinin başlangıçtaki boyu $8\frac{2}{5}$ cm'dir. Bir hafta içinde 2,3 cm uzamış, sonra zayıf büyüme nedeniyle gövdenin bir kısmı 0,9 cm kısalmıştır. Bitkinin şu anki boyu ne kadardır? 12 cm boya ulaşması için ne kadar uzaması gerekir?

7. Marina bir sürahide çay karıştırmaktadır. Başlangıçta $1\frac{4}{5}$ l çay vardı. Isıtma sırasında 0,4 l buharlaştı, sonra 0,75 l taze çay ekledi.
   a) Tüm değişikliklerden sonra toplam çay miktarı ne kadardır?
   b) 3 l çay olmasını istiyorsa, daha kaç litre eklemelidir?

8. Yovana'nın 450 denarlık negatif bakiyesi vardır. Hesabına $31\frac{1}{4}$ denar yatırmıştır.
   a) Hesabın durumu ne kadar olacaktır?
   b) 125,75 denar daha harcarsa hesabın son durumu ne olur?

9. Elena hafta sonu üç set tenis oynamıştır. Birinci sette rakibine göre $1\frac{1}{5}$ puan daha kötü bir sonuç almıştır. İkinci sette rakibinden 2,3 puan daha fazla kazanmıştır. Üçüncü sette de rakibine göre $1\frac{1}{5}$ puan daha kötü bir sonuç almıştır.

a) Üç setin tamamından sonra Elena'nın rakibine göre toplam sonucu ne kadardır?

b) Toplamda rakibinden daha fazla mı yoksa daha az mı puan kazanmıştır?

Araştırma

Araştırmadaki istekleri yerine getirirsen, ondalık biçimdeki rasyonel sayıları, ondalık sayıları ondalık kesirlere dönüştürmeden toplamayı ve çıkarmayı öğreneceksin.

a) Tam sayıları toplarken şu kuralın geçerli olduğunu biliyorsun:

- **Aynı işaretli iki tam sayı toplanırken** sayıların mutlak değerleri toplanır ve sayıların ortak işareti sonucun önüne yazılır.
- **Zıt işaretli iki tam sayı toplanırken** mutlak değeri büyük olan sayıdan mutlak değeri küçük olan sayı çıkarılır ve mutlak değeri büyük olan sayının işareti sonucun önüne yazılır.
- **İki tam sayının farkı** bulunurken eksilen sayı ile çıkan sayının toplama işlemine göre tersi toplanır.

Tam sayılarda olduğu gibi, bir x **rasyonel sayısının mutlak değerini** aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{eğer x pozitif bir rasyonel sayı ise} \\ 0, & \text{eğer x = 0 ise} \\ -x, & \text{eğer x negatif bir rasyonel sayı ise.} \end{cases}$$

Tam sayıları toplama ve çıkarma kuralını izleyerek, ondalık biçimdeki rasyonel sayıları toplama kuralını çıkar.

b) Kural yardımıyla hesapla: $1{,}2 + 0{,}5$; $-1{,}2 + (-0{,}5)$; $-1{,}2 + 0{,}5$; $1{,}2 + (-0{,}5)$.

Kodları tara ve soruları çöz.

Tam sayıları toplama

Tam sayıları çıkarma

Ondalık sayıları çıkarma

13. RASYONEL SAYILARI ÇARPMA VE BÖLME

Rasyonel Sayıları Çarpma

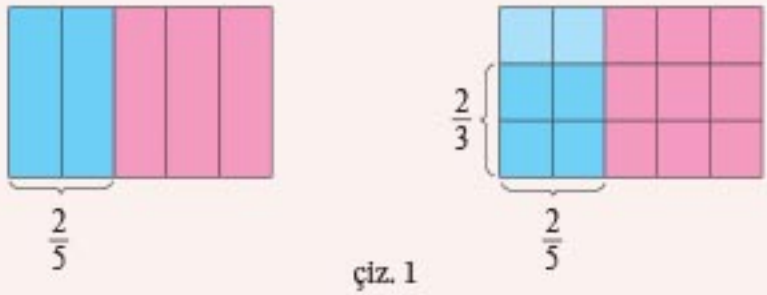
Etkinlik

Demir, çıkartmalarının $\frac{2}{5}$'ini alıp arkadaşı Mihail'in yanına gitmiştir.

Aldığı çıkartmaların $\frac{2}{3}$'ünü Demir Mihail'e vermiştir (çiz. 1).

a) Demir çıkartmalarının ne kadarını Mihail'e vermiştir?

b) Hesaplamak için hangi işlemi uyguladın?



çiz. 1

Kodu tara ve kesirlerin nasıl çarpıldığını hatırla.

Örnek 1

Rasyonel sayıların çarpımını hesapla: a) $\frac{2}{3}$ ve $\frac{5}{7}$, b) $\frac{-2}{3}$ ve $\frac{5}{7}$.

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot5}{3\cdot7}=\frac{10}{21}$, b) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{(-2)\cdot5}{3\cdot7}=\frac{-10}{21}$.

İki kesrin çarpımı; payların çarpımı sonucun payına, paydaların çarpımı ise sonucun paydası olarak yazılan bir kesirdir.

Örnek 2

Çarpımı hesapla. $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}$

Birinci yöntem: $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}=\frac{-10\cdot14}{21\cdot25}=\frac{-140}{525}=\frac{-28}{105}=\frac{-4}{15}$. Hesaplarız, sonra sadeleştiririz.

İkinci yöntem: $\frac{-\cancel{10}}{\cancel{21}} \cdot \frac{\cancel{14}}{\cancel{25}} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{-4}{15}$. Sadeleştiririz, sonra hesaplarız.

Örnek 3

Çarpımı hesapla: a) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3}$, b) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7)$.

a) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{-49}{15} = -3\frac{4}{15}$,

b) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7) = \frac{-24}{10} \cdot \frac{-17}{10} = \frac{-24 \cdot (-17)}{10 \cdot 10} = \frac{408}{100} = \frac{102}{25} = 4\frac{2}{25}$.

Alıştırma 1

Çarpımı hesapla: a) $\frac{-105}{72} \cdot \frac{18}{15}$, b) $1\frac{8}{11} \cdot \frac{-33}{45}$, c) $\frac{-7}{17} \cdot \frac{-1}{10}$, d) $-0{,}4 \cdot 1{,}5$.

Örnek 4

Bir buzdolabındaki sıcaklık 2,5 °C idi. Sonra bu sıcaklık, başlangıç sıcaklığının 1,4 katı kadar arttı.

a) Buzdolabındaki sıcaklık kaç santigrat derece artmıştır?

b) Buzdolabındaki yeni sıcaklık kaç derece olmuştur?

a) Sıcaklık şu kadar artmıştır: $2{,}5 \cdot 1{,}4 = \frac{25}{10} \cdot \frac{14}{10} = \frac{350}{100} = 3{,}5$ °C.

b) Buzdolabındaki yeni sıcaklık şu kadardır: $2{,}5 + 3{,}5 = \frac{25}{10} + \frac{35}{10} = \frac{60}{10} = 6$ °C.

Alıştırma 2

Yovana'nın 312,5 denar birikimi vardır. Birikimini $1\frac{2}{3}$ kat artırmaya karar verir, sonra yeni miktarın $\frac{3}{4}$'ünü kitap satın almak için harcar.

Kitapları satın aldıktan sonra Yovana'nın kaç denarı kalır?

Rasyonel Sayıları Bölme

Etkinlik

Üç litre su, yarım litrelik şişelere bölüştürülmelidir.

a) Kaç şişe gerekecektir?

b) Hesaplamak için hangi işlemi uygulayacaksın?

Kodu tarayın ve tam sayıların nasıl bölündüğünü hatırlayın.

Örnek 5

Çarpımı hesapla: a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$, b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}$. Ne fark ediyorsun?

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot4}{4\cdot3}=\frac{12}{12}=1$, b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot5}{5\cdot3}=\frac{15}{15}=1$.

İlk kesrin payının ikinci kesrin paydasına, ilk kesrin paydasının ise ikinci kesrin payına eşit olduğunu mutlaka fark etmişsindir. Bu tür kesirlere **karşılıklı (ters) kesirler** denir.

Örnek 6

Bölümü hesapla: a) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}$, b) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}$, c) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}$.

a) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}=\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{7}=\frac{3\cdot11}{4\cdot7}=\frac{33}{28}=1\frac{5}{28}$ Kesrin ters kesri $\frac{7}{11}$ şu kesirdir $\frac{11}{7}$.

b) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}=\frac{-5}{9}\cdot\frac{4}{3}=\frac{-5\cdot4}{9\cdot3}=\frac{-20}{27}$ Kesrin ters kesri $\frac{3}{4}$ şu kesirdir $\frac{4}{3}$.

c) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}=\frac{-\cancel{12}}{\cancel{21}}\cdot\frac{-7}{\cancel{2}}=\frac{-\cancel{6}\cdot(-1)}{\cancel{3}\cdot1}=2$ Kesrin ters kesri $\frac{2}{-7}$ şu kesirdir $\frac{-7}{2}$.

İki kesrin bölümü, bölünen ile bölenin ters kesrinin çarpımına eşittir.

Örnek 7

Bölümü hesapla: a) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}$, b) $-1{,}2:(-2{,}3)$.

a) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}=-\frac{28}{27}:\frac{20}{9}=\frac{-\cancel{28}}{\cancel{27}}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{20}}=\frac{-7}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{-7\cdot1}{3\cdot5}=\frac{-7}{15}$

b) $-1{,}2:(-2{,}3)=\frac{-12}{10}:\frac{-23}{10}=\frac{-12}{\cancel{10}}\cdot\frac{-\cancel{10}}{23}=\frac{12}{23}$

Alıştırma 3

Bölümü hesapla:

a) $\frac{-8}{5}:\frac{2}{3}$, b) $\frac{18}{25}:\frac{-72}{75}$, c) $\frac{-125}{64}:\frac{-50}{16}$.

Kodu tarayın ve soruları çözün.

Örnek 8

Antoniya arkadaşları için meyve suyu hazırlamak istiyor. Bir şişe meyve suyu konsantresi 0,7 l'dir. 3,5 l meyve suyu elde etmek için kaç şişe meyve suyu konsantresine ihtiyacı vardır?

Gerekli şişe sayısı:

$$3{,}5 : 0{,}7 = \frac{35}{10} : \frac{7}{10} = \frac{\cancel{35}}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{7}} = 5.$$

Antoniya'nın 5 şişe meyve suyu konsantresine ihtiyacı vardır.

Alıştırma 4

Yabancı pazara ihracat yapan bir şirketin 825,75 avro borcu vardır. Borcunu azaltmak için yönetim, borcu 15 eşit taksitte ödemeyi planlamaktadır. İlk taksitin ödenmesinden sonra şirket 312,50 avro kâr elde eder. İlk taksitin ödenmesi ve kârın eklenmesinden sonra şirketin borcu ne kadar olacaktır?

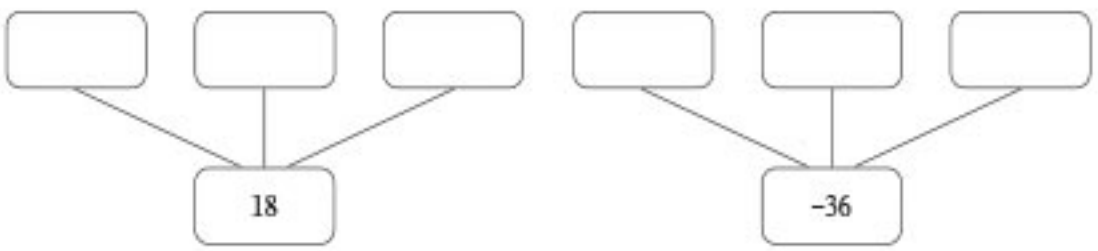
Not. Rasyonel sayılar kümesinde bölme işlemi, bölenin 0 olduğu durum dışında her zaman yapılabilir.
Unutma, **sıfıra bölme yapılmaz.**

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çarpımı hesapla: a) $-15 \cdot \frac{-8}{5}$, b) $-\frac{5}{2} \cdot \frac{-7}{5}$, c) $-8\frac{1}{2} \cdot 36$, d) $(-0{,}5) \cdot (-0{,}12)$.

2. Bölümü hesapla: a) $12 : \frac{-8}{9}$ $5\frac{1}{3} : \left(-5\frac{1}{3}\right)$, b) $3{,}4 : \left(-1\frac{7}{10}\right)$, c), d) $-230 : 2{,}3$.

3. Çizim 2'deki diyagramları defterine geçir. Boş alanlara verilen sayının rasyonel sayıları toplama, çıkarma, çarpma ve bölme yoluyla gösterimini yaz.



çiz. 2

4. Bir bölgede kaydedilen en düşük sıcaklık −18,4 °C'dir. İklim değişiklikleri nedeniyle bu sıcaklık başlangıç değerinin 1,6 katı olmuştur. Sonra, sıcak hava dalgası sırasında 12,5 °C artmıştır. Yeni sıcaklık kaç °C'dir?

5. Fizik sınıfında Teuta, deney için iki farklı buzdolabına iki termometre yerleştirir. *A* buzdolabının sıcaklığı −3,2 °C, *B* buzdolabının sıcaklığı ise 2,5 °C'dir. O, *A* buzdolabında başlangıç sıcaklığının 1,5 katı olacak bir sıcaklık ve *B* buzdolabında başlangıç sıcaklığının 2,4 katı olacak bir sıcaklık elde etmeye karar verir.
   a) *A* buzdolabındaki yeni sıcaklık ne kadar olacaktır?
   b) *B* buzdolabındaki yeni sıcaklık ne kadar olacaktır?

6. A hesabı −4,5 bin denar eksidedir. Banka faiz uygular ve durum 0,5'e bölünür. *B* hesabı 7,2 bin denar artıdadır, ancak giderler durumu 1,8 kat azaltır (1,8'e bölünür).
   a) *A* hesabının yeni durumu ne kadardır?
   b) *B* hesabının yeni durumu ne kadardır?
   c) İki hesap yeni bir hesapta birleştirilirse, durum pozitif mi yoksa negatif mi olacaktır?

7. Bir ekip, bir cadde boyunca 1177,5 m optik kablo döşemelidir. Plana göre kablo 15 eşit kesime döşenecektir. Birinci kesime kablo döşendikten sonra, ikinci bir ekip gelmiş ve hemen 312,5 m kablo döşemiştir.
   a) Bir kesimin uzunluğu ne kadardır?
   b) İkinci ekip katılmadan önce, birinci kesimden sonra döşenecek kaç metre kablo kalmıştır?
   c) İkinci ekip katıldıktan sonra döşenecek kaç metre kablo kalmıştır?

8. Bir laboratuvar deneyinde 256,5 g asit çözeltisi kullanılmaktadır. Miktar, öğrenciler için 12 eşit örneğe bölünmelidir.
   a) Her örnekte asit çözeltisinin kütlesi ne kadardır?
   b) Her öğrenci kendi örneğine 15,25 g asit eklerse, eklemeden sonra örneğin toplam kütlesi ne kadar olacaktır?
   c) Eklemeden sonra örnekteki asit derişimi nasıl değişecektir? Cevabını gerekçelendir.

Araştırma

1. a) İki rasyonel sayı *a* ve b'nin çarpımının ve bölümünün işareti ile ilgili tabloyu defterine geçir ve doldur.
   b) *a* ve *b* tam sayılar olsaydı, tablo verilen tabloyla aynı olur muydu? Neden?
   c) Ne sonuç çıkarabilirsin: hangi durumda işaret pozitiftir, hangi durumda negatiftir?

a	*b*	*a* · *b*	*a* : *b*
+	+		
+	−		
−	+		
−	−		

2. Araştırmadaki istekleri yerine getirirsen, ondalık biçimdeki rasyonel sayıları, ondalık sayıları ondalık kesirlere dönüştürmeden çarpmayı ve bölmeyi öğreneceksin.
   a) Tam sayıları çarparken ve bölerken şu kuralın geçerli olduğunu biliyorsun:
   - Farklı işaretli iki tam sayının çarpımı, mutlak değeri çarpanların mutlak değerlerinin **çarpımına** eşit olan negatif bir sayıdır.
   - Aynı işaretli iki tam sayının çarpımı, mutlak değeri çarpanların mutlak değerlerinin **çarpımına** eşit olan pozitif bir sayıdır.
   - Farklı işaretli iki tam sayının **bölümü** (varsa), mutlak değeri bölünenin mutlak değerinin bölene bölünmesine eşit olan negatif bir sayıdır.

- Aynı işaretli iki tam sayının **bölümü** (varsa), mutlak değeri bölünenin mutlak değerinin bölene bölünmesine eşit olan pozitif bir sayıdır.

Tam sayıları çarpma ve bölme kuralını izleyerek, ondalık biçimdeki rasyonel sayıları çarpma ve bölme kuralını çıkar.

b) Kural yardımıyla hesapla:

$1{,}2 \cdot 0{,}5;\ -1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ -1{,}2\ 0{,}5;\ 1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ 1{,}2 : 0{,}5;\ -1{,}2 : (-0{,}5);\ -1{,}2 : 0{,}5;\ 1{,}2 : (-0{,}5).$

14. RASYONEL SAYILARLA YAPILAN İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ

Etkinlik

Toplamları hesapla:
a) $7 + (-4)$ ve $(-4) + 7$,
b) $[12 + (-8)] + 3$ ve $12 + [(-8) + 3]$.
Ne fark ediyorsun? Tam sayıları toplama işleminin hangi özellikleri vardır?

Kodu tara ve toplamları hesapla.

Örnek 1

Toplamları hesapla: a) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}$ ve $\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}$, b) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}$ ve $\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)$.

a) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{-3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{-1}{4}$, Toplananların yerleri değişti.

$\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{-3}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{-3+2}{4}=\frac{-1}{4}$. Toplam değişmedi.

b) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}=\frac{-3+4}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{2-9}{12}=\frac{-7}{12}$, Toplananların gruplanma biçimi değişti.

$\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{8-9}{12}=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{12}=\frac{-6-1}{12}=\frac{-7}{12}$. Toplam değişmedi.

- **Toplamanın değişme özelliği:** İki rasyonel sayının toplamı, toplananlar yer değiştirdiğinde değişmez.
- **Toplamanın birleşme özelliği:** Rasyonel sayıların toplamı, toplananların gruplanma biçimine bağlı değildir.

Alıştırma 1

Mile $-3{,}7$ m deniz seviyesinde dalış yapmış, sonra 2,5 m daha aşağı inmiştir. Sead önce $-2{,}5$ m deniz seviyesinde su altı dünyasını araştırmış, sonra 3,7 m daha aşağı inmiştir. Hesaplama yapmadan Mile ve Sead'in aynı deniz seviyesinde bulunup bulunmadığını belirle. Cevabını gerekçelendir.

Örnek 2

Hesapla: a) $\frac{-3}{7}+0$, b) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}$.

a) $\frac{-3}{7}+0=\frac{-3}{7}+\frac{0}{7}=\frac{-3+0}{7}=\frac{-3}{7}$, b) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}=\frac{1+(-1)}{6}=\frac{0}{6}=0$.

Kesirler $\frac{1}{6}$ ve $\frac{-1}{6}$ birbirinin **ters** işaretlisidir.

Etkinlik

Çarpımları hesapla: a) $40\cdot(-8)$ ve $(-8)\cdot 40$, b) $[(-42)\cdot(+5)]\cdot(-8)$ ve $(-42)\cdot[(+5)\cdot(-8)]$. Ne fark ediyorsun? Tam sayıları çarpma işleminin hangi özellikleri vardır?

Örnek 3

Çarpımları hesapla: a) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}$ ve $\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}$, b) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}$ ve $\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)$.

a) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{-2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{-6}{35}$, Çarpanların yerleri değişti.

$\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{3\cdot(-2)}{7\cdot 5}=\frac{-6}{35}$. Çarpım değişmedi.

b) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1\cdot 1}{3\cdot 4}\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{-\cancel{3}}{5}=\frac{-1}{4}\cdot\frac{-1}{5}=\frac{-1\cdot(-1)}{4\cdot 5}=\frac{1}{20}$, Çarpanların gruplanma biçimi değişti.

$\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1\cdot(-3)}{4\cdot 5}=\frac{-1}{\cancel{3}}\cdot\frac{-\cancel{3}}{20}=\frac{(-1)\cdot(-1)}{20}=\frac{1}{20}$. Çarpım değişmedi.

- **Çarpmanın değişme özelliği:** İki rasyonel sayının çarpımı, çarpanlar yer değiştirdiğinde değişmez.
- **Çarpmanın birleşme özelliği:** Rasyonel sayıların çarpımı, çarpanların gruplanma biçimine bağlı değildir.

Örnek 4

Çarpımı hesapla: a) $\frac{-4}{5}\cdot 1$, b) $\frac{-2}{3}\cdot 0$, c) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}$.

a) $\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{4}{5}$, b) $\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{2\cdot 0}{3}=\frac{0}{3}=0$, c) $\frac{\cancel{-2}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{-2}}=1$.

$\frac{-2}{7}$ ve $\frac{7}{-2}$ kesirleri **birbirinin ters** kesridir.

Toplama ve çarpmanın birleşme özelliği sayesinde, sonlu sayıda rasyonel sayının toplamını veya çarpımını hesaplayabiliriz.

Alıştırma 2

Hesapla: a) $2\frac{1}{10}+3\frac{2}{15}+\frac{3}{15}$, b) $\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{3}\cdot 3\frac{2}{4}$, c) $\left(-3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)$.

Etkinlik

Meri günlük harçlığından tasarruf etmeye karar vermiştir. Günlük harçlığı 300 denar olduğu hâlde, her gün harçlığından 200 denar harcayacaktır. 7 gün için şu kadar tasarruf edeceğini hesaplamıştır:

$300\cdot 7-200\cdot 7=(300-200)\cdot 7=100\cdot 7=700$ denar.

Meri hesaplamada hangi özelliği uygulamıştır?

Çarpmanın toplamaya göre dağılma özelliği: Bir toplamı verilen bir sayı ile çarparken, önce toplamı hesaplayıp sonra verilen sayı ile çarparsak da, her bir toplananı önce verilen sayı ile çarpıp sonra elde edilen çarpımları toplarsak da sonuç aynıdır. Çarpmanın dağılma özelliği çıkarma işlemine göre de geçerlidir.

Alıştırma 3

Dağılma özelliğini aşağıdaki örnek üzerinden kontrol et $\left(1{,}2+\frac{3}{5}-7\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Toplama ve çıkarma işlemlerinin belirtilen özelliklerini uygulayarak birçok durumda hesaplamaları kolaylaştırabiliriz.

Örnek 5

En kolay yoldan hesapla: a) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}$, b) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4$, c) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64$.

a) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}=7-\frac{10}{3}+9-\frac{17}{3}=7+9-\left(\frac{10}{3}+\frac{17}{3}\right)=16-\frac{27}{3}=16-9=7$,

b) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4=\frac{-25}{10}\cdot 4\cdot\frac{-379}{10}=-10\cdot\frac{-379}{10}=379$,

c) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64=2{,}52\cdot(36+64)=\frac{252}{100}\cdot 100=252$.

Alıştırma 4

Tea 55 denardan 3,5 kg çilek, 45 denardan 3,5 kg kiraz ve 100 denardan 3,5 kg satın almıştır. Meyveler için toplam kaç denar ödemiştir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. $a+(b+c)=(a+b)+c$ eşitliğini aşağıdaki rasyonel sayılar için kontrol et:
a) $a=-2\frac{3}{4}$, $b=\frac{-2}{7}$ ve $c=\frac{4}{5}$, b) $a=\frac{-1}{2}$, $b=1\frac{2}{3}$ ve $c=-0{,}6$.

2. $\frac{1}{2}$'nin $\frac{1}{6}$'sını ve $\frac{1}{6}$'nın $\frac{1}{2}$'sini hesapla. Sonra elde edilen sonuçları karşılaştır. Ne sonuç çıkardın? Cevabını açıkla.

3. Değişme ve birleşme özelliğini uygulayarak hesapla:
a) $3\frac{1}{2}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+4\frac{7}{12}$, b) $\frac{-3}{8}+12\frac{3}{4}-3\frac{5}{8}+2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$, c) $\left(\frac{3}{17}\cdot\frac{2}{11}\right)\cdot\frac{17}{18}$, d) $\frac{15}{19}\cdot\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{38}{45}\right)$.

4. Aşağıdaki durumlarda elde edilen çarpım sıfırdan büyük, sıfıra eşit ya da sıfırdan küçük müdür? Eğer:
a) negatif çarpanların sayısı çift ise ve 0 çarpanı yoksa,
b) negatif çarpanların sayısı tek ise ve 0 çarpanı yoksa,
c) çarpanlardan biri sıfır ise.

5. Çarpımları iki yolla hesapla: a) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)$, b) $\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{14}\right)\cdot 1\frac{3}{4}$.

6. En kolay yoldan hesapla: a) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}$, b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}$, c) $\frac{11}{12}\cdot\frac{8}{9}-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$.

7. Bir havuz üç boruyla $3\frac{1}{3}$ h.'de doldurulmaktadır. Birinci boru bir saatte $3\frac{1}{5}$ m^3 m^3 su akıtır, ikinci boru ise birinciden $1\frac{1}{10}$ m^3 daha fazla su akıtır. Üçüncü boru bir saatte, iki borunun birlikte akıttığı kadar su akıtıyorsa, havuz kaç metreküp su alır?

15. RASYONEL SAYILARLA SAYISAL İFADELER

Etkinlik

Sayısal ifadenin değerini hesapla:

a) $(-1)\cdot(-10)+5\cdot(-9):(-1)$,

b) $\{20-3\cdot[8+(-4)]\}:[10+2\cdot(-3)]$.

Her ifade için belirtilen işlemlerin yapılma sırasını açıkla.

Kodu tara ve soruları çöz.

Parantezsiz bir sayısal ifadede yalnızca birinci dereceden işlemler olan toplama ve çıkarma ya da yalnızca ikinci dereceden işlemler olan çarpma ve bölme bulunuyorsa, işlemler yazıldığı sıraya göre soldan sağa doğru yapılır.

Örnek 1

İfadenin sayısal değerini hesapla: a) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1$, b) $-6\cdot 2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2$.

a) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1=\frac{19}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-\frac{1}{1}=\frac{19\cdot 6}{8\cdot 6}-\frac{5\cdot 4}{12\cdot 4}+\frac{7\cdot 3}{16\cdot 3}-\frac{1\cdot 48}{1\cdot 48}=$

$=\frac{114-20+21-48}{48}=\frac{67}{48}=1\frac{19}{48}$,

b) $-6\cdot 2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2=-6\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{-3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-6\cdot 5\cdot 4\cdot 1}{2\cdot(-3)\cdot 2}=\frac{-120}{-12}=10$.

Parantezsiz bir sayısal ifadede birinci dereceden ve ikinci dereceden işlemler bulunuyorsa, önce ikinci dereceden işlemler olan çarpma ve bölmeyi, sonra birinci dereceden işlemler olan toplama ve çıkarmayı yaparız.

Örnek 2

İfadenin sayısal değerini hesapla $\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}$.

$\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}=\frac{5}{8}-\frac{11}{6}\cdot\frac{15}{11}=\frac{5}{8}-\frac{5}{2}=\frac{5}{8}-\frac{5\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{5-20}{8}=\frac{-15}{8}=-1\frac{7}{8}$.

Sayısal ifadede küçük parantezler ( ), köşeli parantezler [ ] ve süslü parantezler { } bulunuyorsa, önce küçük parantezlerin içindeki işlemleri, sonra köşeli parantezlerin içindeki işlemleri, ardından süslü parantezlerin içindeki işlemleri, en sonunda da bunların dışındaki ve bunlarla ilgili işlemleri yaparız.

Örnek 3

İfadenin sayısal değerini hesapla $\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}$.

$$\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot\frac{7}{3}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\left(\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}\right)\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{5+6}{15}\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7\cdot 5}{15}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2+35-22}{15}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\frac{15}{15}\cdot\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

Alıştırma 1

İfadenin sayısal değerini hesapla $(-3,5)+\frac{2}{3}\cdot(-4,5)-(-\frac{5}{6})+7,2:(-2,4)$.

Örnek 4

Bir öğrenci tuz çözeltileriyle bilimsel bir deney yapmaktadır. Farklı miktarlarda çözelti bulunan üç şişesi vardır. Birinci şişede 1,2 l çözelti, ikinci şişede $\frac{3}{4}$ l çözelti, üçüncü şişede 0,6 l çözelti vardır. Birinci şişedeki çözeltinin yarısını dökmüş, ikinci şişeye kendi miktarının $\frac{1}{3}$'ü kadar eklemiş, üçüncü şişeden ise 0,2 l dökmüştür.
Üç şişede birlikte kalan çözelti miktarı ne kadardır?

Sorunun koşullarına göre sayısal ifadeyi elde ederiz.

$$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2).$$

İfadenin sayısal değerini hesaplayarak şunu elde ederiz.

$$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2)=\left(\frac{12}{10}-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{10}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{6}{10}-\frac{2}{10}\right)=$$

$$=\left(\frac{12}{10}-\frac{12}{20}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{6-2}{10}\right)=\left(\frac{12\cdot 2}{10\cdot 2}-\frac{12}{20}\right)+\frac{4}{4}+\frac{4}{10}=$$

$$=\frac{24-12}{20}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{4\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{12}{20}+\frac{20}{20}+\frac{8}{20}=\frac{40}{20}=2.$$

Üç şişede birlikte kalan çözelti miktarı 2 l'dir.

Alıştırma 2

Kek için $\frac{3}{4}$ bardak şeker, 0,5 bardak yağ ve $\frac{1}{3}$ bardak süt kullanılır. Ayrıca 0,2 bardak su eklenmiş ve karışımın yarısı kalıba konulmuştur. Kalıba kaç bardak karışım konulmuştur?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Sayısal ifadenin değerini hesapla:

   a) $8\frac{3}{8}-3\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\left(7\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}\right)$,

   b) $-\frac{7}{8}+4{,}5-\left(1\frac{2}{3}+\frac{-6}{2}\right)\cdot 3$,

   c) $\left[\left(3\frac{1}{2}-4\right)\cdot(-1{,}2)-\left(-\frac{7}{10}\right)\right]\cdot 0{,}25$,

   d) $\left\{-2{,}4+\frac{3}{4}\cdot(-10)-[-1{,}2+(-6)]:0{,}5\right\}+\frac{1}{2}$.

   İşlemlerin yapılma sırasını açıkla.

2. Bir laboratuvardaki sıcaklık 21,5 °C idi. Önce 3,2 °C arttı, sonra 0,5 °C azaldı ve sonunda 0,1 °C daha arttı. Son sıcaklık kaç °C'dir?

3. Bir sürahiye 1,2 *l* su konur, sonra $\frac{3}{10}$ *l* süt eklenir ve elde edilen sıvıdan 0,25 *l* çıkarılır. İşlem iki kez tekrarlanır. Sonunda sürahide kaç litre su olur?

4. Marina $\frac{2}{3}$ *l* yoğurt, 0,25 *l* meyve suyu ve $\frac{1}{10}$ *l* su ile smoothie hazırlamaktadır. Smoothie'yi 3 bardağa paylaştırmıştır. Bir bardakta ne kadar sıvı vardır?

5. Bir mağaza kilogram fiyatı 95 denar olan 12,5 kg nar satın almıştır. Paketleme için ayrıca 235 denar ödemiştir. Narların $\frac{4}{5}$'ini kilogramı 124 denardan satmışlarsa, mağaza zarar mı etmiştir yoksa kâr mı elde etmiştir?

Yönerge: Geliri, satılan miktara karşılık gelen maliyet kısmıyla karşılaştır.

6. Üsküp – Niş güzergâhında çalışan bir otobüs, ortalama olarak 10 km'de 2,4 litre dizel yakıt tüketmektedir. Yol 210 km uzunluğundadır. 1 litre dizel yakıtın fiyatı 1,65 avrodur. Otobüs 56 yolcu taşımaktadır. Her biri 21,20 avro öder; ancak 6 yolcunun 1,50 avro indirimli bileti vardır. Turun toplam kârı ne kadardır?

16. BİLEŞİK KESİRLER

Etkinlik

Aşağıdaki tam sayı bölümlerini kesir olarak yaz.
a) 7 : 9 b) 12 : 5 c) 1 : 4

Bölümleri $5:\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}:(-7)$, $\frac{5}{3}:\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}$, $\frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}$ ve $7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}$ şu şekilde de yazabiliriz:

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5}{\frac{3}{4}},\ \frac{2}{3}:(-7)=\frac{\frac{2}{3}}{-7},\ \frac{5}{3}:\frac{3}{4}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}},\ 2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}},\ \frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}=\frac{\frac{-3}{8}}{4\frac{7}{9}},\ 7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}=\frac{7\frac{3}{5}}{1\frac{4}{9}}.$$

Bu tür ifadelere çift kesirler denir.

Payı veya paydası kesir olan kesre **çift kesir** denir.

Çift kesrin payını paydasından ayıran kesir çizgisine **ana kesir çizgisi** denir.

Örnek 1

Bölümleri çift kesir biçiminde yaz:

a) $4 : \frac{2}{3}$, b) $\frac{5}{8} : 6$, c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$.

a) $4 : \frac{2}{3} = \frac{4}{\frac{2}{3}}$, b) $\frac{5}{8} : 6 = \frac{\frac{5}{8}}{6}$, c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$.

Alıştırma 1

Bölümleri çift kesir biçiminde göster:

a) $\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$, $\frac{4}{7} : \frac{1}{6}$, $\frac{9}{11} : \frac{12}{-5}$, b) $5 : \frac{3}{7}$, $\frac{2}{5} : 7$ ve $3\frac{1}{5} : 7$.

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ çift kesrinde a ve d sayıları **dış terimler**,
b ve c sayıları ise
iç terimler olarak adlandırılır.

$\frac{\overbrace{\frac{a}{b}}^{\text{dış terimler}}}{\underbrace{\frac{c}{d}}_{\text{iç terimler}}}$

Örnek 2

Çift kesrin dış ve iç terimlerini yaz: a) $\frac{\frac{8}{11}}{6}$, b) $\frac{7}{\frac{-2}{9}}$.

Çift kesrin payı veya paydası tam sayı ise, onu paydası 1 olan kesir biçiminde göstererek çift kesir tam biçim alır, yani dört terimi olur.

a) $\frac{\frac{8}{11}}{6} = \frac{\frac{8}{11}}{\frac{6}{1}}$, Dış terimler 8 ve 1, iç terimler ise 11 ve 6'dır.

b) $\frac{7}{\frac{-2}{9}}$, Dış terimler 7 ve 9, iç terimler ise 1 ve -2'dir.

Örnek 3

Çift kesri basit kesre dönüştür: a) $\dfrac{\dfrac{6}{7}}{\dfrac{5}{4}}$, b) $\dfrac{\dfrac{-5}{9}}{\dfrac{4}{7}}$.

Çift kesir, pay olan kesrin payda olan kesre bölünmesiyle basit kesre dönüştürülür.

a) $\dfrac{\dfrac{6}{7}}{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{6}{7} : \dfrac{5}{4} = \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{6 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \dfrac{24}{35}$,

b) $\dfrac{\dfrac{-5}{9}}{\dfrac{4}{7}} = \dfrac{\dfrac{-5}{9}}{\dfrac{4}{7}} = \dfrac{(-5) \cdot 7}{9 \cdot 4} = \dfrac{-35}{36} = -\dfrac{35}{36}$.

Çift kesir, dış terimlerin çarpımı basit kesrin payı, iç terimlerin çarpımı ise basit kesrin paydası olarak yazılarak basit kesre dönüştürülür:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Alıştırma 2

Çift kesri basit kesre dönüştür: a) $\dfrac{\dfrac{1}{4}}{\dfrac{2}{5}}$, b) $\dfrac{-5}{\dfrac{4}{9}}$, c) $\dfrac{\dfrac{3}{8}}{5}$.

Örnek 4

Çift kesri basit kesre dönüştür: a) $\dfrac{3\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}}$, b) $\dfrac{7,4}{\dfrac{4}{5}}$.

a) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{7 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \dfrac{21}{4} = 5\dfrac{1}{4}$ Karma sayıları bileşik kesirler olarak yazarız.

b) $\dfrac{7,4}{\frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{74}{10}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{74 \cdot 5}{10 \cdot 4} = \dfrac{370}{40} = \dfrac{37}{4} = 9\dfrac{1}{4}$ Ondalık sayıları ondalık kesirler olarak yazarız.

Örnek 5

Basit kesre dönüştür $\dfrac{2 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}$

$$\frac{2-\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}=\frac{\frac{10-2}{5}}{\frac{4+5}{6}}=\frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{6}}$$

Payı ve paydayı hesaplarız.

$$=\frac{8\cdot 6}{5\cdot 9}=\frac{48}{45}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$$

Sonra çift kesri basit kesre dönüştürürüz.

Alıştırma 3

Basit kesre dönüştür: a) $\frac{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}+\frac{1}{3}}$, b) $\frac{2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}{3}$, c) $\frac{\frac{1}{5}-0{,}3}{1-\frac{2}{5}}$.

Alıştırma 4

$31\frac{1}{4}$ kg kahveden $\frac{1}{8}$ kg'lık kaç paket doldurulabilir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çift kesri basit kesre dönüştür: a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$, b) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$, c) $\frac{-\frac{2}{7}}{4}$, d) $\frac{2}{\frac{3}{2}}$.

2. Çift kesri basit kesre dönüştür: a) $\frac{1\frac{3}{4}}{2\frac{1}{3}}$, b) $\frac{2{,}4}{\frac{4}{5}}$, c) $\frac{2\frac{2}{5}}{1{,}4}$, d) $\frac{0{,}12}{0{,}15}$.

3. Belirtilen işlemleri yap:

   a) $\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{5}$, b) $\frac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{2}{9}}$, c) $\frac{3}{\frac{3}{8}-1\frac{1}{6}}$, d) $\frac{2\frac{3}{10}+\frac{4}{15}-\frac{3}{30}}{\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}+\frac{1}{12}}$.

4. $\frac{6}{5}$ ve $3\frac{3}{5}$ kesirlerinin farkını onların toplamına böl.

5. $3\frac{5}{8}$ ve 0,2 sayılarının bölümünü, 0,2 ve $3\frac{5}{8}$ sayılarının bölümüne ekle.

6. $1\frac{5}{8}$ m^3 su alan bir fıçı, musluktan 3 dakikada dolmaktadır.
   Musluğu yalnızca bir dakika açarsan fıçıyı ne kadar suyla doldurursun?

17. TABANI TAM SAYI VE ÜSSÜ (KUVVETİ) DOĞAL SAYI OLAN ÜSLÜ İFADELER

Kuvvet Kavramı

Etkinlik

5 hentbol maçında, takımları için toplam gol sayısını 5 hentbolcu atmıştır; her biri her maçta 5 gol atmıştır.

a) Takımın her bir maçta kaç gol attığını hesaplayabileceğin bir ifade yaz.

b) Takımın beş maçta toplam kaç gol attığını hesaplayabileceğin bir ifade yaz. Bu ifadeleri kısaca nasıl yazarsın?

3 sayısına eşit 4 çarpanın çarpımını kısaca şöyle yazarız:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$, "3 üzeri 4" veya "3'ün dördüncü kuvveti" diye okuruz.

Kuvvet göstergesi 4, taban olan 3'ün kendisiyle kaç kez çarpıldığını gösterir.

Benzer şekilde şunları elde ederiz:

$5 \cdot 5 = 5^2$, "5 üzeri 2" veya "5'in karesi" diye okuruz,

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$, "7 üzeri 3" veya "7'nin üçüncü kuvveti" ya da "7'nin küpü" diye okuruz.

Eşit çarpanların çarpılması, **kuvvet alma** işlemine götürür.

Her biri a tam sayısı olan n tane eşit çarpanın çarpımı, a sayısının doğal sayı n **göstergeli kuvveti** olarak adlandırılır ve a^n ile gösterilir ("a üzeri n" veya "a'nın n'inci kuvveti" diye okunur).

a sayısına **kuvvetin tabanı** denir.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ kere}} = a^n$$

n: kuvvet göstergesi – doğal sayı

a: kuvvetin tabanı – tam sayı

Her çarpımın en az iki çarpanı olduğundan, kuvvet tanımına göre kuvvet göstergesinin ikiden küçük olmaması gerekir. Bu nedenle, göstergesi 1 olan doğal sayı a'nın kuvvetinin, o sayının kendisi olan a olacağını kabul ederiz:

$a^1 = a$

Bu anlamda, örneğin, $8^1 = 8$, $(-2)^1 = -2$, $1^1 = 1$, $(-1)^1 = -1$ vb.

Tanımdan, kuvvetin tabanının çarpan olduğunu, göstergenin ise çarpanların sayısı olduğunu ve kuvvetin tabanının kaç kez çarpan olarak alındığını gösterdiğini fark ederiz.

Örnek 1

Çarpımı kuvvet olarak yaz, sonra oku:

a) $4 \cdot 4 \cdot 4$, b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, c) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$.

a) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, "4 üzeri 3" veya "4'ün üçüncü kuvveti" diye okuruz,

b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^5$, "eksi 6 üzeri 5" veya "eksi 6'nın beşinci kuvveti" diye okuruz,

c) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = (-x)^4$, "eksi x üzeri 4" veya "eksi x'in dördüncü kuvveti" diye okuruz.

Örnek 2

Kuvveti eşit çarpanların çarpımı olarak yaz: a) 7^3, b) $(-5)^5$, c) $(-y)^2$.

a) $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$, b) $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$, c) $(-y)^2 = (-y) \cdot (-y)$.

Alıştırma 1

Tabloyu defterine çiz ve doldur:

kuvvet	5^2		$(-3)^3$			$(-7)^8$		$(-z)^6$	
kuvvetin tabanı		4		-3	-1		1		$a - b$
kuvvet göstergesi		8		2	5		9		4

Alıştırma 2

Çarpımı kuvvet olarak yaz, sonra oku:

a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, c) $x \cdot x \cdot x \cdot x$, d) $(-b) \cdot (-b)$,

Alıştırma 3

Kuvveti oku, sonra eşit çarpanların çarpımı olarak yaz:

a) 6^3, b) $(-9)^2$, c) 0^6, d) 1^2, e) $(-1)^9$, f) a^7, g) $(-c)^5$, h) $(x + y)^4$.

Alıştırma 4

1 bakteri bulunan bir popülasyonda, bakteri sayısı *N* şu formüle göre artmaktadır:
$N = 3^n$, burada n saat sayısıdır. 6 saat sonra kaç bakteri olacaktır?

Kuvvetin Değeri

Etkinlik

Arben doğum gününü kutlamıştır. Sınıfından 3 öğrenci davet etmiştir.
Onların her biri diğer sınıflardan 3'er öğrenci daha davet etmiş,
onlar da başka bir okuldan 3'er öğrenci daha davet etmiştir.

a) Doğum günü kutlamasına davet edilen öğrencilerin sayısını kuvvet olarak yaz.
b) Kuvveti çarpım olarak yaz ve çarpımı hesapla.
c) Doğum günü kutlamasına kaç öğrenci davet edilmiştir?

Bir tam sayının kuvvetinin değeri hesaplanırken sayı kuvvet kadar kendisiyle çarpım biçiminde yazılır ve çarpma işlemi yapılır.
Kuvvetin değerini hesaplamayı hesap makinesi kullanarak da yapabiliriz.
Kuvvet göstergesi 2 olan kuvvetin (kare) ve kuvvet göstergesi 3 olan kuvvetin (küp) değerini hesaplamak için x^2 ve x^3 tuşlarını kullanırız.

Kuvvet göstergesi 2'den (kare) veya 3'ten (küp) farklı olan kuvvetleri hesaplamak için $x^{\blacksquare}$ veya y^x tuşlarını kullanırız.

Etkinlik

Yaz: a) 1'den 20'ye kadar sayıların karelerini, b) 1'den 5'e kadar sayıların küplerini.
Soru çözerken kullanabilmek için bunları ezberlemeye çalış.

Örnek 1

Kuvvetin değerini hesapla: a) 4^3, b) $(-2)^5$, c) $(-7)^2$, d) 1^4, e) 0^6.

a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
veya hesap makinesinde
4 x^3 =

Kuvvetin tabanı ve kuvvet göstergesi pozitif sayılardır.
Kuvvetin değeri pozitif bir sayıdır.

b) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
veya hesap makinesinde
(−) 2 $x^{\blacksquare}$ 5 =

Kuvvetin tabanı negatif bir sayı, kuvvet göstergesi ise tek bir sayıdır.
Kuvvetin değeri negatif bir sayıdır.

c) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$
veya hesap makinesinde
(−) 7 x^2 =

Kuvvetin tabanı negatif bir sayı, kuvvet göstergesi ise çift bir sayıdır.
Kuvvetin değeri pozitif bir sayıdır.

d) $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, e) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Etkinlik

Kuvveti yaz ve değerini hesapla:
a) taban 3 ve gösterge 6, b) taban −2 ve gösterge 3, c) taban −4 ve gösterge 2.
Tabanın işareti ve kuvvet göstergesinin çift ya da tek olması ile kuvvetin değerinin işareti arasındaki ilişki hakkında bir sonuç çıkarabilir misin?

- Pozitif bir tam sayının kuvvetinin değeri pozitif bir tam sayıdır.
- Negatif bir tam sayının çift göstergeli kuvvetinin değeri pozitif bir tam sayıdır.
- Negatif bir tam sayının tek göstergeli kuvvetinin değeri negatif bir tam sayıdır.
- Eğer $a = 1$ ise, her $n \in N$ için $a^n = 1$'dir ve eğer $a = 0$ ise, her $n \in N$ için $a^n = 0$'dır.

Alıştırma 1

Hesaplama yapmadan kuvvetin işaretini belirle: a) 13^5, b) $(-26)^{52}$, c) $(-77)^{45}$, d) 1^{44}.

Alıştırma 2

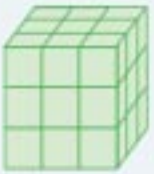
Fizikte, yönlü kuvvet hesaplanırken (sola doğru yön için "–" işaretiyle), kuvvetin karesini veya küpünü içeren bir ifade kullanılır. Kuvvet -3 N ise, onun:
a) kare değerini, b) küp değerini hesapla.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kuvvetin tabanını ve kuvvet göstergesini yaz:
   a) 6^3, b) $(-9)^2$, c) $(3x)^6$, d) $(-a+4)^k$, e) $(-7p^7)^9$ f) 0^{30}.
2. Çarpımı kuvvet olarak yaz:
   a) $9 \cdot 9 \cdot 9$, b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, c) $(-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x)$,
   d) $(a-b) \cdot (a-b) \cdot (a-b) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$, e) $xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy$.
3. Kuvveti çarpım olarak yaz:
   a) 6^7, b) $(-19)^2$ c) a^3, d) $(-x)^2$, e) $(-c-1)^7$, f) $(m^3)^5$.
4. Kuvvetin değerini hesapla: a) 3^4, b) $(-6)^3$, c) $(-2)^4$.
   Sonucunu hesap makinesiyle kontrol et.
5. Eşitliğin doğruluğunu kontrol et: a) $(-5)^4 = 5^4$, b) $(-4)^3 = -4^3$, c) $(-3)^4 = -1 \cdot 3^4$.
6. Hangi doğal sayılar için eşitlik doğrudur:
   a) $0^n = 0$, b) $2^n > 0$, c) $1^n = 1$, d) $(-4)^n > 0$, e) $(-7)^n < 0$?
7. Bir bilgisayar simülasyonunda, dron sayısı her turdan sonra iki katına çıkar. Başlangıçta 3 mikrodron varsa, 5 turdan sonra kaç dron olur?
8. Eleme usulü bir satranç turnuvasında, oynanan her turdan sonra oyuncu sayısı yarıya iner. Turnuva 128 oyuncuyla başlamışsa, 4 turdan sonra kaç oyuncu kalır?
9. Bir kurbağa x ekseninin koordinat başlangıcında bulunmaktadır. Her sıçrayıştan sonra koordinat başlangıcına olan uzaklığını iki katına çıkarır ve yönünü değiştirir (sola, sonra sağa, sonra sola, ...). n sıçrayıştan sonraki konumu $(-2)^n$ metredir.
   a) Kurbağa birinci sıçrayıştan sonra hangi konumdadır, ikinci sıçrayıştan sonra hangi konumdadır?
   b) Kurbağa kaç sıçrayıştan sonra koordinat başlangıcının solunda, 32 m uzaklıkta olur?

Araştırma

Çizim 1'de, dış yüzeyi yeşil renge boyanmış $3 \times 3 \times 3$'lük bir küp verilmiştir.



çiz. 1

a) Küp kaç küçük $1 \times 1 \times 1$ küpten oluşur?
b) Kaç küçük küp boyanmamıştır?
c) 1 yüzü boyalı kaç küçük küp vardır, 2 yüzü boyalı kaç küçük küp vardır ve 3 yüzü boyalı kaç küçük küp vardır?
d) Aynı soruları $4 \times 4 \times 4$'lük küp için cevapla.
e) Tabloyu defterine geçir ve doldur.

küp	küçük küplerin boyalı yüz sayısı			
	0	1	2	3
$2 \times 2 \times 2$				
$3 \times 3 \times 3$				
$4 \times 4 \times 4$				
$5 \times 5 \times 5$				

f) Küçük küplerin sayısı ve küçük küplerin boyalı yüz sayısı ile ilgili bir kural keşfedebilir misin? Kuralı $9 \times 9 \times 9$'luk küp için kontrol et.

18. KAREKÖK VE KÜPKÖK

Karekök

Etkinlik

Bir karenin alanı 16 cm²'dir.
a) Karenin bir kenarı kaç santimetredir?
b) Kenarı nasıl hesaplarız?

Örnek 1

a) Tabloyu doldur:

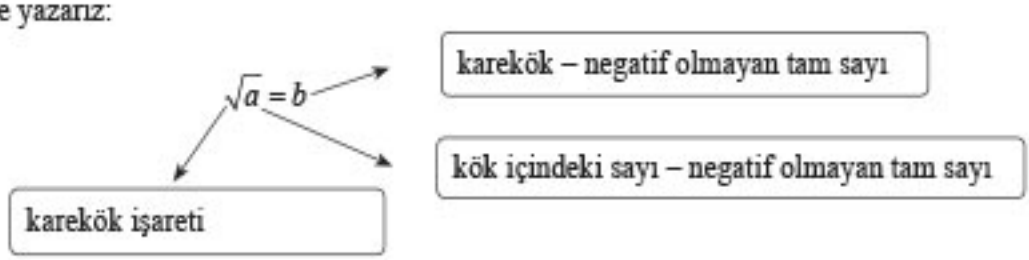
n			5		8
n^2	0	9		49	

Tabloyu doldurmak için:
- 5 ve 8 sayılarının karelerini bulmamız gerekir; bunlar sırasıyla 25 ve 64'tür,
- kareleri 0, 9 ve 49 olan sayıları bulmamız gerekir.

İkinci istek, birincisinin tersidir; yani 9 sayısı için karesi 9 olan sayıyı bulmamız gerekir. Bu sayı $\sqrt{9}$ ile gösterilir ve 9 sayısının karekökü olarak adlandırılır.
Benzer şekilde şunları elde ederiz: $\sqrt{49} = 7$ çünkü $7^2 = 49$, ve $\sqrt{0} = 0$ çünkü $0^2 = 0$.

Negatif olmayan bir tam sayı a'nın **karekökü** (varsa), $b^2 = a$ olacak şekilde negatif olmayan bir tam sayı b'dir. a sayısına kök içindeki sayı denir.
Verilen bir sayının karekökünü hesaplama işlemine, **kök göstergesi 2** olan kök alma veya kısaca **kök alma** denir.

Şu şekilde yazarız:



Şu şekilde okuruz: "a'nın karekökü b'dir."

Hesap makinelerinde karekök hesaplamak için özel bir tuş vardır; çoğunlukla $\sqrt{\ }$ ile gösterilir.
Böylece 64'ün karekökünü hesaplamak için şunu gireriz:
6 4 $\sqrt{\ }$ = ya da $\sqrt{\ }$ 6 4 =.

Etkinlik

Tabloyu defterine geçir ve doldur.

n	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
$\sqrt{n}$										

Hesaplanan değerleri soru çözerken kullanabilmek için ezberlemeye çalış.

Alıştırma 1

Hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et: a) $\sqrt{25}$, b) $\sqrt{64}$, c) $\sqrt{361}$, d) $\sqrt{121}$.

Örneğin 43 sayısı için, karesi 43 olan negatif olmayan bir tam sayı yoktur. Buna göre, negatif olmayan tam sayılar kümesinde 43 sayısının karekökü yoktur. Böyle durumlarda karekök değerini **tahmin** edebiliriz.

Örnek 2

$\sqrt{7}$ 'nin değerini bir ondalık basamağa kadar tahmin et.

Önce 7 sayısının, kareleri arasında bulunduğu iki negatif olmayan tam sayıyı belirleriz (çizim 1). Çünkü

$2^2 < 7 < 3^2$ olduğundan $2 < \sqrt{7} < 3$ elde ederiz.

Sırasıyla 2; 2,1; 2,2; 2,3; ... 2,9; 3 sayılarının karelerini, değerleri 7'yi aşıncaya kadar hesaplarız:

$2^2 = 4$; $2{,}1^2 = 4{,}41$; $2{,}2^2 = 4{,}84$; $2{,}3^2 = 5{,}29$;

$2{,}4^2 = 5{,}76$; $2{,}5^2 = 6{,}25$; **$2{,}6^2 = 6{,}76$**; **$2{,}7^2 = 7{,}29$.**

Hesaplamalara göre şu sonuca varırız:

$6{,}76 = 2{,}6^2 < 7 < 2{,}7^2 = 7{,}29$, bu nedenle $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$.

$2{,}6^2 = 6{,}76$ sayısından 7 sayısına olan uzaklık 0,24 birimdir; $2{,}7^2 = 7{,}29$ sayısından 7 sayısına olan uzaklık ise 0,29 birimdir.

$0{,}24 < 0{,}29$ olduğundan, $2{,}6^2 = 6{,}76$ sayısı 7 sayısına daha yakındır. Bu da $\sqrt{7}$ 'nin 2,6 sayısına daha yakın olduğu anlamına gelir.

Buna göre, $\sqrt{7} \approx 2{,}6$.



çiz.1

Alıştırma 2

$\sqrt{50}$ 'nin değerini bir ondalık basamağa kadar tahmin et. Sonra tahminini hesap makinesiyle kontrol et.

Alıştırma 3

Bir panelde, kare biçiminde bir düzende yerleştirilmiş 2401 eşit lamba vardır.

a) Bir sırada kaç lamba vardır?

b) Eğer her lamba kenarı 1 cm olan bir kareyi kaplıyorsa, panelin kenar uzunluğu ne kadardır?

Küpkök

Etkinlik

Bir küpün hacmi 27 cm^3'tür. Küpün ayrıtı kaç santimetredir?
Ayrıt uzunluğunu nasıl hesaplayacaksın?

Örnek 3

Tabloyu defterine geçir ve doldur:

n	3	-4		
n^3			8	-125

Tabloyu doldurmak için:

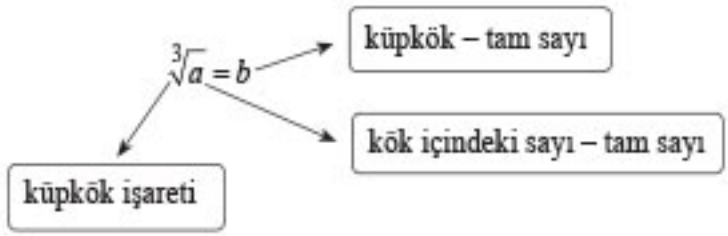
- 3 ve -4 sayılarının küplerini bulman gerekir; bunlar sırasıyla 27 ve -64'tür,
- küpleri 8 ve -125 olan sayıları bulman gerekir.

İkinci istek, birincisinin tersidir; yani 8 sayısı için küpü 8 olan sayıyı bulman gerekir. Bu sayı 2'dir, $\sqrt[3]{8}$ ile gösterilir ve 8 sayısının küpkökü olarak adlandırılır.

Benzer şekilde, $\sqrt[3]{-125} = -5$ olduğunu görürüz; çünkü $(-5)^3 = -125$.

Bir tam sayı a'nın **küpkökü** (üçüncü kökü), $b^3 = a$ olacak şekilde bir tam sayı b'dir ve $\sqrt[3]{a}$ ile gösterilir. a sayısına **kök içindeki sayı** denir.
Verilen bir sayının küpkökünü hesaplama işlemine, **kök göstergesi 3 olan kök alma** veya kısaca **kök alma** denir.

Şu şekilde yazarız:



Şu şekilde okuruz: "a'nın küpkökü b'dir" veya "a'nın üçüncü kökü b'dir."

Hesap makinelerinde küpkök hesaplamak için özel bir tuş vardır; çoğunlukla $\sqrt[3]{\ }$ ile gösterilir.
Böylece 125'in küpkökünü hesaplamak için şunu gireriz:

1 2 5 $\sqrt[3]{\ }$ = ya da $\sqrt[3]{\ }$ 1 2 5 =

Etkinlik

Tabloyu defterine geçir ve doldur.

n	8	27	64	125
$\sqrt[3]{n}$				

Hesaplanan değerleri soru çözerken kullanabilmek için ezberlemeye çalış.

Alıştırma 4

Hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et: a) $\sqrt[3]{-27}$, b) $\sqrt[3]{8}$, c) $\sqrt[3]{-125}$, d) $\sqrt[3]{64}$.

Kareköklerde olduğu gibi, her sayı için küpü verilen sayı olan bir tam sayı yoktur. Buna göre, her küpkök tam sayılar kümesinde değildir. Böyle durumlarda küpkökün değerini **tahmin** edebiliriz.

Örnek 4

$\sqrt[3]{30}$ 'un değerini bir ondalık basamağa kadar tahmin et.

Önce 30 sayısının, küpleri arasında bulunduğu iki tam sayıyı belirleriz. Çünkü

$3^3 < 30 < 4^3$ olduğundan $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ elde ederiz.

Sırasıyla 3; 3,1; 3,2; 3,3; ... 3,9; 4 sayılarının küplerini, değerleri 30'u aşıncaya kadar hesaplarız (çizim 2):

$3^3 = 27$; **$3{,}1^3 = 29{,}791$;** **$3{,}2^3 = 32{,}768$.**

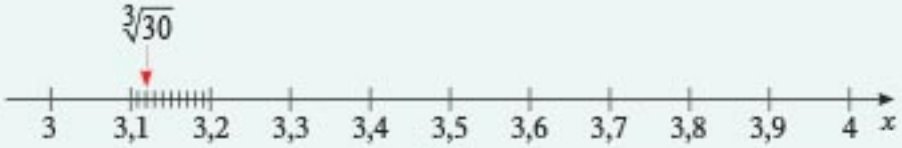
Hesaplamalara göre şu sonuca varırız:

$29{,}791 = 3{,}1^3 < 30 < 3{,}2^3 = 32{,}768$, bu nedenle $3{,}1 < \sqrt[3]{30} < 3{,}2$..

$3{,}1^3 = 29{,}791$ **sayısından** 30 sayısına olan uzaklık 0,209 birimdir; $3{,}2^3 = 32{,}768$ **sayısından** 30 sayısına olan uzaklık ise 2,768 birimdir.

$0{,}209 < 2{,}768$ olduğundan, $3{,}1^3 = 29{,}791$ sayısı 30 sayısına daha yakındır. Bu da $\sqrt[3]{30}$ 'un 3,1 sayısına daha yakın olduğu anlamına gelir.

Buna göre, $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}1$.



çiz.1

Alıştırma 5

$\sqrt[3]{10}$ 'un değerini bir ondalık basamağa kadar tahmin et. Sonra tahminini hesap makinesiyle kontrol et.

Alıştırma 6

Bir fabrika, küp biçimindeki kutuları büyük bir sandığa paketlemektedir. Sandığa uzunluk, genişlik ve yükseklik boyunca eşit şekilde yerleştirilmiş tam 125 kutu sığmaktadır. Sandığın her bir kenarında kaç kutu vardır?

Kuvvetler, Karekökler ve Küpkökler İçeren Sayısal İfadenin Değerini Hesaplama

Örnek 5

İfadenin değerini hesapla: a) $(-5)^3 + 15^2$, b) $4 \cdot (\sqrt{16} + \sqrt[3]{-125})$, c) $(4^2 + 2\sqrt[3]{64}) : 3$.

Kuralları izlememiz gerekir:

a) $(-5)^3 + 15^2 = -125 + 225 = 100$

b) $4 \cdot (\sqrt{16} + \sqrt[3]{-125}) = 4 \cdot (4 + (-5)) =$
$= 4 \cdot (-1) = -4$

c) $(4^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{64}) : 3 = (16 + 2 \cdot 4) : 3 =$
$= (16 + 8) : 3 =$
$= 24 : 3 = 8$

- Parantezli bir sayısal ifadenin değeri hesaplanırken, **parantez içindeki işlemler önceliklidir.**
- Kuvvet alma, kök alma, çarpma, bölme, toplama ve çıkarma işlemlerini içeren bir sayısal ifadenin değeri hesaplanırken, önce **kuvvet alma** ve **kök alma** işlemlerini, sonra **çarpma** ve **bölme** işlemlerini, en sonunda ise **toplama** ve **çıkarma** işlemlerini yaparız.

Alıştırma 7

İfadenin değerini hesapla $(2^2 - 7\sqrt[3]{-125}) : (5^2 - 4\sqrt{9})$.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et: a) $\sqrt{225}$, b) $\sqrt{144}$, c) $\sqrt{361}$, d) $\sqrt{121}$.
2. $\sqrt{68}$ 'in değerini bir ondalık basamağa kadar tahmin et.
3. Hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et: a) $\sqrt[3]{-64}$, b) $\sqrt[3]{-8}$, c) $\sqrt[3]{125}$, d) $\sqrt[3]{75}$.
4. Matey, keçeli kalem koleksiyonu yapmaktadır. Keçeli kalemlerini kare biçimindeki çerçevelere yerleştirmek istemektedir (satır sayısı sütun sayısına eşittir).
   a) Birinci çerçevede her satırda 9 keçeli kalem bulunan 9 satır vardı. Bu çerçevede toplam kaç keçeli kalem vardı?
   b) İkinci çerçevede 121 keçeli kalem vardı. Satır sayısı sütun sayısına eşit olduğuna göre bu çerçevede kaç satır ve kaç sütun vardı?
5. $\sqrt[3]{75}$ 'in değerini bir ondalık basamağa kadar tahmin et.
6. Laboratuvarda hacmi 243 cm^3 olan metal bir küp incelenmektedir. Küpün ayrıtı ne kadardır?
7. Matematik sınıfında, küp biçiminde küçük tebeşir kutuları düzenlenmiştir. Kutular, büyük bir küp oluşturacak şekilde dizilmiştir.
   a) Toplam 125 kutu varsa, büyük küpün bir kenarında kaç kutu vardır?
   b) Her küçük tebeşir kutusunun hacmi 64 cm^3 ise, bir kutunun kenar uzunluğu ne kadardır?

8. İfadenin değerini hesapla:

a) $((-5)^3 + 16^2) \cdot (7^2 - 2^3)$, b) $(-11)^2 - 5 \cdot (3^3 + \sqrt[3]{-27})$, c) $(\sqrt{9} + 12^2) : \sqrt[3]{27}$.

9. İfadenin değerini hesapla ve hesap makinesiyle kontrol et:

a) $4a - \sqrt[3]{a-8} + \sqrt{a} + 2$, $a = 16$ için, b) $(a + 2\sqrt[3]{a-17} - 4)^2 - \sqrt{a}$, $a = 81$ için.

19. SAYILARIN $a \cdot 10^k$ BİÇİMİNDE YAZILMASI, $a, k \in \mathbb{N}$

Günlük yaşamda çok büyük sayılarla sık sık karşılaşırız: belirli bir şehirde, ülkede ya da kıtada yaşayan kişi sayısı, gezegenler arasındaki uzaklık, bir bakteri popülasyonundaki bakteri sayısı vb. Bu tür sayıları daha kolay yazmak için tabanı 10 olan kuvvetleri kullanırız.

Tabanı 10 ve Kuvvet Göstergesi Doğal Sayı Olan Kuvvetler

On birimin bir onluk oluşturduğunu, on onluğun bir yüzlük oluşturduğunu, on yüzlüğün bir binlik oluşturduğunu vb. biliyoruz. Onluk, yüzlük, binlik vb. birimlere **ondalık birimler** de denir.

Etkinlik

Her ondalık birimi, tabanı 10 olan bir kuvvet biçiminde yazabiliriz. İşlemi izle ve ondalık birimdeki sıfır sayısını, onun tabanı 10 olan kuvvet biçimindeki yazılışında bulunan kuvvet göstergesiyle karşılaştır.

$10 = 10 = 10^1$
$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$
$1\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$
$10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$
$100\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$
$1\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$
.....

Yani:

$\underbrace{1000\cdots0}_{k \text{ TANE SIFIR}} = 10^k$, $k \in \mathbb{N}$ için.

Örnek 1

Sözel olarak belirtilen ondalık birimi, tabanı 10 olan kuvvet biçiminde yaz:

a) Neptün'ün kütlesi yaklaşık olarak $\underbrace{1000\cdots0}_{26 \text{ sıfır}}$ kg'dır.

b) Ay'ın kütlesi yaklaşık olarak $\underbrace{1000\cdots0}_{23 \text{ sıfır}}$ kg'dır.

a) $\underbrace{1000\cdots0}_{26 \text{ sıfır}} = 10^{26}$, b) $\underbrace{1000\cdots0}_{23 \text{ sıfır}} = 10^{23}$.

Alıştırma 1

Sözel olarak belirtilen kuvvete eşit olan ondalık birimi yaz:

a) İnsan vücudundaki hücre sayısı 10^{14}'tür. b) Güneş'in kütlesi yaklaşık 10^{30} kg'dır.

Büyük sayıların okunması ve yazılması için, 10^k biçimindeki bazı kuvvetlerin, $k \in \mathbb{N}$ için, özel adları vardır. Bu tür kuvvetler şunlardır:

10^3 **kilo** diye okunur ve k ile gösterilir,
10^6 **mega** diye okunur ve M ile gösterilir,
10^9 **giga** diye okunur ve G ile gösterilir,
10^{12} **tera** diye okunur ve T ile gösterilir.

Örnek 2

Nikoliya, belleği 1 gigabayt (GB) olan bir bilgisayar diski satın almıştır. Ador,
$1 \text{ GB} = 10^3 \text{ MB}$ olduğunu hesaplamıştır.
Ador doğru hesaplamış mıdır?

Ador doğru hesaplamıştır, çünkü
$\mathbf{1\ GB} = 1\,000\,000\,000 \text{ B} = 1000 \cdot 1\,000\,000 \text{ B} = 10^3 \cdot 10^6 \text{ B} = \mathbf{10^3\ MB}$.

Sayıların $a \cdot 10^k$ Biçiminde Yazılması, $a, k \in \mathbb{N}$

Bir doğal sayı ile ondalık birimin çarpımı olarak yazılabilen sayılar, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı olarak da yazılabilir.

3 000 000 sayısını tabanı 10 olan bir kuvvet olarak yazamayız. Bu nedenle, önce onu iki sayının çarpımı olarak yazarız; bu sayılardan biri tabanı 10 olan bir kuvvet biçiminde yazılabilir. Yani:
$3\,000\,000 = 3 \cdot 1\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.

Örnek 3

Sözel olarak belirtilen sayıyı, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı olarak yaz:

a) 1 l kandaki kırmızı kan hücrelerinin sayısı yaklaşık olarak $\underbrace{5000\cdots0}_{12 \text{ sıfır}}$'dir.

b) Evren'in görülebilir kısmının çapı yaklaşık olarak $88\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ sıfır}}$ m'dir.

a) $5\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ sıfır}} = 5\cdot\underbrace{1000\cdots0}_{12\text{ sıfır}} = 5\cdot10^{12}$, b) $88\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ sıfır}}\text{ m} = 88\cdot\underbrace{1000\cdots0}_{25\text{ sıfır}}\text{ m} = 88\cdot10^{25}\text{ m}$.

Alıştırma 2

Sözel olarak belirtilen sayıyı, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı olarak yaz:

a) Güneş'ten Neptün'e olan uzaklık yaklaşık olarak $45\underbrace{000\cdots0}_{11\text{ sıfır}}$ m'dir.

b) Güneş'in kütlesi yaklaşık olarak $1\,99\underbrace{000\cdots0}_{28\text{ sıfır}}$ kg'dır.

Örnek 4

Kuzey Makedonya'nın $180\cdot10^4$ nüfusu, Yunanistan'ın $10\cdot10^6$ nüfusu, Bulgaristan'ın ise $69\cdot10^5$ nüfusu vardır. Hangi ülkenin nüfusu en fazladır, hangisinin nüfusu en azdır?

$180\cdot10^4 = 180\cdot10^4$
$10\cdot10^6 = 1\,000\cdot10^4$
$69\cdot10^5 = 690\cdot10^4$

Sayıları, yeni yazılışlarda bütün kuvvet göstergeleri 4'e eşit olacak şekilde yazarız (kuvvet göstergeleri arasındaki en küçük değer).

$180 < 690 < 1\,000$

Tabanı 10 olan ilgili kuvvetlerin önündeki çarpanları doğal sayılar olarak karşılaştırırız.

En az nüfusa Kuzey Makedonya sahiptir, en fazla nüfusa ise Yunanistan sahiptir.

Örnek 5

Işığın hızı yaklaşık 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$'dir. Işığın bir yılda aldığı yola ışık yılı (ly) denir. Bir ışık yılı yaklaşık kaç kilometredir? **Işık yılını**, biri tabanı 10 olan kuvvet olacak şekilde iki sayının çarpımı olarak yaz.

1 yıl = 365 gün 1 gün = 24 saat 1 saat = 60 dakika 1 dakika = 60 saniyedir.

$1\text{ ly} \approx 300\,000\cdot365\cdot24\cdot60\cdot60 = 9460800\,000\,000 = 94\,608\cdot10^8\text{ km}$.

Bir ışık yılı yaklaşık $94\,608\cdot10^8$ kilometredir.

Alıştırma 3

Bir süper bilgisayar saniyede 25 000 000 komut işlemektedir.

a) Komut sayısını, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı biçiminde yaz.

b) Süper bilgisayarın hızını, saniyede 25 000 komut işleyen sıradan bir bilgisayarın hızıyla karşılaştır.

Sayıları En Yakın Ondalık Birime $10k$, $k \in \mathbb{N}$, Yuvarlama

Sayıların bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı biçiminde yazılması, sayıların en yakın ondalık birime, yani en yakın onluğa, yüzlüğe, binliğe vb. yuvarlanması işlemini kolaylaştırabilir.

Etkinlik

1. Sayı doğrusu yardımıyla 342, 367, 362, 347 sayılarını yuvarla:
   a) en yakın onluğa,
   b) en yakın yüzlüğe.

Hangi yuvarlama fazla ile yuvarlamadır, hangisi eksik ile yuvarlamadır?

2. Ema ve Admir, sayı doğrusu kullanmadan doğal sayıların yuvarlanma işlemi hakkında bir sunum hazırlama görevi almışlardır.

Ema, kendi kartonunda kuralları açıklamıştır:

1) **Yuvarlama yaptığımız basamağın** sağındaki rakam:
   - 5, 6, 7, 8 veya 9 ise, yuvarlama yaptığımız rakamı 1 artırırız.
     Yukarı yuvarlama yaparız.
   - 0, 1, 2, 3 veya 4 ise, yuvarlama yaptığımız rakam değişmeden kalır.
     Aşağı yuvarlama yaparız.
2) **Yuvarlama yaptığımız basamağın sağındaki** rakamları 0 ile değiştiririz.
3) **Yuvarlama yaptığımız basamağın solundaki** rakamlar değişmeden kalır.
   Ancak yukarı yuvarlama sırasında elde varsa bu durum farklıdır.

Özellikle, yuvarlama yaptığımız rakam 9 ise ve yukarı yuvarlama yaparsak, bu rakamı 0 ile değiştirir ve solundaki ilk rakamı 1 artırırız. Soldaki rakam da 9 ise, elde işlemi 9'dan küçük bir rakam artırılıncaya kadar sola doğru devam eder.
Solda başka bir rakam yoksa, sola 1 rakamı eklenir.

Admir, kendi kartonunda birkaç örnek göstermiştir:

825 sayısı en yakın onluğa yuvarlandığında 830 sayısı elde edilir. Yazarız: $825 \approx 830$.	1237 sayısı en yakın yüzlüğe yuvarlandığında 1200 sayısı elde edilir. Yazarız: $1237 \approx 1200$.
962 sayısı en yakın binliğe yuvarlandığında 1000 sayısı elde edilir. Yazarız: $962 \approx 1000$.	984 sayısı en yakın yüzlüğe yuvarlandığında 1000 sayısı elde edilir. Yazarız: $984 \approx 1000$.

Ema ve Admir'in sunumu doğru hazırlanmış mıdır?

Bir doğal sayı n'nin en yakın ondalık birime 10^k, $k \in \mathbb{N}$, yuvarlanması işlemi, k tane sıfırı olan ve n sayısına en yakın olan doğal sayının bulunmasından oluşur.

Örnek 6

Sayıyı yuvarla:
a) 1 430 000 sayısını en yakın ondalık birime 10^5,
b) 22 372 000 000 sayısını en yakın ondalık birime 10^8,
c) 1 950 000 000 000 sayısını en yakın ondalık birime 10^{11}.

a) $1\,430\,000 \approx 1\,400\,000$
Yuvarlama eksik ile yapılmıştır.

- 4 rakamının basamak değeri $4 \cdot 10^5$'tir, bu yüzden yuvarladığımız rakam 4'tür.
- 4 rakamının sağında 3 rakamı vardır, bu yüzden 4 rakamı değişmeden kalır.
- 4 rakamının solundaki rakamlar değişmeden kalır, 4 rakamının sağındaki rakamları ise 0 rakamıyla değiştiririz.

b) $22\,372\,000\,000 \approx 22\,400\,000\,000$
Yuvarlama fazla ile yapılmıştır.

- 3 rakamının basamak değeri $3 \cdot 10^8$'dir, bu yüzden yuvarladığımız rakam 3'tür.
- 3 rakamının sağında 7 rakamı vardır, bu yüzden 3 rakamı 4 rakamıyla değiştirilir.
- 3 rakamının solundaki rakamlar değişmeden kalır, 3 rakamının sağındaki rakamları ise 0 rakamıyla değiştiririz.

c) $1\,950\,000\,000\,000 \approx 2\,000\,000\,000\,000$
Yuvarlama fazla ile yapılmıştır.

- 9 rakamının basamak değeri $9 \cdot 10^{11}$'dir, bu yüzden yuvarladığımız rakam 9'dur.
- 9 rakamının sağında 5 rakamı vardır, bu yüzden 9 rakamı 0 rakamıyla değiştirilir ve 1 elde olarak önüne yazılır.
- 9 rakamının sağındaki rakamları 0 rakamıyla değiştiririz.

Alıştırma 4

Bir laboratuvarda, deney için yeni bir bileşiğin 564 300 000 molekülü hazırlanmıştır.
a) Molekül sayısını, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı olarak yaz.
b) Molekül sayısını en yakın ondalık birime 10^6 yuvarla.
c) Molekül sayısını en yakın ondalık birime 10^7 yuvarla.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Sayıyı, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı olarak yaz:
   a) 40 000 000, b) 5 000 000 000, c) 600 000 000 000.
2. Bir gram toprakta yaklaşık 1 000 000 000 bakteri vardır. Bakteri sayısını tabanı 10 olan bir kuvvet biçiminde yaz.
3. Bir hastanede bir yıl için 3 200 000 doz aşı hazırlanmıştır.
   a) Doz sayısını, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı biçiminde yaz.
   b) a) seçeneğindeki biçimin, verilen biçime göre neden daha kolay kullanıldığını açıkla.

4. Büyük bir süpermarkette 120 000 kutu meyve suyu vardır. Sahibi, kutu sayısını diğer süpermarketlerle daha kolay karşılaştırılabilecek bir şekilde yazmak istemektedir. Kutu sayısını, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı biçiminde yaz.

5. Tabloda birkaç ülkedeki nüfus sayısı verilmiştir. Sayıları en küçükten en büyüğe doğru sırala.

ülke	nüfus sayısı
Hindistan	$1\,420 \cdot 10^6$
ABD	$335 \cdot 10^6$
Almanya	$84 \cdot 10^6$
Malta	$52 \cdot 10^4$
İzlanda	$38 \cdot 10^4$

6. Bir makine bir saniyede 10 000 aritmetik işlem yapmaktadır.
   a) Bu makinenin bir saatte yaptığı aritmetik işlem sayısını bul.
   b) Bu sayıyı tabanı 10 olan bir kuvvet biçiminde yaz.

7. Büyük bir şehir günde 4 275 000 kg atık üretmektedir.
   a) Atık miktarını, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı biçiminde yaz.
   b) Bir ayda üretilen atık miktarını, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı biçiminde göster.

8. Sayıyı yuvarla:
   a) 44 162 000 000 000 sayısını en yakın ondalık birime 10^{12},
   b) 78 000 000 000 000 sayısını en yakın ondalık birime 10^{13},
   c) 3 989 000 000 000 000 sayısını en yakın ondalık birime 10^{15}.

9. Büyük bir fabrikada bir yılda 426 000 000 000 pil üretilmiştir.
   a) Üretilen pil sayısını, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı olarak yaz.
   b) Pil sayısını en yakın ondalık birime 10^{10} yuvarla.
   c) Pil sayısını en yakın ondalık birime 10^{11} yuvarla.

Araştırma

İnternet üzerinden doğa bilimlerinden büyük sayılara ait başka örnekler bul ve bunları bir doğal sayı ile ondalık birimin çarpımı olarak yaz.

20. TABANLARI EŞİT OLAN KUVVETLERİ ÇARPMA VE BÖLME

Tabanları Eşit Olan Kuvvetleri Çarpma

Etkinlik

Tabanları eşit olan kuvvetlerin nasıl çarpıldığını incele ve açıkla:

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{2+3}$.

Kuvvet tanımının ve çarpmanın birleşme özelliğinin kullanıldığı adımları belirt.

Kural, tabanları eşit olan herhangi iki kuvvetin çarpımı için geçerlidir.

Tabanları eşit olan iki kuvvetin çarpımı, aynı tabana sahip ve kuvvet göstergesi bu kuvvetlerin göstergelerinin toplamına eşit olan bir kuvvete eşittir. Yani:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Örnek 1

Çarpımı kuvvet biçiminde yaz: a) $8^2 \cdot 8^6$, b) $(-3)^3 \cdot (-3)$, c) $x^m \cdot x^n$.

a) $8^2 \cdot 8^6 = 8^{2+6} = 8^8$, b) $(-3)^3 \cdot (-3) = (-3)^3 \cdot (-3)^1 = (-3)^{3+1} = (-3)^4$, c) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Kuralın, tabanları eşit olan ikiden fazla kuvvetin çarpımı için de geçerli olduğunu görebiliriz. Yani toplamanın birleşme özelliği ve çarpmanın birleşme özelliği nedeniyle şunu elde ederiz:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^k = (a^m \cdot a^n) \cdot a^k = a^{m+n} \cdot a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}.$$

Tabanları eşit olan kuvvetler çarpılırken taban aynı kalır, kuvvet göstergeleri ise toplanır.

Örnek 2

Çarpımı kuvvet biçiminde yaz:

a) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3$, b) $(-5)^7 \cdot (-5)^2 \, (-5)^5 \cdot (-5)^3$, c) $y^k \cdot y^n \cdot y^p$.

a) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3 = 6^{2+6+3} = 6^{11}$, b) $(-5)^7 \cdot (-5)^2 \, (-5)^5 \cdot (-5)^3 = (-5)^{7+2+5+3} = (-5)^{17}$,

c) $y^k \cdot y^n \cdot y^p = y^{k+n+p}$.

Alıştırma 1

Çarpımı kuvvet biçiminde yaz:
a) $10^4 \cdot 10^6$, b) $(-3)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3$, c) $a^5 \cdot a^6$, d) $(x-1)^4 \cdot (x-1) \cdot (x-1)^7 \cdot (x-1)^{12}$.

Örnek 3

İfadeyi sadeleştir: a) $9x^7 \cdot 3x^3$, b) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7$.

a) $9x^7 \cdot 3x^3 = (9 \cdot 3)\, x^{7+3} = 27x^{10}$,
b) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7 = (0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1)(y+1)^{5+4+7} = 0{,}012(y+1)^{16}$.

Alıştırma 2

İfadeyi sadeleştir: a) $9x^7 \cdot 3x^3$, b) $5a^7 \cdot 3a \cdot 0{,}1a^3$.

Örnek 4

Çiçekçi Mila, bir saksıya 2^2 çiçek dikmektedir. Gün boyunca 2^3 saksı dikmiştir. Gün boyunca toplam kaç çiçek dikmiştir?

Çözümü kuvvet biçiminde yazalım, sonra değerini hesaplayalım. Şunu elde ederiz:

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Çiçekçi Mila gün boyunca 32 çiçek dikmiştir.

Alıştırma 3

Bir fabrika birinci gün 2^5 kutu üretmiştir. Üretim her gün iki katına çıkarsa, 4 günde kaç kutu üretir?

Tabanları Eşit Olan Kuvvetleri Bölme

Etkinlik

Verilen hesaplamalara göre tabanları eşit olan kuvvetleri bölme kuralını keşfet:

$$3^6 : 3^2 = \frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4 = 3^{6-2}$$

Tabanları sıfırdan farklı ve eşit olan iki kuvvetin bölümünde, bölünenin kuvvet göstergesi bölenin kuvvet göstergesinden büyükse, bölüm aynı tabana sahip ve kuvvet göstergesi bölünen ile bölenin göstergelerinin farkına eşit olan bir kuvvete eşittir. Yani:

$a^n : a^m = a^{n-m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$.

Örnek 5

Bölümü kuvvet biçiminde yaz: a) $11^8 : 11^3$, b) $(-x)^{12} : (-x)^4$.

a) $11^8 : 11^3 = 11^{8-3} = 11^5$, b) $(-x)^{12} : (-x)^4 = (-x)^{12-4} = (-x)^8$.

Alıştırma 4

Bölümü kuvvet biçiminde yaz:
a) $5^6 : 5^4$, b) $(-4)^{12} : (-4)^7$, c) $b^{72} : b^{46}$, d) $(x-y)^7 : (x-y)^3$.

Alıştırma 5

Aşağıdaki eşitliklerden hangileri doğrudur:
a) $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$, b) $3^5 \cdot 3^3 = 3^2$, c) $7^9 : 7^2 = 7^7$, d) $x^x \cdot x^8 = x^{x-8}$, e) $m^3 : m = m^3$?
Cevabını gerekçelendir.

Örnek 6

İfadeyi sadeleştir: a) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5)$, b) $\dfrac{a^9}{a^4 \cdot a^2}$.

a) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5) = x^{12} : x^{3+5} = x^{12} : x^8 = x^{12-8} = x^4$, b) $\dfrac{a^9}{a^4 \cdot a^2} = \dfrac{a^9}{a^{4+2}} = \dfrac{a^9}{a^6} = a^{9-6} = a^3$.

Alıştırma 6

İfadeyi sadeleştir: a) $s^3 \cdot s^4 \cdot s^2 : s^5$, b) $n^4 \cdot n^1 : n^2$, c) $r^{36} : r^4 \cdot r^3 \cdot r^5$.

Alıştırma 7

İfadenin değerini hesapla: a) $(2^{14} \cdot 2^2) : 2^9$, b) $\dfrac{3^{14}}{3^7 \cdot 3^4}$, c) $\dfrac{8 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (2^5 : 4)}$.

Örnek 7

Bir fabrika gün boyunca 3^4 kutu şeker paketlemektedir. Gece boyunca fabrika 3^2 kutu şeker paketlemektedir.
Fabrika, gün boyunca geceye göre kaç kat daha fazla kutu şeker paketlemektedir?

Çözümü kuvvet biçiminde yazalım ve değerini hesaplayalım:

$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9$.

Fabrika, gün boyunca geceye göre 9 kat daha fazla kutu şeker paketlemektedir.

Örnek 8

Bir kimya laboratuvarında, koşullara bağlı olarak parçacık derişimi artan ve azalan bir sodyum (Na) çözeltisi saklanmaktadır. Bilim insanı derişim için şu ifadeyi yazmıştır:

$C = x^5 \cdot x^3 : x^4.$

Derişim ifadesini sadeleştir.

Bütün kuvvetlerin tabanı x olduğundan, tabanları eşit olan kuvvetleri çarpma ve bölme kurallarını uygulayabiliriz.
Aynı tabana sahip kuvvetler çarpılırken göstergeler toplanır:

$C = x^5 \cdot x^3 : x^4 = x^8 : x^4.$

Aynı tabana sahip kuvvetler bölünürken göstergeler çıkarılır:

$C = x^8 : x^4 = x^4.$

Sadeleştirmeden sonra derişim için $C = x^4$ elde ederiz.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kuvvetleri çarp: a) $6^5 \cdot 6^6$, b) $q^3 \cdot q^{42} \cdot q^2$, c) $t^4 \cdot t^1 \cdot t^2$.

2. Kuvvetleri böl: a) $2^9 : 2^7$, b) $\frac{x^8}{x^3}$, c) $y^{17} : y^6$, d) $(a-3b)^{19} : (a-3b)^{12}$.

3. Çarpımı kuvvet biçiminde yaz:
   a) $5^4 \cdot (-5)^6$, b) $-x \cdot x^2 \cdot (-x)^3$, c) $(3-a)^2 \cdot (a-3)^6$.

4. İfadeyi kuvvet biçiminde yaz: a) $2^{41} - 2^{40} - 2^{39}$, b) $3^{51} : (2 \cdot 3^{46} + 7 \cdot 3^{46})$.

5. İfadeyi sadeleştir: a) $15x^8 \cdot 3x^2$, b) $32y^4 : 8y^2$, c) $3y^2 \cdot x^3 \cdot 5y^5 \cdot 4x^5$, d) $(y^7 + 2y^2z) : y$.

6. İfadenin değerini hesapla: a) $(7^4 \cdot 7^2) : 7^5$, b) $\frac{3^6 \cdot 3^{12}}{27 \cdot 3^{14}}$, c) $\frac{2^{12}}{2^6 \cdot 2^3} : \frac{16 \cdot 2^3}{(2^3 : 4) \cdot 2^4}$.

7. Hesapla: a) $x^5 \cdot x^2$, ŞA $x = -2$ ve $x = 2$, b) $y^7 : y^4$, ŞA $y = -3$ ve $y = 3$.

8. Eşitlik n'nin hangi değeri için doğrudur:
   a) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+n}$, b) $a^3 \cdot a^4 = a^{n+2}$, c) $4^5 : 4^3 = 4^{5-n}$, d) $(x+1)^8 : (x+1)^n = (x+1)^2$?

9. Bir bakteri popülasyonundaki bakteri sayısı her 30 dakikada 2 kat artmaktadır. Başlangıçta 4 bakteri varsa, 3 saat sonra popülasyonda kaç bakteri olur?

TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

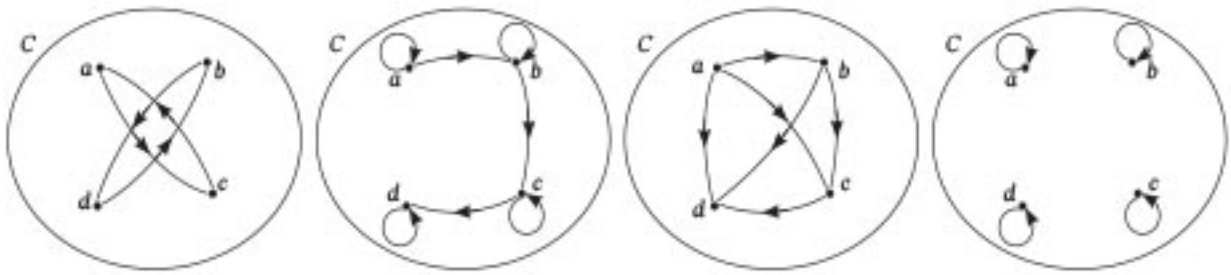
1. $A = \{2, 4, 8, 10\}$ kümesinde R bağıntısı verilmiştir: x, y'den 2 kat büyüktür. Bağıntıyı göster:
a) tablo yöntemiyle, b) sözel olarak, c) grafikle.

2. Mila, her matematik yazılı yoklaması için farklı sayıda saat çalışmıştır. Çalışma saatlerini aldığı puan sayısıyla bağıntı hâline getirmiştir. Veriler tabloda verilmiştir.

Haftanın günü	Çalışma süresi (saat olarak)	Alınan puan
pazartesi	1 saat	60 puan
salı	2 saat	70 puan
çarşamba	1,5 saat	65 puan
perşembe	3 saat	85 puan
cuma	2,5 saat	75 puan

Çalışma süresi ile alınan puanlar arasındaki ilişkiyi açıkla.
Bu şekilde belirlenen bağıntıyı göster: a) grafikle, b) tablo yöntemiyle.

3. Çizim 1'de $C = \{a, b, c, d\}$ kümesinde verilen R_1, R_2, R_3 ve R_4 bağıntılarından hangileri:
a) yansımalıdır, b) simetriktir, c) ters simetriktir, d) geçişlidir?



R_1 bağıntısı R_2 bağıntısı R_3 bağıntısı R_4 bağıntısı

çiz.1

4. VIII. sınıf öğrencilerinden oluşan bir kümede şu bağıntılar verilmiştir:
R_1: "... ile aynı soyada sahiptir" ve R_2: "... adı, ... adından daha kısa uzunluğa sahiptir".
a) Bağıntıları grafikle göstermeden, şu özellikleri kontrol et: yansıma, simetri, ters simetri ve geçişlilik.
b) Bunlardan hangisi eşdeğerlik bağıntısıdır, hangisi sıralama bağıntısıdır?

5. Bir spor kulübünde öğrenciler antrenman araç gereçlerini birbirleriyle değiş tokuş etmektedir.
Şunlar bilinmektedir:
Damyan, Ema'ya top ödünç vermiştir; Ema, Luka'ya antrenman ipi ödünç vermiştir; Luka, Mila'ya çember ödünç vermiştir; Mila, Damyan'a ip ödünç vermiştir.
a) Öğrenciler arasında R_1: "... ...'ya araç gereç ödünç vermiştir" bağıntısını tablo yöntemiyle ve grafikle göster.
b) Bağıntının yansımalı, simetrik ve geçişli olup olmadığını kontrol et.

c) R_2: "... bir dizi ödünç verme sonucunda ...'dan araç gereç alabilir" bağıntısı eşdeğerlik bağıntısı mıdır? Örneğin, Damyan Ema'ya, Ema da Luka'ya ödünç verdiyse, Damyan dolaylı olarak Luka'dan araç gereç alabilir.

6. Verilen ifadeyi sağlayan bir örnek belirt:

a) Bütün doğal sayılar tam sayıdır, fakat bütün tam sayılar doğal sayı olmak zorunda değildir.
b) Bütün tam sayılar rasyonel sayıdır, fakat bütün rasyonel sayılar tam sayı olmak zorunda değildir.

7. Periyodik ondalık sayıyı kesir olarak yaz:
a) 0,(9); b) 0,(143); c) 3,1(5); d) 3,45(67); e) 80,23(54).

8. Bir bidonda 3,(4) l su vardır. Su miktarını litre cinsinden kesir olarak yaz.

9. Bir mağazada bir litre sütün fiyatı 1,2(5) avrodur.

a) Sütün fiyatını kesir olarak yaz.
b) Astrit 5 l süt için ne kadar öder?
c) Astrit'in 10 avroluk sınırlı bir bütçesi vardır. Bütçesini en iyi şekilde kullanmak için kaç litre süt alabilir?

10. Bir sanat atölyesinde boyaların 0,4'ü kırmızı boya, $\frac{3}{10}$'u mavi boya ve %30'u sarı boyadır.

a) En fazla hangi boya bulunmaktadır?
b) Her boya miktarını kesir, ondalık sayı ve yüzde olarak yazacağın bir tablo oluştur.

11. Bir deneyde çözelti hazırlanıyor. 400 ml suda 80 g tuz çözülmüştür. Daha sonra 100 ml su ve ayrıca 40 g tuz eklenmiştir.

a) Başlangıç çözeltisindeki tuz yüzdesini hesapla.
b) Su ve tuz eklendikten sonra yeni tuz yüzdesini hesapla.
c) Tuz derişimi arttı mı yoksa azaldı mı? Kaç yüzde oranında?
d) Yeni derişimi toplam çözeltinin kesri olarak ifade et.

12. Bir basketbolcu sezonun başında maç başına ortalama 20 sayı atmaktadır. Sezonun ikinci bölümünde verimliliğini %25 artırır, son bölümde ise bu artmış değerin %10'u kadar azaltır. Sezon sonunda ortalama kaç sayı atar?

13. Oranı sadeleştir:

a) 0,25 m : 75 cm : 0,5 dm,
b) 3 kg : 0,75 kg : 250 g,
c) 3 l : 1200 ml : 0,6 l.

14. Milan evden okula olan yolu:

yürüyerek giderse 1 saat 14 dakikada,
bisikletle giderse 30 dakikada,
toplu taşıma ile giderse 18 dakikada alır.

Sürelerin oranını yürüyerek gitme : bisikletle gitme : toplu taşıma ile gitme şeklinde yaz ve sadeleştir.

15. Bir dörtgenin iç açıları 7 : 3 : 5 : 3 oranındadır. En büyük açının ölçüsünü hesapla.

16. Çikolatalı süt için süt : su : eritilmiş çikolata oranı 3 : 2 : 1'dir. Igor'un 15 l sütü olduğu bilinmektedir.

a) Kaç litre suya ve kaç litre eritilmiş çikolataya ihtiyacı vardır?

b) Toplam çikolatalı süt miktarı kaçtır?

17. Nina'nın 30 küpü 5 m uzaklığa taşıması gerekmektedir. Bir küpü 6 saniyede taşımaktadır. Eğer aynı anda:

a) 2'şer küp, b) 3'er küp taşırsa, 30 küpü taşımak için ne kadar zamana ihtiyacı olur?

18. Mensur, otobüsü 80 km/h hızla sürmekte ve yolunu 5 h 20 min sürede almaktadır. Tomislav, otomobili 100 km/h hızla sürmekte ve yolunu 3 h 10 min sürede almaktadır. Hangisi daha uzun yol almıştır?

19. Hesapla:

a) 36'nın $\frac{1}{2}$'si, b) 72'nin $\frac{1}{4}$'ü, c) 36'nın $\frac{1}{2}$'si, d) $0{,}1 \cdot 180$.

20. Bir kapta $1\frac{1}{4}$ kg un vardı. Egzona, kekler için 0,7 kg un kullandı. Daha sonra Ilir 1,2 kg un daha ekledi. Kapta şimdi ne kadar un vardır?

21. Bir kimyager laboratuvarda çözelti hazırlamaktadır. Bir bardakta 2,5 l çözelti vardı. Isıtma sırasında 0,75 l buharlaştı, sonra $1\frac{1}{4}$ l taze çözelti ekledi.

a) Tüm değişikliklerden sonra bardaktaki toplam çözelti miktarı ne kadardır?

b) Kimyager 4 l çözeltiye sahip olmak istiyorsa, kaç litre daha eklemeli veya çıkarmalıdır?

22. Coğrafya dersinde öğrenciler nehirleri ve onların ortalama akış miktarlarını (debi) incelemektedir.

A nehrinin ortalama debisi 320,5 m^3/s, *B* nehrinin ortalama debisi ise 145,25 m^3/s'dir. Mühendisler ortak bir baraj yapmayı planlamaktadır. Baraja *A* nehrinin debisinin $\frac{3}{4}$'ünün ve *B* nehrinin debisinin %85'inin gitmesine karar verirler.

a) *A* nehrinin yeni debisi ne kadar olur?

b) *B* nehrinin yeni debisi ne kadar olur?

c) İki nehirden baraja akacak toplam debi ne kadar olur?

d) Değişikliklerden sonra *A* nehrinin debisi, *B* nehrinin debisine göre ne kadar daha fazladır?

23. En kolay yoldan hesapla:

a) $\left(5\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}-6\frac{3}{4}+1\frac{1}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{5}$, b) $-4\cdot\frac{-5}{3}\cdot 1\frac{1}{2}\cdot(-3)$.

24. İfadenin değerini hesapla: $\left[\left(5\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}+1\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{36}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{13}\right)\right]-[(0{,}5-2{,}5)]\cdot\frac{1}{2}$.

25. Bir meyve dükkânı, kilogramı 1,8 avro olan 25 kg elma satın almıştır. Taşıma ve paketleme için ayrıca 12,5 avro ödemiştir. Daha sonra dükkân, elmaların $\frac{3}{5}$'ini kilogramı 2,4 avrodan satmış, kalanlarını ise başlangıç fiyatından kilogram başına 0,3 avro indirimle satmıştır. Elmaların satışından sonra dükkân ne kadar kâr etmiştir?

26. Bileşik kesre çevir:

a) $\dfrac{1:2\frac{1}{15}}{3\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{3}}:\dfrac{4\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{13}}{5:1\frac{7}{8}}$, b) $\dfrac{4\frac{1}{12}\cdot 8\frac{6}{7}:\frac{3}{23}}{6\frac{1}{4}:\frac{5}{7}\cdot 5\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{5\frac{1}{7}\cdot 7}{7\frac{1}{5}:\frac{9}{31}}$.

27. Bisiklet tekerleğinin çevresi $1\frac{1}{4}$ m m ise, 51 m'lik bir yolda tekerlek kaç kez döner?

28. Bir akvaryumdaki algler her 6 saatte iki katına çıkmaktadır. Başlangıçta 5 alg varsa, 24 saat sonra akvaryumda kaç alg olur?

29. Bir robot, x ekseninin koordinat başlangıcından hareket etmeye başlar. Her hareketinde koordinat başlangıcına olan uzaklığını iki katına çıkarır ve yönünü sırayla sağdan sola doğru değiştirir. n hareketten sonraki konumu $(-2)^n$ metredir.

a) Robot birinci hareketten sonra hangi konumdadır, ikinci hareketten sonra hangi konumdadır?

b) Robot kaç hareketten sonra koordinat başlangıcının solunda, 8 m uzaklıkta olur?

30. Aşağıdakilerin değerini bir ondalık basamağa kadar tahmin et: a) $\sqrt{51}$, b) $\sqrt[3]{100}$. Daha sonra tahminini hesap makinesiyle kontrol et.

31. Bilim insanları, elektrikli otomobil bataryalarında parça olarak kullanılan küçük bir metal küpü araştırmaktadır. Bu küpün hacmi 216 cm^3'tür.

a) Metal küpün bir kenarının uzunluğu kaçtır?

b) Metal küpün yüzey alanı kaçtır?

c) Laboratuvarda aynı küpün kenarı 6 kat daha küçük olan minyatür kopyaları yapılmaktadır. Minyatür küpün hacmi kaçtır?

32. İfadenin değerini hesapla:

a) $3\cdot 5^2+4^3-5\cdot 7^3$, b) $(-2)(-3)(-4)^2-(-1)^5(-2)^2$,

c) $100\cdot(-2)^3+2\cdot\sqrt{169}\cdot(-3)^3-0{,}3\sqrt[3]{27}$, d) $\left(2^3+\sqrt{256}\right):\left((-3)^5-\sqrt[3]{125}\right)$.

Hesap makinesiyle kontrol yap.

33. Tabloda gezegenlerin Güneş'e olan uzaklıkları verilmiştir.

a) Uzaklıkları, bir doğal sayı ile tabanı 10 olan bir kuvvetin çarpımı olarak yaz.

b) Uzaklıkları en küçüğünden en büyüğüne doğru sırala.

Gezegen	Güneş'e uzaklık (km olarak)
Merkür	58 000 000
Venüs	108 000 000
Mars	228 000 000
Dünya	150 000 000
Jüpiter	780 000 000
Satürn	1 430 000 000
Uranüs	2 870 000 000
Neptün	4 500 000 000

34. Bir devletin yıllık bütçesi 87 456 000 000 denardır. Bu sayıyı en yakın ondalık birime 10^9 yuvarla.

35. İfadeyi sadeleştir:

a) $(x^{32} : x^6) \cdot (x^7 : x^3) \cdot (x^7 : x^3 \cdot x^9)$, b) $\frac{a^7 \cdot a^8 : a^3}{3a^5}$.

36. Bir fabrikada metal küpler üretilmektedir. Her küpün ayrıtı 2 cm uzunluğundadır.

a) Küpün iki yüzünün alanını kuvvet biçiminde yaz, sonra hesapla.

b) Küpün dört yüzünün alanını kuvvet biçiminde yaz, sonra hesapla.

Konu 2:

GEOMETRİ

Öğrenme Sonuçları:

Bu konuyu öğrenirken şunları yapabileceksin:

- Kenarları paralel olan açılar, kenarları dik olan açılar, aynı çember yayı üzerindeki çevre açı ve merkez açı, çemberin ve dairenin elemanları ile ilgili problemleri çözmeyi.
- Üçgenlerde eşlik kavramını günlük yaşamla ilgili problemlerin çözümünde uygulamayı.
- 2 boyutlu şekillerin (üçgen ve dörtgen) özelliklerini kullanarak geometrik çizimler ve Pisagor Teoremi ile ilgili problemleri çözmeyi.
- Çokyüzlü, düzgün çokyüzlü kavramlarını ve çokyüzlülerde yüz, ayrıt ve köşe sayıları arasındaki ilişkiyi anladığını göstermeyi.
- Eksen simetrisi, öteleme ve dönme dönüşümlerini birleştirerek 2 boyutlu şekilleri dönüştürmeyi.

1. KENARLARI PARALEL OLAN AÇILAR VE KENARLARI DİK OLAN AÇILAR

Kenarları Paralel Olan Açılar

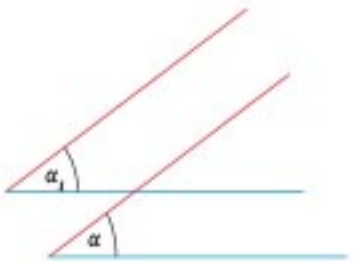
Etkinlik

1. Otoparkta, Resim 1'de gösterildiği gibi park yerlerini belirtmek için paralel çizgiler çizilmiştir.
1 ve 2 numaralı açıların karşılık gelen kenarlarının birbirine göre konumu nasıldır?

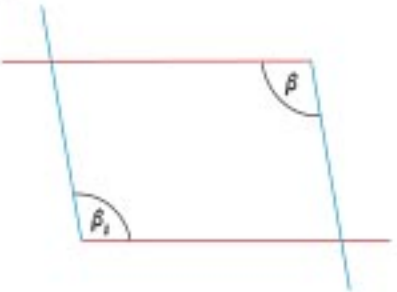


Resim 1

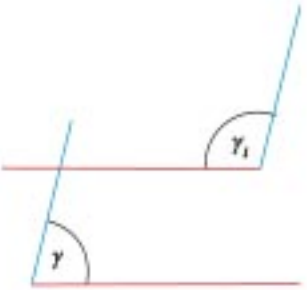
Açılar α ve α_1 (Çizim 1a)'de aynı yönlü, birbirine paralel kenarlara sahiptir.
Açılar β ve β_1 (Çizim 1b)'de zıt yönlü, birbirine paralel kenarlara sahiptir.
Açılar γ ve γ_1 (Çizim 1c)'de birbirine paralel kenarlar vardır. Bu durumda, kenar çiftlerinden biri aynı yönlü, diğer çift ise zıt yönlüdür.



çiz. 1a



çiz. 1b



çiz. 1c

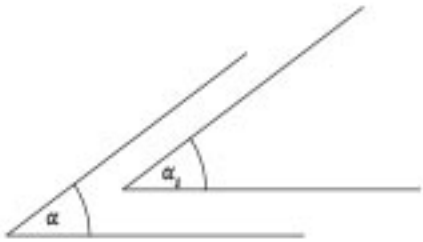
α ve α_1, β ve β_1, γ ve γ_1 açı çiftleri, **kenarları paralel olan açılara** örnektir.

Alıştırma 1

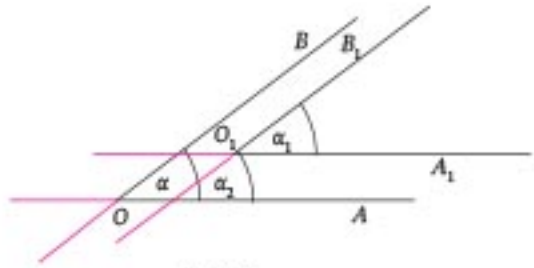
Kenarları paralel olan iki açı çiz:
a) Aynı yönlü,
b) Zıt yönlü,
c) Bir kenar çifti aynı yönlü, diğer kenar çifti zıt yönlü olacak şekilde.

Örnek 1

Çizim 2a'da α ve α_1 açıları, aynı yönlü ve birbirine paralel kenarlara sahiptir. Bu açıları dikkatlice ölç, ardından ölçülerini karşılaştır. Ne fark ediyorsun? Ölçme yapmadan da aynı sonuca ulaşabilir misin?



çiz. 2a

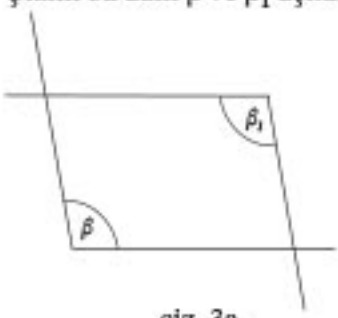


çiz. 2b

Ölçme sonucunda verilen açıların eşit olduğunu, yani $\alpha = \alpha_1$ olduğunu kesin olarak belirledin. $\alpha = \alpha_1$ olduğunu ölçme yapmadan göstermek için açıların kenarlarını doğrular elde edecek şekilde uzatalım (Çizim 2b). O zaman şunları fark ederiz:
$OB \parallel O_1B_1$ ve OA bir kesendir, bu nedenle $\alpha = \alpha_2$ (yöndeş açılar olduklarından);
$OA \parallel O_1A_1$ ve O_1B_1 bir kesendir, bu nedenle $\alpha_2 = \alpha_1$ (yöndeş açılar olduklarından);
$\alpha = \alpha_2$ ve $\alpha_2 = \alpha_1$ olduğundan $\alpha = \alpha_1$ elde edilir.

Örnek 2

Çizim 3a'daki β ve β_1 açılarının neden eşit olduğunu açıkla.



çiz. 3a

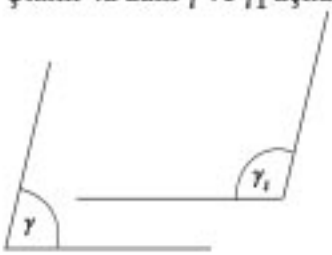


çiz. 3b

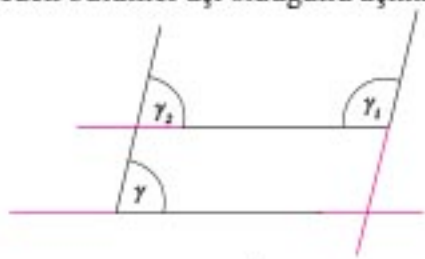
β ve β_1 açıları, zıt yönlü ve birbirine paralel kenarlara sahiptir. Açıların kenarlarını doğrular elde edecek şekilde uzatırsak (Çizim 3b), şunları fark ederiz:
$\beta = \beta_2$ (yöndeş açılar olduklarından) ve $\beta_2 = \beta_1$ (iç ters açılar olduklarından).
$\beta = \beta_2$ ve $\beta_2 = \beta_1$ olduğundan $\beta = \beta_1$ sonucu elde edilir.

Örnek 3

Çizim 4a'daki γ ve γ_1 açılarının neden bütünler açı olduğunu açıkla.



çiz. 4a



çiz. 4b

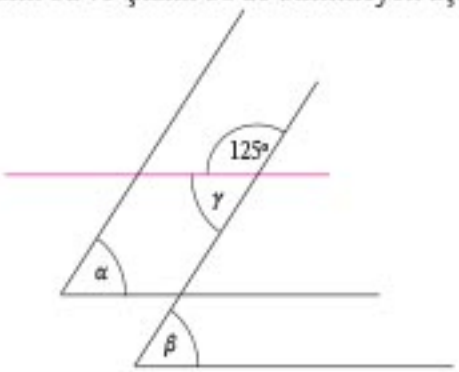
γ ve γ_1 açıları birbirine paralel kenarlara sahiptir. Kenar çiftlerinden biri aynı yönlü, diğeri ise zıt yönlüdür.

Açıların kenarlarını doğrular elde edecek şekilde uzatırsak (Çizim 4b), şunları fark ederiz: $\gamma = \gamma_2$ (yöndeş açılar olduklarından) ve $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ (komşu açılar olarak bütünler açılar olduklarından).
$\gamma = \gamma_2$ ve $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ olduğundan $\gamma + \gamma_1 = 180°$ elde edilir, yani γ ve γ_1 bütünler açılardır.

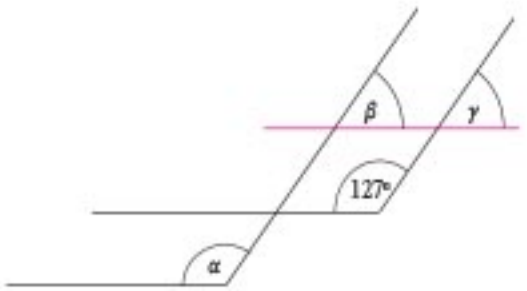
Kenarları paralel olan açılar:
- Her iki kenar çifti aynı yönlü ya da zıt yönlü ise eşittir.
- Kenar çiftlerinden biri aynı yönlü, diğeri zıt yönlü ise bütünlerdir.

Alıştırma 2

Çizim 5a ve Çizim 5b'de bilinmeyen açıların ölçülerini hesapla.



çiz. 5a



çiz. 5b

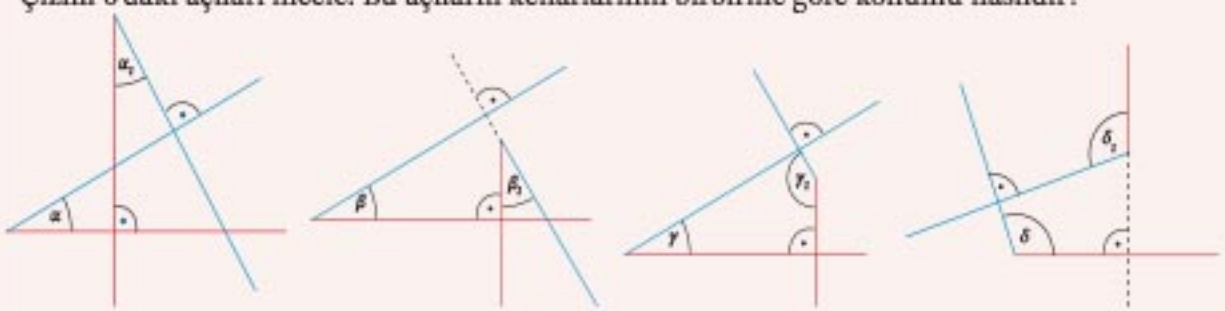
Alıştırma 3

Bir şehrin planında iki paralel cadde gösterilmiştir: *A* Caddesi ve *B* Caddesi. Diyagonal Caddesi iki caddeyi de kesmekte ve *A* Caddesi ile kesiştiği noktada 120°'lik bir açı oluşturmaktadır.
B Caddesi ile Diyagonal Caddesi'nin kesişiminde dört açı oluşmuştur.
a) Üç caddeyi gösteren planın bir bölümünü çiz ve açıları göster.
b) *B* Caddesi ile Diyagonal Caddesi'nin kesişimindeki açıların ölçülerini bul.

Kenarları Dik Olan Açılar

Etkinlik

Çizim 6'daki açıları incele. Bu açıların kenarlarının birbirine göre konumu nasıldır?



çiz. 6

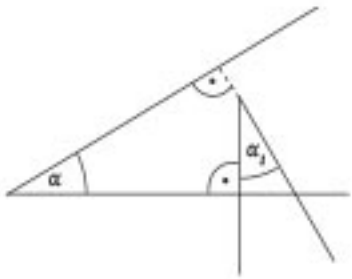
Tabloyu defterine geçir ve doldur.

Açı çifti	Açıların ölçüsü	Açıların karşılaştırılması (eşit ya da farklı)	Açıların toplamı
α ve α_1			
β ve β_1			
γ ve γ_1			
δ ve δ_1			

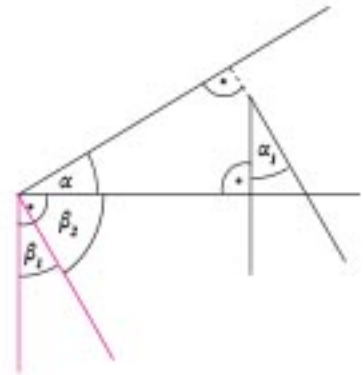
Etkinlikte incelenen α ve α_1, β ve β_1, γ ve γ_1, δ ve δ_1 açı çiftleri, **kenarları dik olan açılara** örnektir.

Kenarları dik olan iki açının ölçüleri arasındaki ilişkiyi belirlemek için aşağıdaki iki durumu inceleyelim:

1. Çizim 7a'da α ve α_1 açıları kenarları dik olan açılardır.



çiz. 7a



çiz. 7b

Çizim 7b'de β_1 açısı, α açısı ile aynı köşeye sahip olacak şekilde çizilmiştir. Böylece α_1 ve β_1 açıları, aynı yönlü kenarları paralel olan açılardır. Şunları fark ederiz:

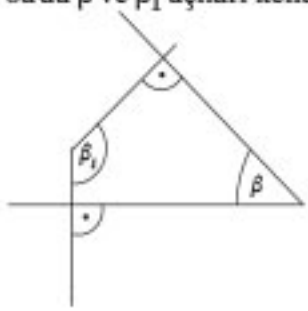
$\alpha_1 = \beta_1$ (aynı yönlü, kenarları paralel olan açılar olduklarından).

$\alpha + \beta_2 = 90°$ ve $\beta_1 + \beta_2 = 90°$;

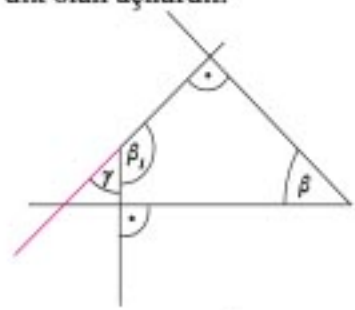
$\alpha = 90° - \beta_2$ ve $\beta_1 = 90° - \beta_2$ olduğundan $\alpha = \beta_1$ elde edilir;

$\alpha = \beta_1$ ve $\alpha_1 = \beta_1$ olduğundan $\alpha = \alpha_1$ elde edilir.

2. Çizim 8a'da β ve β_1 açıları kenarları birbirine dik olan açılardır.



çiz. 8a



çiz. 8b

Çizim 8b'de γ açısı, β_1 açısı ile aynı köşeye sahip olacak şekilde çizilmiştir. Böylece γ ve β açıları kenarları dik olan açılardır. Şunları fark ederiz:

$\beta = \gamma$ (önceki durumda olduğu gibi kenarları birbirine dik olan açılar),

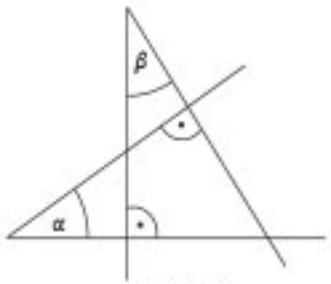
$\gamma + \beta_1 = 180°$;

$\beta = \gamma$ ve $\gamma + \beta_1 = 180°$ olduğundan $\beta + \beta_1 = 180°$ elde edilir.

Kenarları dik olan açılar ya eşittir ya da bütünlerdir.

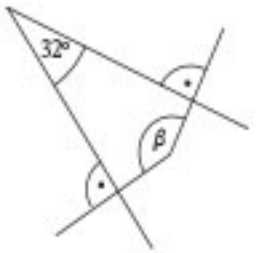
Alıştırma 4

a) Çizim 9'da α açısı ile β açısı birbirine göre nasıldır?



çiz. 9

b) Çizim 10'da β açısının ölçüsünü hesapla.



çiz. 10

Alıştırma 5

α ve β açıları, kenarları birbirine dik olan açılardır. $\alpha = 151°$ olduğuna göre β açısının alabileceği değerleri çizim yaparak bul.

Alıştırma 6

Bir bahçede çit ve yol, 60°'lik açı oluşturacak şekilde kesişmektedir. Bahçe sahibi, bir bankı uzun kenarı çite dik olacak şekilde yerleştirmiştir. Daha sonra, devamında yola dik olacak şekilde bir çiçek tarhı oluşturmuştur.

a) Çiti, yolu, bankı ve çiçek tarhını gösteren bir kroki çiz.

b) Bank ile çiçek tarhı arasındaki açı kaç derecedir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Resim 2'de, evlerin ve oyun alanının bulunduğu bir yerleşim yerinin bir bölümüne ait plan verilmiştir.

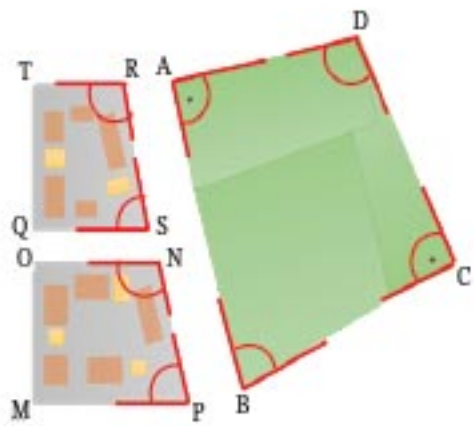
a) Aşağıdaki boşlukları sembollerle tamamla:
" $\parallel$ " – " paraleldir " ve
" $\perp$ " – " diktir ":
PM ___ SQ, PN ___ SR, DA ___ AB,
DC ___ CB, RT ___ NO.

b) Kenarları paralel olan açı çiftlerini yaz.

c) Kenarları dik olan açı çiftlerini yaz.

d) $\measuredangle MPN = 65°$ ise $\measuredangle ONP$, $\measuredangle QSR$ ve $\measuredangle SRT$ açılarının ölçülerini hesapla.

e) $\measuredangle ADC = 110°$ ise $\measuredangle ABC$ açısının ölçüsünü hesapla.



Resim 2

2. İstediğin bir dar açı α, istediğin bir geniş açı β ve bunların iç bölgelerinde sırasıyla S ve P noktalarını çiz. Aşağıdaki açıları çiz:

a) Kenarları α açısının kenarlarına paralel ve aynı yönlü olan ASB açısı,

b) Kenarları β açısının kenarlarına paralel ve zıt yönlü olan CPD açısı.

3. *AOB* ve *COD* açılarını ve bunların iç bölgelerinde sırasıyla *T* ve *Q* noktalarını çiz. Aşağıdaki açıları çiz:
   a) Kenarları *AOB* açısının kenarlarına paralel olan *ETF* açısı. *TE* kenarı, *OA* kenarı ile aynı yönde; *TF* kenarı ise *OB* kenarı ile zıt yönde olsun.
   b) Kenarları *COD* açısının kenarlarına paralel olan *GQH* açısı. *QH* kenarı, *OC* kenarı ile zıt yönde; *QG* kenarı ise *OD* kenarı ile aynı yönde olsun.

4. Bir α açısı çiz ve iç bölgesinde *M* noktasını işaretle. Daha sonra köşesi *M* noktası olan ve kenarları α açısının kenarlarına dik olan bir açı çiz. Böyle kaç açı vardır?

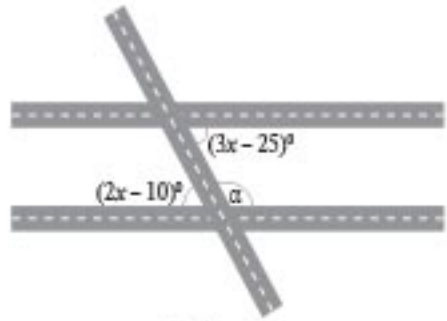
5. Kenarları paralel olan iki açıdan biri 56°'dir. Diğer açı kaç derecedir?
   a) Kenarları aynı yönlü ise,
   b) Kenarları zıt yönlü ise,
   c) Bir kenar çifti aynı, diğer kenar çifti zıt yönlü ise?

6. Kenarları paralel olan α ve β açılarını bul:
   a) Toplamları 154° ise, b) Farkları 76° ise.

7. Kenarları dik olan α ve β açılarını bul: a) $\alpha = 125° + \beta$ ise, b) $\alpha = 3\beta$ ise.

8. İki paralel cadde, Resim 3'te gösterildiği gibi üçüncü bir cadde ile kesilmiştir. α açısını bul.

9. Bir şehirde *A* ve *B* caddeleri 55°'lik açıyla kesişmektedir. Planda şehir plancısı, *C* caddesini *A*'ya dik olacak şekilde ve *D* caddesini *B*'ye dik olacak şekilde çizer.
   a) *A*, *B*, *C* ve *D* caddelerini gösteren bir kroki çiz.
   b) *C* ve *D* caddeleri arasındaki açı kaç derecedir?
   c) *A* ile *B* arasındaki açı ve *C* ile *D* arasındaki açı hangi tür açılardır?



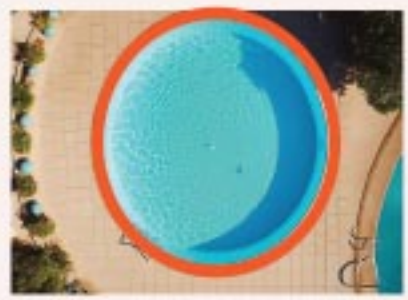
Resim 3

2. ÇEMBER, DAİRE VE ELEMANLARI

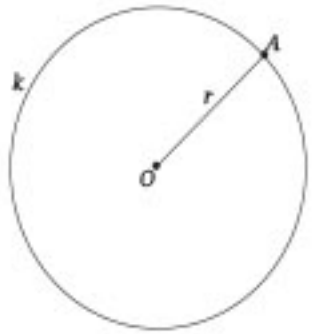
Çember ve Daire

Etkinlik

Çember ve daire kavramları, geometrinin önemli kavramları arasında yer alır.
a) Resim 1'de hangisinin çember, hangisinin daire olduğunu belirle.
b) Bu iki şekil arasındaki fark nedir?


Resim 1

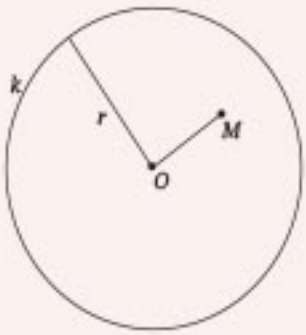
Hatırlayalım, **çember**; düzlemde verilen bir O noktasına eşit uzaklıkta bulunan tüm A noktalarının kümesidir (Çizim 1).
$r = \overline{OA}$ uzunluğuna çemberin **yarıçapı** denir.
Ancak yarıçap, merkezi çember üzerindeki herhangi bir noktaya bağlayan doğru parçasını da ifade edebilir.
Merkezi O noktası ve yarıçapı r olan çember, $I(O, r)$ veya sadece k ile gösterilir.



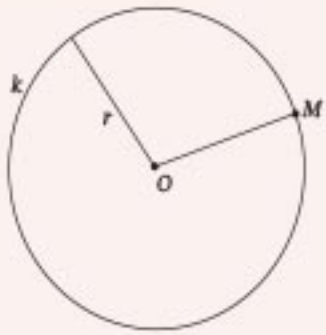
çiz. 1

Etkinlik

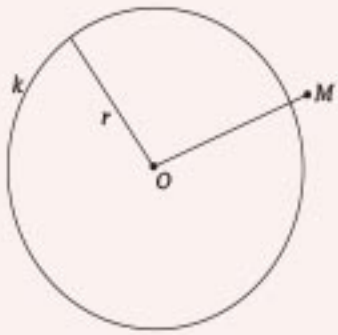
M noktasının çemberin merkezi O noktasına olan uzaklığı:
a) r'den küçükse (Çizim 2a), b) r'ye eşitse (Çizim 2b), c) r'den büyükse (Çizim 2c),
M noktasının k çemberine göre konumu nasıldır?



çiz. 2a

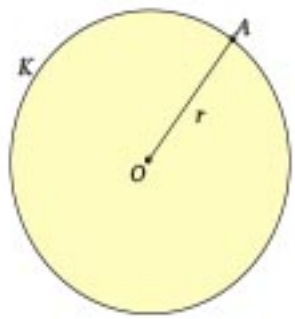


çiz. 2b



çiz. 2c

Hatırlayalım, **daire**; düzlemde verilen bir O noktasına uzaklığı r'den küçük veya r'ye eşit olan tüm A noktalarının kümesidir (Çizim 3).
Her daire bir çemberden ve onun iç bölgesinden oluşur.
A noktası çember üzerinde ise $r = \overline{OA}$ uzunluğuna dairenin **yarıçapı** denir.
Merkezi O noktası ve yarıçapı r olan daire, $K(O, r)$ veya sadece K ile gösterilir.



çiz. 3

Alıştırma 1

Çiz:
a) Merkezi herhangi bir noktada olan ve yarıçapı 2 cm olan bir çember,
b) Merkezi herhangi bir noktada olan ve yarıçapı 3 cm olan bir daire,
c) Merkezi ortak olan, yarıçapları 3 cm ve 4 cm olan iki eş merkezli çember.

Daire Halkası

Etkinlik

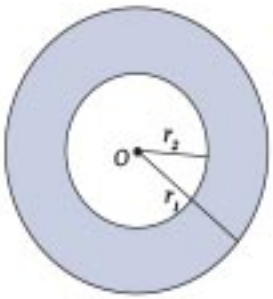
Resim 2'de çevrenden bazı nesneler verilmiştir. Tüm nesnelerde görülen 2 boyutlu bir şekil fark ediyor musun? Onu sözlerle açıkla.



Resim 2

İki eş merkezli çember arasında kalan düzlem bölgesine **daire halkası** (simit) denir.

Çizim 4'te, merkezi O noktası olan ve yarıçapları r_1 ile r_2 olan iki eş merkezli çemberle sınırlanan daire halkası gösterilmiştir.
İki eş merkezli çember de daire halkasına aittir.



çiz. 4

Alıştırma 2

Yarıçapları 3 cm ve 5 cm olan iki eş merkezli çember çiz, ardından bunların belirlediği daire halkasını boya.

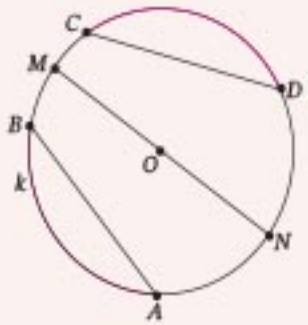
Alıştırma 3

Bir spor sahasında, yarıçapları 10 m ve 12 m olan çemberlerle belirlenen daire halkası şeklinde bir koşu pisti vardır.
a) Pistin krokisini çiz ve pisti boya.
b) Pistin genişliği kaç metredir?

Daire Kesmesi

Etkinlik

1. a) Çemberin kirişi nedir? Çizim 5'te verilen k çemberindeki kirişleri adlandır.
b) Çemberin çapı nedir? Verilen çemberin çapını adlandır.
c) Çember yayı nedir? Sırasıyla AB ve CD kirişlerine karşılık gelen çember yaylarını adlandır. MN çapına karşılık gelen çember yayı nasıl adlandırılır?
d) Sırasıyla $\overset{\frown}{AB}$ yayı ve $\overset{\frown}{CD}$ yayına karşılık gelen kirişleri adlandır. $\overset{\frown}{MN}$ yayına hangi kiriş karşılık gelir?



çiz. 5

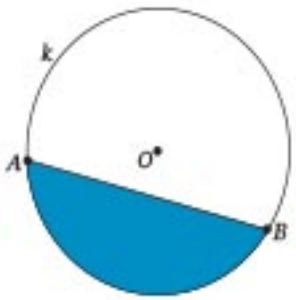
2. Çizim 3'teki tüm nesnelerde görülen 2 boyutlu şekli açıkla.



Resim 3

Bir dairede bir kiriş ile bu kirişin ayırdığı yay arasında kalan düzlem bölgesine **daire kesmesi (daire dilim parçası)** denir.
Kiriş dairenin çapı olduğunda oluşan daire kesmelerinin her birine **yarım daire** denir.

Çizim 6'da, AB kirişinin daireden ayırdığı daire parçası gösterilmiştir.
AB kirişi ve $\overset{\frown}{AB}$ yayı daire parçasına aittir.



çiz. 6

Alıştırma 4

Yarıçapı 4 cm olan bir çember ve uzunluğu 6 cm olan MN kirişi çiz. Daha sonra MN kirişi ve bu kirişe karşılık gelen $\overset{\frown}{MN}$ yayı ile belirlenen küçük daire kesmesini boya.

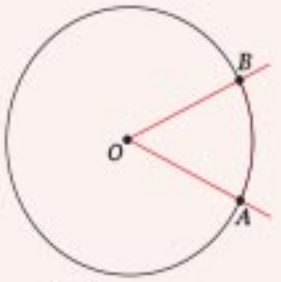
Alıştırma 5

Marko okul gösterisi için bir süs hazırlamaktadır. Yeşil renkli bir daireden bir parça ve kırmızı renkli bir daireden başka bir parça kesmiştir. Marko hangi durumda kesilen parçalardan bir daire oluşturabilir? Cevabını gerekçelendir.

Daire Dilimi

Etkinlik

1. Çizim 7'deki AOB açısı nasıl adlandırılır?



çiz. 7

2. Resim 4'teki tüm nesnelerde görülen 2 boyutlu şekli açıkla.

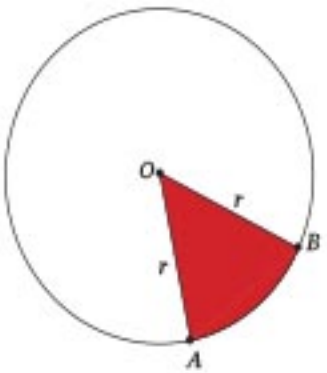


Resim 4

Bir dairede iki yarıçap ile bu yarıçaplar arasında kalan çember yayı tarafından sınırlanan düzlem bölgesine **daire dilimi** denir.

Çizim 8'de, OA ve OB yarıçapları ile bu yarıçapların arasında kalan $\overset{\frown}{AB}$ yayı tarafından sınırlanan daire dilimi gösterilmiştir.

OA ve OB yarıçapları ile $\overset{\frown}{AB}$ yayı daire dilimine aittir.
Her merkez açıya bir daire dilimi karşılık gelir ve tersine, her daire dilimine bir merkez açı karşılık gelir.



çiz. 8

Alıştırma 6

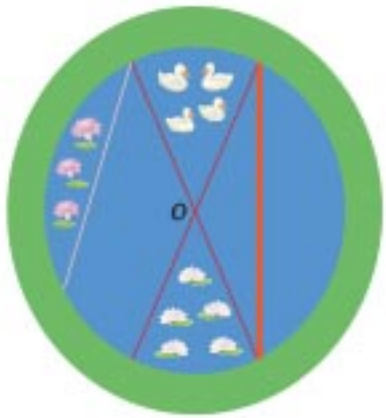
Yarıçapı 3 cm olan bir daire çiz, ardından iki yarıçapı ve 90°'lik merkez açıya karşılık gelen çember yayı ile belirlenen bir daire dilimini boya.

Alıştırma 7

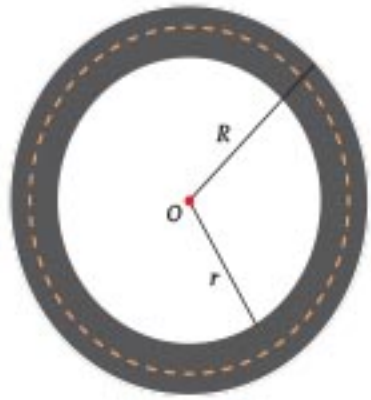
Bir pizza, yarıçapı $r = 15$ cm olan bir daire şeklindedir. Pizza 8 eş parçaya kesilmiştir.
a) Bir pizza dilimi hangi geometrik şekle sahiptir?
b) Pizzanın bir diliminin merkez açısı kaç derecedir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Daire şeklindeki bir arsada, etrafında çim alan bulunan bir gölet ve göletin üzerinden geçen bir köprü yer almaktadır (Resim 5).
   a) Dairesel arsanın çim alan olan kısmı nasıl adlandırılır?
   b) Köprü ile ayrılan göletin küçük kısmı nasıl adlandırılır?
   c) Göletin ördeklerin bulunduğu kısmı nasıl adlandırılır?
   d) Ördeklerin bulunduğu bölüm ile beyaz nilüferlerin bulunduğu bölümü büyüklük bakımından karşılaştır.
   e) Gölet resminde kaç tane daire parçası gösterilmiştir?
   f) Gölet resminde kaç tane daire dilimi gösterilmiştir?



Resim 5

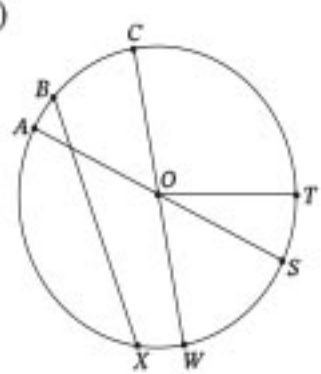


Resim 6

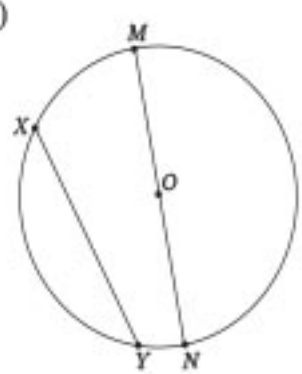
2. Resim 6'daki dairesel yolun taşıt yolu genişliği, $R = 87{,}2$ m ve $r = 82{,}7$ m ise kaç metredir?

3. Çizim 9'da gördüğün tüm daire dilimlerini adlandır.

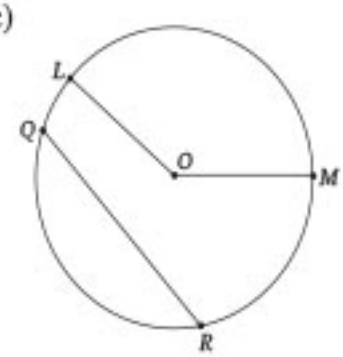
a)



b)



c)



çiz. 9

4. Çizim 9'da gördüğün tüm daire parçalarını adlandır.

5. Verilenleri çiz:
   a) Yarıçapları 2 cm ve 5 cm olan iki eş merkezli çemberle sınırlanan dairesel halka,
   b) 120°'lik merkez açıya karşılık gelen, yarıçapı 3 cm olan daire dilimi,
   c) 60°'lik merkez açıya karşılık gelen, yarıçapı 4 cm olan daire parçası.

6. Proje Görevi

Aynı tasarıma sahip 4 karo ile Çizim 7'de gösterildiği gibi 2 farklı şekil oluşturulmuştur.



çiz. 7

Çizim 8'de verilen tasarımları, kenar uzunluğu 10 cm olan kare şeklindeki bir karo üzerine çiz. Kartondan en az 4 tane aynı karo hazırla ve örnekteki gibi bir araya getir. Bunu daha fazla farklı şekilde yapmayı dene.

a)



b)



çiz. 8

3. ÇEVRE AÇI

Etkinlik

Ana, *O* çemberinin merkezinde bulunmaktadır. İki ağaç arasındaki çember yayını *BOC* açısı altında görmektedir. İlir ise çemberin A noktasında bulunmaktadır.

a) *BOC* açısı nasıl adlandırılır?

b) Aynı çember yayını *A* noktasından göreceği açının köşesi ve kenarları hangileri olacaktır (Resim 1)?



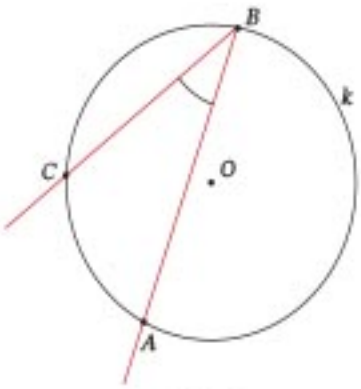
Resim 1

Köşesi çember üzerinde olan ve kenarları çemberi kesen açıya **çevre açı** denir.

Çizim 1'de merkezi O olan k çemberi ve köşesi çember üzerinde bulunan ABC açısı verilmiştir. Açının kenarları, çember üzerinde köşe B'nin bulunmadığı $\overset{\frown}{AC}$ yayını ayırır.

ABC açısı, $\overset{\frown}{AC}$ yayı üzerindeki çevre açıdır.

ABC çevre açısının bölgesinde bulunan $\overset{\frown}{AC}$ yayının, ABC çevre açısına **karşılık** geldiği söylenir.



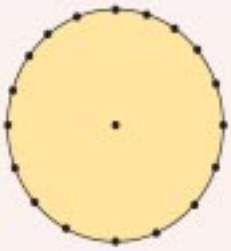
çiz. 1

Etkinlik

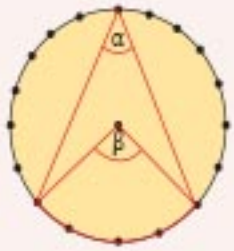
Çemberdeki açılar arasındaki ilişkileri daha kolay görebilmek için kendi "açı çemberini" yap. Gerekli malzemeler: bir parça karton, strafor, açıölçer, lastik ve kâğıt malzemeleri strafora sabitlemek için top başlı yaklaşık 20 iğne.

Hazırlık: Karton üzerine pergel ile yarıçapı yaklaşık 10 cm olan bir çember çiz. Çemberi strafora sabitle; bunun için iğneleri çember boyunca yaklaşık eşit aralıklarla yerleştir.

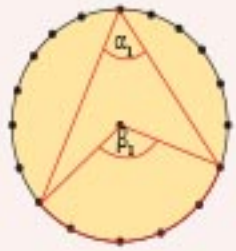
Bir iğneyi çemberin merkezine yerleştir (Çizim 2a). Lastiği Çizim 2b'deki gibi yerleştir. Merkez açıyı ve çevre açıyı sırasıyla α ve β ile göster. α ve β açılarını açıölçerle ölç, ardından büyüklüklerini karşılaştır. Açı çemberindeki yayı değiştir ve merkez açıyı ve çevre açıyı sırasıyla α_1 ve β_1 ile göster (Çizim 2c). α_1 ve β_1 açılarını ölç ve karşılaştır. Açı çemberindeki yayı değiştirerek işlemi birkaç kez daha tekrarla. Aynı çember yayı üzerindeki çevre açı ile merkez açının ölçüleri hakkında ne sonuç çıkarabilirsin?



çiz. 2a



çiz. 2b

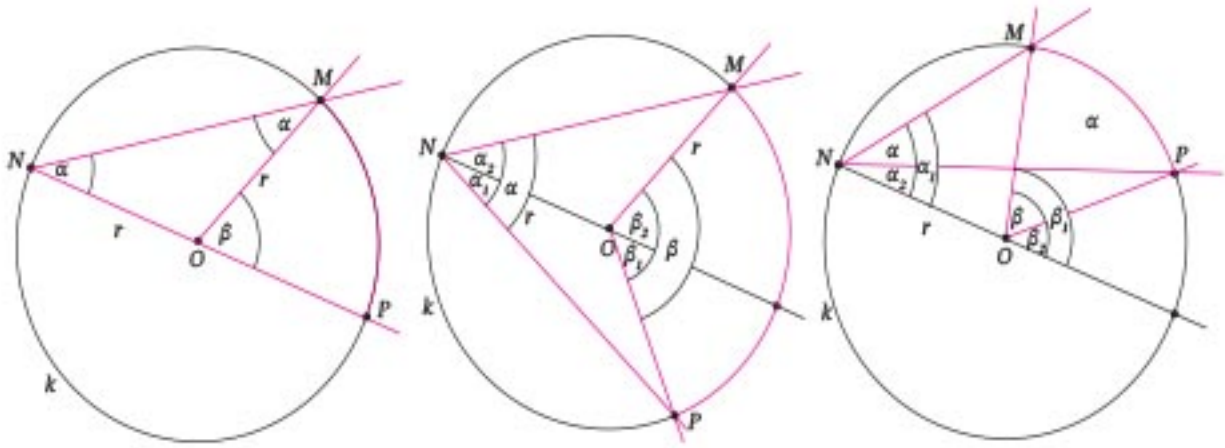


çiz. 2c

Aynı çember yayı üzerindeki merkez açının ölçüsü ile çevre açının ölçüsü arasındaki ilişkiyi belirlemek için aşağıdaki üç durumu inceleyelim:

1. Çemberin merkezi, çevre açının kenarlarından biri üzerinde bulunur (Çizim 2a). OMN üçgeni ikizkenardır, bu nedenle dış açısı β için

   $2\alpha = \beta$, $\alpha = \frac{\beta}{2}$ olur. Burada α, üçgenin taban açısıdır.



çiz. 2a çiz. 2b çiz. 2c

2. Çemberin merkezi, çevre açının bölgesinde bulunur (Çizim 2b). Şekle göre $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ ve $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ olduğunu buluruz. O hâlde

$$2\alpha = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

3. Çemberin merkezi, çevre açının bölgesinin dışında bulunur (Çizim 2c). Şekle göre $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ ve $\beta_1 - \beta_2 = \beta$ olduğunu buluruz. O hâlde

$$2\alpha = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Bir çemberde aynı yayı gören çevre açının ölçüsü, merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.

Örnek 1

Aşağıdaki merkez açılarla aynı çember yayı üzerinde bulunan çevre açıyı bul:
a) 130°, b) 215°.

Hesaplayacağımız çevre açıyı α ile gösterelim.
Aynı çember yayı üzerindeki çevre açı, merkez açı β'nin yarısı olduğundan:

a) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$,

b) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{215^\circ}{2} = 107^\circ 30'$.

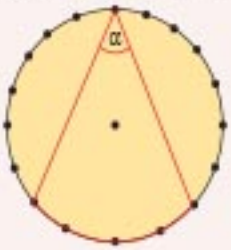
Alıştırma 1

Çemberin $\frac{1}{6}$'sına karşılık gelen yay üzerindeki çevre açının ölçüsünü bul.

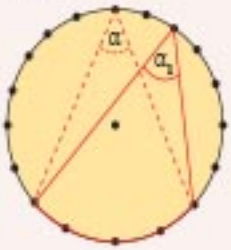
Etkinlik

Yine açı çemberini kullanacağız (Çizim 3a). α açısını ölç. Lastiği, α açısının köşesinden çember üzerindeki başka bir iğneye Çizim 3b'deki gibi taşı. Oluşan α_1 açısını ölç. Açının köşesini farklı noktalara taşıyarak işlemi birkaç kez daha tekrarla.

Ölçtüğün açıların büyüklükleri hakkında ne sonuç çıkarırsın?



çiz. 3a

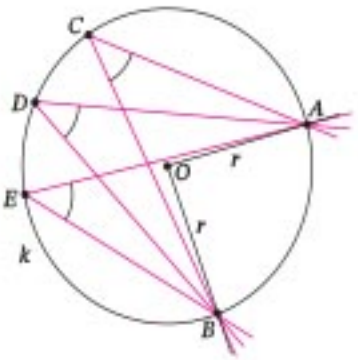


çiz. 3b

Ölçümleri doğru yaptıysan, aynı çember yayı üzerindeki çevre açıların birbirine eşit olduğunu kesin olarak belirlemiş olmalısın. Aynı sonuca, Çizim 3'teki *k* çemberinde *AB* yayı üzerindeki çevre açıların ölçülerini ölçüp karşılaştırarak da ulaşabilirsin.

Şöyle düşünebiliriz:

Her çevre açının ölçüsü, aynı yay üzerindeki merkez açının ölçüsünün yarısına eşit olduğundan, aynı çember yayı üzerindeki bütün çevre açılar birbirine eşittir.

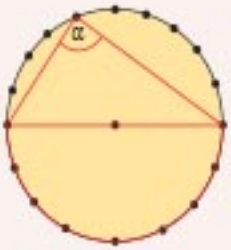


çiz. 3

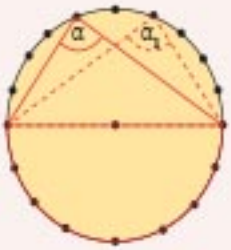
Bir çemberde, aynı çember yayı üzerindeki bütün çevre açılar **birbirine eşittir.**

Etkinlik

Açı çemberindeki lastiği, merkez açı doğru açı olacak şekilde yerleştir. Bu durumda çevre açı, Çizim 4a'daki gibi yarım çember üzerinde olacaktır. α açısını ölç (Çizim 4b). Lastiği, α açısının köşesinden çember üzerindeki başka bir iğneye şekilde gösterildiği gibi taşı. Oluşan α_1 açısını ölç. Açının köşesini farklı noktalara taşıyarak işlemi birkaç kez daha tekrarla. Ölçtüğün açıların büyüklükleri hakkında ne sonuç çıkarırsın?

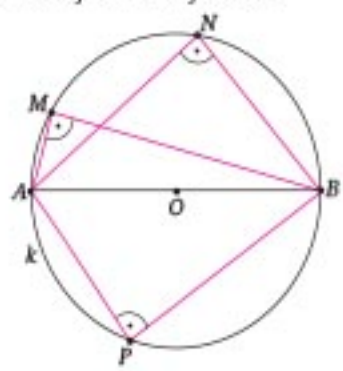


çiz. 4a



çiz. 4b

Ölçümleri doğru yaptıysan, yarım çember üzerindeki çevre açıların dik açı olduğunu kesin olarak belirlemiş olmalısın.
Aynı sonuca, Çizim 4'teki *k* çemberinde *AOB* merkez açısı üzerindeki çevre açıların ölçülerini açıölçerle ölçüp karşılaştırarak da ulaşabilirsin. Şöyle düşünebiliriz:
Aynı çember yayı üzerindeki her çevre açının ölçüsü,
aynı yay üzerindeki merkez açının ölçüsünün yarısına eşit
olduğundan, yarım çember üzerindeki bütün çevre açılar dik açıdır.
Bu özellik, **Thales Teoremi** olarak bilinir.



çiz. 4

Yarım çember üzerindeki her çevre açı **dik** açıdır.

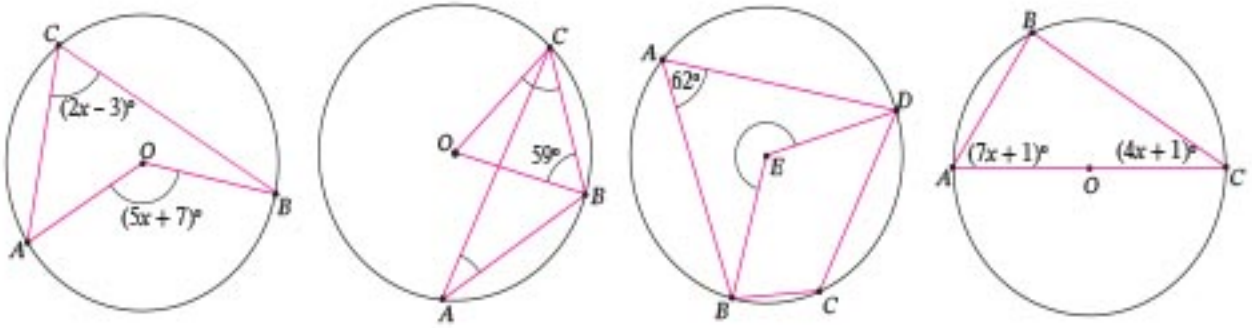
Yarım çemberin, çemberin çapına karşılık geldiğini göz önünde bulundurursak, çemberin çapı üzerindeki her çevre açının dik açı olduğunu söyleyebiliriz.
Buradan, çapı *AB* olan bir çember üzerindeki bütün noktaların (*A* ve *B* noktaları hariç), hipotenüsü *AB* olan bir dik üçgenin köşeleri olduğu sonucuna varırız.

Alıştırma 2

Bir p doğrusu ve bu doğru üzerinde bulunmayan *A* ve *B* noktaları verilmiştir. p doğrusu üzerinde, *AMB* açısı dik olacak şekilde *M* noktasını çiz.
Yönerge: *AB* doğru parçası çap olacak şekilde bir çember çiz. Çemberin verilen p doğrusu ile kesişim noktasını *M* ile göster. *AMB* açısı, *AB* çapı üzerindeki çevre açıdır.

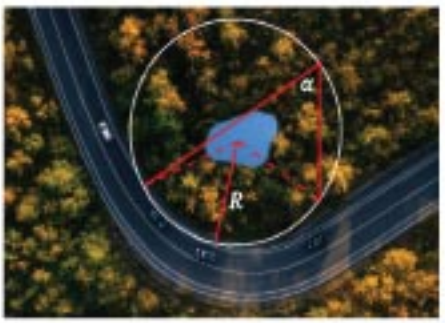
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki merkez açılarla aynı çember yayı üzerinde bulunan çevre açıyı bul:
   a) 158°, b) 89°.
2. Aşağıdaki çevre açılarla aynı çember yayı üzerinde bulunan merkez açıyı bul:
   a) 32°, b) 83°.
3. Çemberin aşağıdaki kısmını oluşturan yay üzerindeki çevre açı kaç derecedir?
   a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{4}{9}$, c) $\frac{5}{6}$, d) $\frac{3}{5}$.
4. Bir çemberde merkez açı hangi sınırlar arasında değişir, çevre açı hangi sınırlar arasında değişir?
5. Bir çemberde çevre açının ölçüsü ile ona karşılık gelen merkez açının ölçüsünün toplamı 150°'dir. İki açının ölçüsünü hesapla.
6. Çizim 5'e göre açıların ölçülerini bul:
   a) $\sphericalangle ACB$ ve $\sphericalangle AOB$, b) $\sphericalangle CAB$, c) $\sphericalangle BED$ ve $\sphericalangle BCD$, d) $\sphericalangle BAC$ ve $\sphericalangle ACB$.



çiz. 5

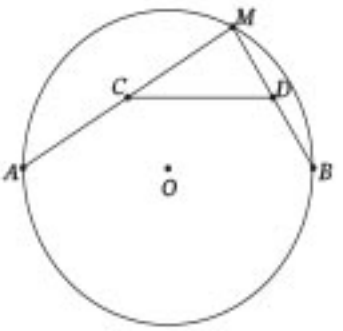
7. Resim 5'te, çember üzerindeki bir noktadan $\alpha = 58°$'lik açıyla görülen çember parçası verilmiştir. Aynı parça, çemberin merkezinden hangi açıyla görülür?



Resim 5

8. k (O, r) çemberinin *M* noktasından birbirine dik *MA* ve *MB* kirişleri çizilmiştir (Çizim 6). Kirişlerin orta noktaları *C* ve *D* arasındaki uzaklık 2,5 cm'dir. Çemberin çapını hesapla.

Yönerge: Üçgende orta taban özelliğini uygula.



çiz. 6

Araştırma

Çalışma için gerekli araç gereçler: kalem, çiviler ve ip.
İpin bir ucuna kalemi, diğer ucuna çiviyi bağla. *O* noktası çiz. Çiviyi *O* noktasına batır ve ipi gererek bir çember çiz.
Çember üzerinde *A* noktasını seç ve önceki işlemle aynı şekilde merkezi *A* olan bir çember çiz. *B*, iki çemberin kesişim noktalarından biri olsun. Yine yukarıdaki gibi merkezi *B* olan bir çember çiz. C, üçüncü çember ile birinci çemberin A'dan farklı olan kesişim noktası olsun. *AC* doğru parçası, birinci çember için neyi ifade eder?
Birinci çember üzerinde *D* noktasını seç. *A*, *C* ve *D* noktalarına çiviler batır. Daha sonra ipi batırılmış çivilerin etrafına ger. *CDA* açısı kaç derecedir?
Cevabını gerekçelendir.

4. BAZI ÖZEL ÜÇGEN ÇEŞİTLERİNİN ÇİZİMLERİ

Etkinlik

İso, kenar uzunluğu 3 cm olan eşkenar üçgen şeklindeki trafik işaretinin doğru bir çizimini yapmak istemektedir (Resim 1).
İso'ya işareti çizmesinde yardımcı ol.



Resim 1

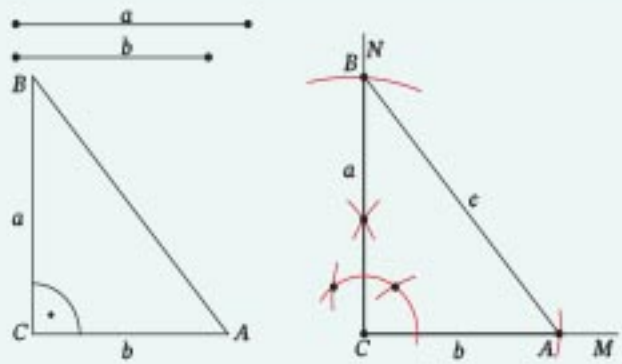
İki Kenarının Uzunluğu Verilen Dik Üçgenin Çizimi

Hatırlayalım ki bir üçgenin çizim işlemine, istenen üçgenin serbest elle çizilmiş bir **taslağı** ile başlanır. Daha sonra, taslağa dayanarak üçgenin verilen elemanları ile diğer elemanları arasındaki ilişkiyi **analiz** ederiz. Son olarak, yaptığımız analize göre üçgenin **çiziminde** uygulanacak adımları belirleriz.

Örnek 1

Dik kenar uzunlukları a ve b olan bir dik üçgen çiz.

Çizim 1'de, dik kenarları a ve b olan ABC dik üçgeninin taslağı verilmiştir.
Dik üçgende dik kenarlar bir dik açı oluşturur. Buna göre çizim, iki kenarı ve bu kenarlar arasındaki açısı verilen bir üçgenin çizimine indirgenir.
Çizim aşağıdaki adımlardan oluşur:



çiz. 1

- Üçgenin bir köşesi olacak şekilde C noktasından geçen CM ışınını çiz.
- Pergel yardımıyla CM ışını üzerinde b uzunluğunu işaretleyerek A köşesini elde et.
- Köşesi C olan ve bir kenarı CM ışını üzerinde bulunan bir dik açı oluştur.
- Dik açının diğer kenarı olan CN ışını üzerinde pergel yardımıyla a uzunluğunu işaretleyerek üçgenin B köşesini elde et.
- A ve B köşelerini birleştirerek ABC üçgeninin üçüncü kenarını elde et.

Alıştırma 1

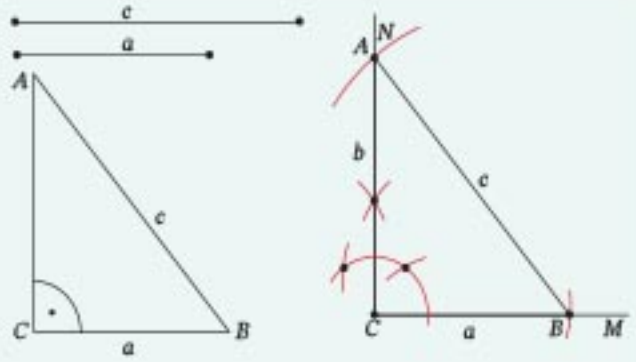
Kenar uzunlukları $a = 3{,}6$ cm ve $b = 4{,}5$ cm olan bir dik üçgen çiz.

Örnek 2

Hipotenüsü c ve bir dik kenarı a olarak verilen bir dik üçgen çiz.

Çizim 2'de, cetvelle a dik kenarı ve c hipotenüsü çizilmiştir. Ayrıca, hipotenüsü c ve dik kenarı a olan istenen ABC dik üçgeninin taslağı yapılmıştır.
Çizim aşağıdaki adımlardan oluşur:

- Üçgenin bir köşesi olacak şekilde C noktasından geçen CM ışınını çiz.
- Pergel yardımıyla CM ışını üzerinde a dik kenarını işaretleyerek B köşesini elde et.
- Köşesi C olan ve bir kenarı CM ışını üzerinde bulunan bir dik açı oluştur.
- Dik açının diğer kenarını CN olarak adlandır.
- Merkezi B noktası ve yarıçapı c olan çember yayının CN kenarı ile kesişim noktasını A olarak adlandır.
- A ve B köşelerini birleştirerek ABC üçgeninin üçüncü kenarını elde et.



çiz. 2

Alıştırma 2

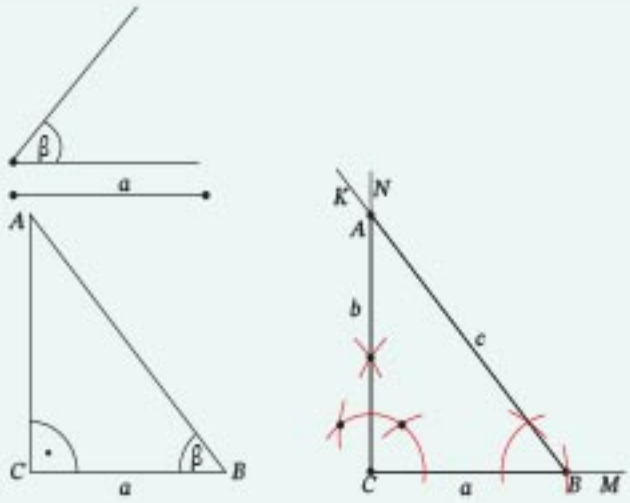
Hipotenüsü $c = 7$ cm ve dik kenarı $b = 3{,}4$ cm olan bir dik üçgen çiz.

Örnek 3

Dik kenarı a ve β açısı verilen bir dik üçgen çiz.

Dik kenarı a ve β açısı verilen istenen ABC dik üçgeninin taslağı Çizim 3'te verilmiştir.
Çizim aşağıdaki adımlardan oluşur:

- CM ışınını çiz.
- Pergel yardımıyla CM ışını üzerinde a dik kenarını işaretleyerek B köşesini elde et.
- Köşesi C olan bir dik açı oluştur.
- Dik açının diğer kenarını CN olarak adlandır.
- B köşesinde ve bir kenarı BC olacak şekilde β açısını oluştur.
- β açısının diğer kenarını BK olarak adlandır.
- CN ve BK ışınlarının kesişim noktasında ABC üçgeninin üçüncü köşesi olan A noktasını elde et.



çiz. 3

Alıştırma 3

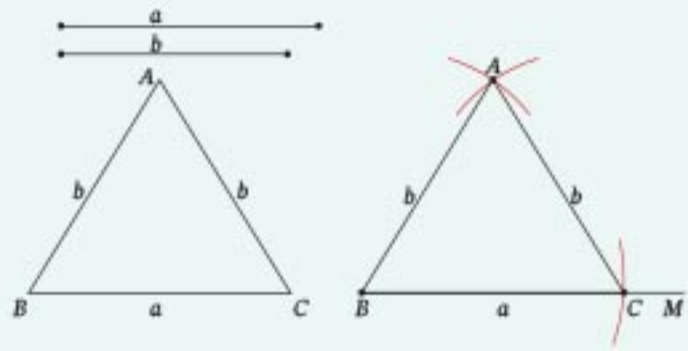
Hipotenüsü $c = 5$ cm ve $\alpha = 60°$ açısı verilen bir dik üçgen çiz.

İki Elemanı Verilen İkizkenar Üçgenin Çizimi

Örnek 4

Tabanı a ve eş kenarı b verilen bir ikizkenar üçgen çiz.

Çizim 4'te, tabanı a ve eş kenarı b olan istenen ABC ikizkenar üçgeninin taslağı verilmiştir. İkizkenar üçgende eş kenarların eşit olduğunu biliyoruz. Buna göre çizim, üç kenarı verilen bir üçgenin çizimine indirgenir.



çiz. 4

Çizim aşağıdaki adımlardan oluşur:

- Başlangıç noktası B olan BM ışınını çiz.
- BM ışını üzerinde a tabanını işaretleyerek C köşesini elde et.
- Merkezi B ve yarıçapı b olan bir çember yayı çiz.
- Merkezi C ve yarıçapı b olan bir çember yayı çiz.
- İki çember yayının kesişim noktasını A ile adlandır. A, üçgenin üçüncü köşesidir.
- ABC üçgenini elde etmek için A köşesini B ve C köşeleriyle birleştir.

Alıştırma 4

Eş kenarı $b = 5$ cm ve taban açısı $\alpha = 45°$ olan bir ikizkenar üçgen çiz.

Örnek 5

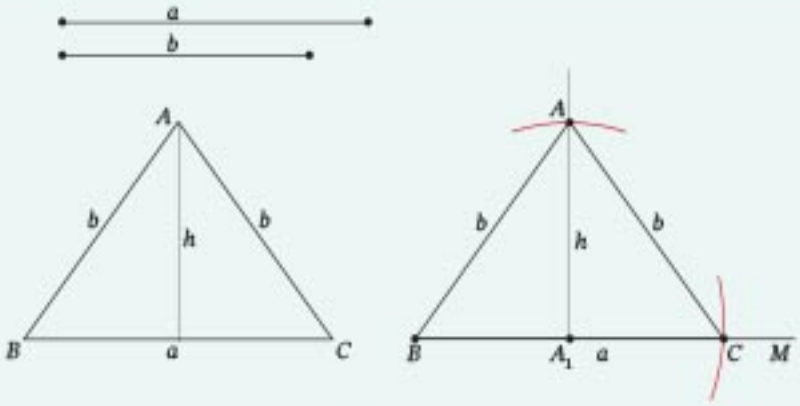
Tabanı a ve tabana ait yüksekliği h verilen bir ikizkenar üçgen çiz.

Çizim 5'te, tabanı a ve tabana ait yüksekliği h olan istenen ABC ikizkenar üçgeninin taslağı verilmiştir. İkizkenar üçgende tabana ait yüksekliğin ayağının, tabanın orta noktası olduğunu biliyoruz.

Çizim aşağıdaki adımlardan oluşur:

- Başlangıç noktası B olan BM ışınını çiz.

- *BM* ışını üzerinde a tabanını işaretleyerek C köşesini elde et.
- *BC* doğru parçasının orta dikmesini çiz.
- Orta dikme ile *BC* doğru parçasının kesişim noktasını A_1 ile adlandır.
- Merkezi A_1 ve yarıçapı h olan bir çember yayı çiz.



çiz. 5

- Orta dikme ile çember yayının kesişim noktasını *A* ile adlandır.
- *ABC* üçgenini elde etmek için *A* köşesini *B* ve *C* köşeleriyle birleştir.

Alıştırma 5

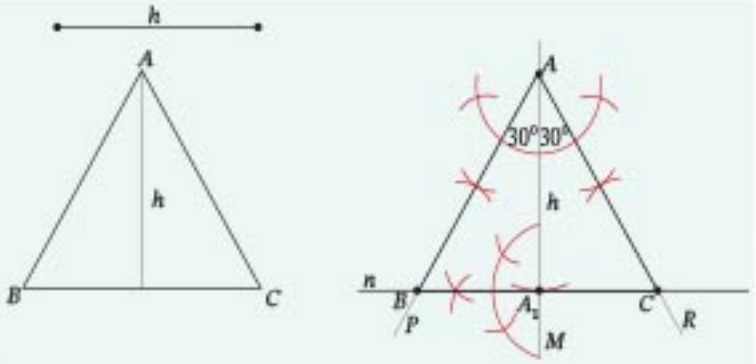
Eş kenarı *b* ve tabana indirilen yüksekliği h verilen bir ikizkenar üçgen çiz.

Eşkenar Üçgenin Verilen Yüksekliğine veya Verilen Kenarortayına Göre Çizimi

Örnek 6

Yüksekliği h verilen bir eşkenar üçgen çiz.

Çizim 6'da, *A* köşesinden indirilen yüksekliği h olan istenen *ABC* eşkenar üçgeninin taslağı verilmiştir.
Çizim aşağıdaki adımlardan oluşur:



çiz. 6

- Başlangıç noktası A olan *AM* ışınını çiz.
- *AM* ışını üzerinde, *A* noktasından başlayarak h yüksekliğini işaretle ve yüksekliğin ayağı olan A_1 noktasını elde et.
- *A* noktasında, yüksekliğin h doğrultusunun solunda ve sağında olmak üzere 30° ölçüsünde *MAP* ve *MAR* açılarını oluştur.
- A_1 noktasından geçen ve AA_1 doğrusuna dik olan n doğrusunu çiz.
- n doğrusu ile *AP* ışınının kesişim noktasını *B* olarak adlandır.
- n doğrusu ile *AR* ışınının kesişim noktasını *C* olarak adlandır.
- İstenen üçgen *ABC* üçgenidir.

Örnek 7

Kenarortayı t verilen bir eşkenar üçgen çiz.

Eşkenar üçgende kenarortay, yükseklik ile çakışır. Buna göre, kenarortayı verilen eşkenar üçgenin çizimi, yüksekliği verilen eşkenar üçgenin çizimine indirgenir.

Alıştırma 6

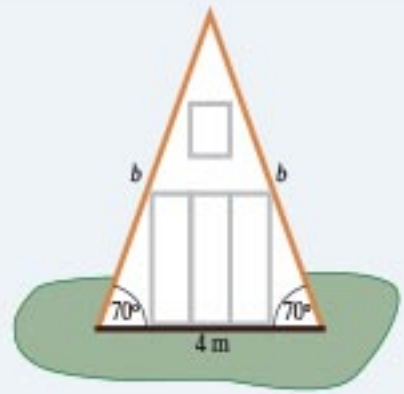
Aşağıdakiler verilen bir eşkenar üçgen çiz:
a) yükseklik $h = 4$ cm, b) kenarortay $t = 5$ cm.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki verilenlere göre ABC dik üçgenlerini çiz:
   a) dik kenarlar $a = 3$ cm ve $b = 4$ cm, b) hipotenüs $c = 6$ cm ve dik kenar $b = 3$ cm.
2. Aşağıdaki verilenlere göre ABC dik üçgenlerini çiz:
   a) hipotenüs $c = 5{,}6$ cm ve $\alpha = 38°$ açısı, b) dik kenar $a = 4$ cm ve $\alpha = 40°$ açısı.
3. Aşağıdaki verilenlere göre ABC ikizkenar üçgenlerini çiz:
   a) taban $a = 3{,}2$ cm ve yükseklik $h = 4{,}5$ cm, b) taban açısı $\alpha = 58°$ ve taban $a = 3$ cm.
4. Aşağıdaki verilenlere göre ABC ikizkenar üçgenlerini çiz:
   a) tepe açısı $\gamma = 46°$ ve eş kenar $b = 5{,}2$ cm,
   b) eş kenar $b = 6{,}2$ cm ve taban açısı $\alpha = 73°$,
   c) tabana ait yükseklik $h_a = 5$ cm ve tepe açısı $\gamma = 48°$.
5. Aşağıdaki verilenlere göre ABC eşkenar üçgenlerini çiz:
   a) yükseklik $h = 3{,}6$ cm, b) kenarortay $t = 4{,}2$ cm.

Araştırma

Resim 2'deki evin taban genişliği 4 m'dir ve çatı, evin tabanı ile 70°'lik açı yapmaktadır. Safet'in merdiveni yoktur, ancak evin yüksekliğini ölçmesi gerekmektedir. Ölçekli üçgen çizimi yaparak evin yüksekliğini nasıl bulabileceğini araştır ve açıkla.



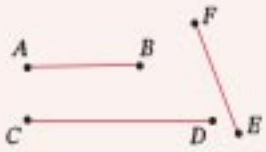
Resim 2

5. EŞLİK KAVRAMI. EŞ ÜÇGENLER

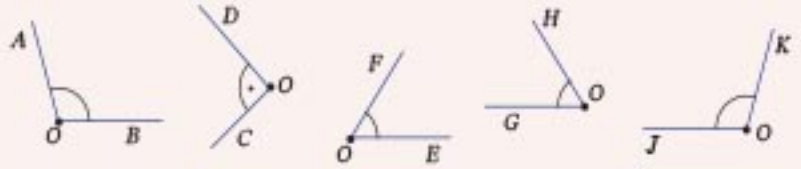
Eşlik Kavramı. Eş İki Boyutlu Şekiller

Etkinlik

1. a) Çizim 1a'daki doğru parçalarını ölç ve uzunluklarını karşılaştır. Ne sonuç çıkarabilirsin?
   b) *AB* doğru parçasının uzunluğu, *EF* doğru parçasının uzunluğuna göre nasıldır?
2. Çizim 1b'deki açıları açıölçer ile ölç ve hangilerinin aynı ölçüye sahip olduğunu belirle.



çiz. 1a



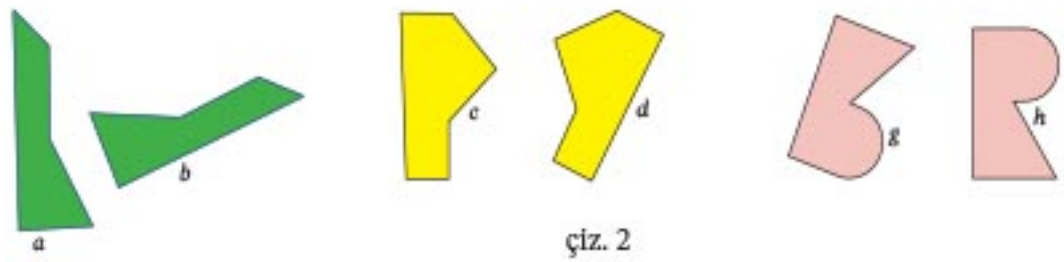
çiz. 1b

Uzunlukları eşit olan doğru parçalarına **eş doğru parçaları** denir.
Ölçüleri eşit olan açılara **eş açılar** denir.

Bir doğru parçası, ona eş olan başka bir doğru parçasının üzerine; bir açı da ona eş olan başka bir açının üzerine taşındığında çakışırlar. Aynı durum diğer geometrik şekiller için de geçerli midir? Günlük yaşamda sık sık eş şekillerden söz ederiz. Bununla, iki şeklin aynı biçime ve aynı büyüklüğe sahip olduğunu ifade ederiz.
Örneğin; bir paket kâğıttaki yapraklar, bir gazetedeki sayfalar, bir şablon ile onun kalıbı, aynı değerdeki iki madeni para gibi.

Üst üste konulduğunda tüm noktaları çakışan düzlemsel şekillere **iki boyutlu şekiller (eş düzlemsel şekiller)** denir.

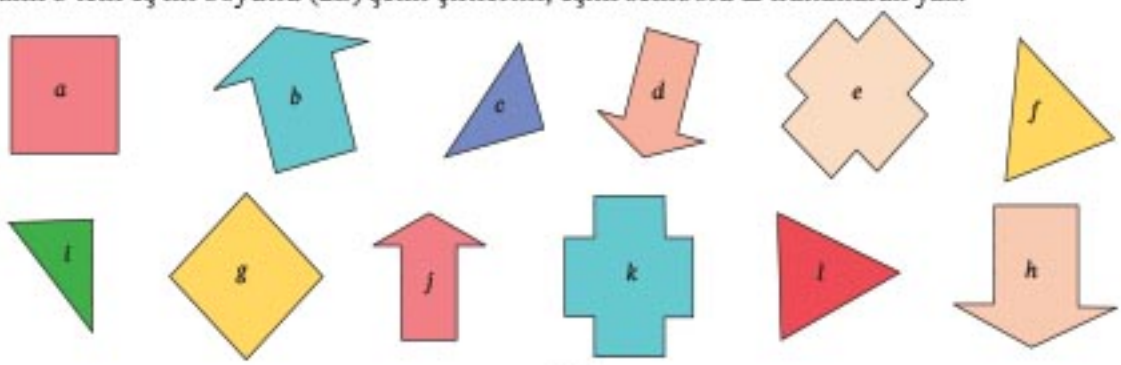
İki şeklin eş olduğunu göstermek için $\cong$ sembolü kullanılır. $\ncong$ sembolü ise verilen şekillerin eş olmadığını gösterir.
Çizim 2'deki eş iki boyutlu şekil çiftleri için $a \cong b$, $c \cong d$ ve g $\cong$ h yazılır.



çiz. 2

Alıştırma 1

Çizim 3'teki eş iki boyutlu (2B) şekil çiftlerini, eşlik sembolü ≅ kullanarak yaz.



çiz. 3

Örnek 1

Aşağıdaki seçeneklerin koşulları nedir?
a) İki dairenin eş olması, b) İki karenin eş olması.

Bunlar; a) yarıçapları eşit ise, b) kenar uzunlukları eşit ise eş olurlar.

Alıştırma 2

İki eş dikdörtgen çiz. Dikdörtgenlerden birinin kenarları 3 cm ve 5 cm ise diğer dikdörtgenin kenarları kaç cm olur?

Eş Üçgenler

Üçgenin temel elemanlarının kenarlar ve açılar olduğunu hatırla. Eş doğru parçaları ve eş açılardan söz ettiğimize göre, iki üçgenin eşliği sorusu doğal olarak ortaya çıkar.

Örnek 2

İki üçgen çiz ve Çizim 4'teki gibi adlandır.
a) İki üçgenin kenarlarını ölç. AB ile FD, AC ile FE, BC ile DE kenarlarının uzunluklarını karşılaştır.
b) İki üçgenin açılarını ölç. $\measuredangle A$ ile $\measuredangle F$, $\measuredangle C$ ile $\measuredangle E$, $\measuredangle B$ ile $\measuredangle D$ açılarının ölçülerini karşılaştır.
c) Sonra iki üçgeni kes ve üst üste koy. Ne sonuç çıkarırsın? Eşit kenarlar ve eşit açılar çakışacak mı? İki üçgen çakışacak mı?
d) Çakışan köşe, kenar ve açı çiftlerini yaz.



çiz. 4

a) Doğru ölçtüysen, kesinlikle şunu elde ettin: $\overline{AB} = \overline{FD}$, $\overline{AC} = \overline{FE}$ ve $\overline{BC} = \overline{DE}$.

b) Ölçülen açılardan şunu fark ettin: $\measuredangle ABC = \measuredangle FDE$, $\measuredangle ACB = \measuredangle FED$, $\measuredangle BAC = \measuredangle DFE$

c) Eşit kenarların ve eşit açıların çakıştığını fark ederiz: *AB* ve *FD*, *AC* ve *EF*, *BC* ve *DE*;

$\measuredangle ABC = \measuredangle FDE$, $\measuredangle ACB = \measuredangle FED$ и $\measuredangle BAC = \measuredangle DFE$

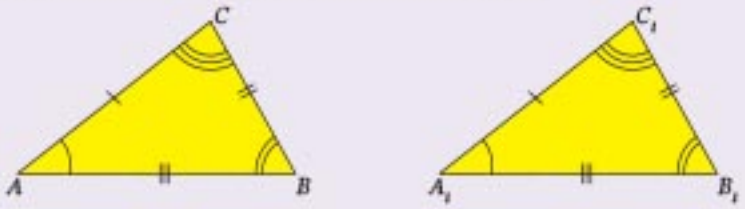
İki üçgen çakıştı. Bu durumda *A* köşesi F köşesiyle, *B* köşesi *D* köşesiyle ve *C* köşesi E köşesiyle çakıştı.

d) Çakışan noktalar, kenarlar ve açılar; birbirine **karşılık** gelen elemanlardır. Bu anlamda şunu söyleriz: *A* köşesi F köşesine, *B* köşesi *D* köşesine ve *C* köşesi E köşesine karşılık gelir. *AB* kenarı *FD* kenarına, *AC* kenarı *FE* kenarına ve *BC* kenarı *DE* kenarına karşılık gelir. $\measuredangle ABC$ açısı $\measuredangle FDE$ açısına, $\measuredangle ACB$ açısı $\measuredangle FED$ açısına ve $\measuredangle BAC$ açısı $\measuredangle DFE$ açısına karşılık gelir.

ABC ve $A_1B_1C_1$ üçgenlerinin karşılıklı kenarları ve karşılıklı açıları eşit ise bu üçgenlere **eş üçgenler** denir (Çizim 5), yani

$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$ ve

$\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A_1B_1C_1$, $\measuredangle BCA = \measuredangle B_1C_1A_1$.



çiz. 5

ABC ve $A_1B_1C_1$ üçgenleri eş ise $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ şeklinde yazarız. İki üçgenin yazılışındaki köşelerin sırasına göre karşılık gelen elemanları okuma konusunda anlaşırız.

Örnek 3

Çizim 6'daki eş üçgen çiftlerini yaz.

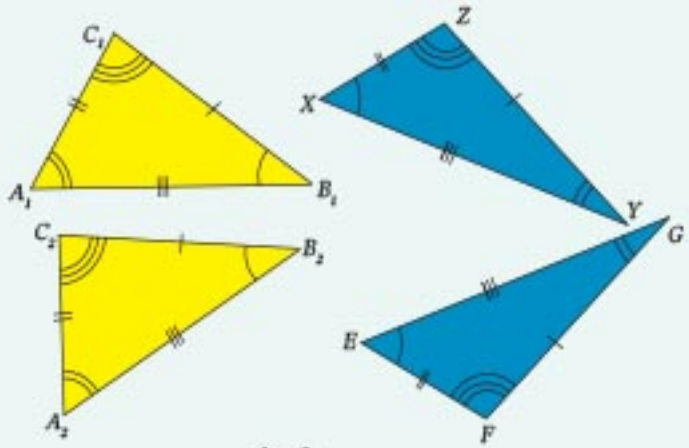
A_1 köşesi, A_2B_2 ve B_2C_2 ile C_1 ve C_2 köşesine karşılık gelir.

Şekile göre eş üçgenlerin karşılık gelen kenarlarının eşittir:

$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ (üç çizgi ile işaretlenmiştir |||)

$\overline{A_1C_1} = \overline{A_2C_2}$ (iki çizgi ile işaretlenmiştir ||)

$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$ (bir çizgi ile işaretlenmiştir |)



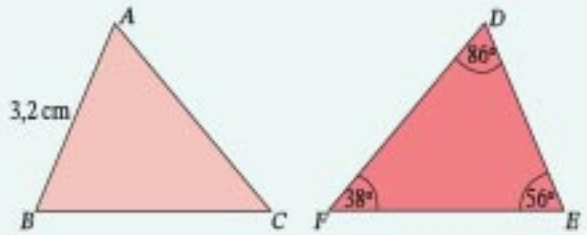
çiz. 6

Benzer şekilde, şekildeki işaretlere göre karşılıklı açılar eşittir:
$\measuredangle B_1A_1C_1 = \measuredangle B_2A_2C_2$, $\measuredangle A_1B_1C_1 = \measuredangle A_2B_2C_2$, $\measuredangle B_1C_1A_1 = \measuredangle B_2C_2A_2$.
Yani $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$.
Aynı şekilde $\Delta XYZ \cong \Delta EGF$ olduğu sonucuna varırız.

Örnek 4

Çizim 7'deki üçgenler için $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ olduğu verilmiştir.
Verilen bilgilere göre aşağıdakileri bul:
a) DE kenarının uzunluğunu, b) B köşesindeki açının ölçüsünü.

Sorunun koşuluna göre $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ olduğunu biliyoruz. O halde:
a) DE kenarı, AB kenarına karşılık gelir. Buna göre bu kenarların uzunlukları eşittir, yani $\overline{AB} = \overline{DE}$. $\overline{AB} = 3,2\,\text{cm}$ olduğundan $\overline{DE} = 3,2\,\text{cm}$ olur.

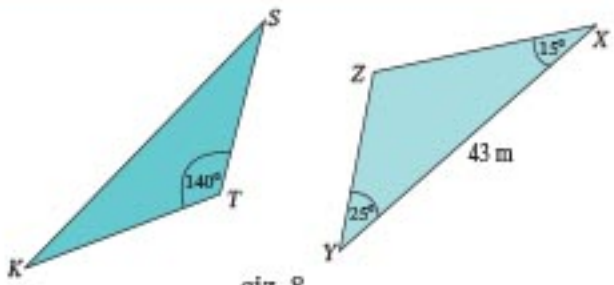


çiz. 7

b) B köşesindeki açı, E köşesindeki açıya karşılık gelir. Buna göre bu açıların ölçüleri eşittir, yani $\measuredangle CBA = \measuredangle FED$. $\measuredangle FED = 56°$ olduğundan $\measuredangle CBA = 56°$ elde edilir.

Alıştırma 3

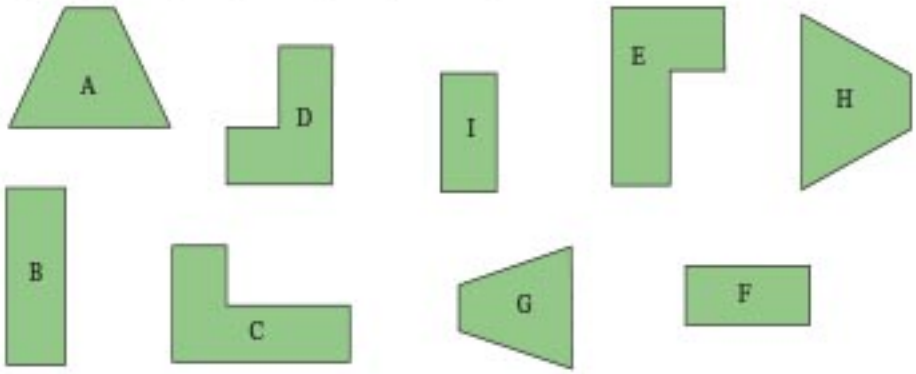
Çizim 8'deki üçgenler için $\Delta KST \cong \Delta XYZ$ olduğu verilmiştir. Şekildeki bilgilere göre aşağıdakileri hesapla:
a) KS kenarının uzunluğunu,
b) S köşesindeki açının ölçüsünü.



çiz. 8

ALIŞTIRMA SORULARI

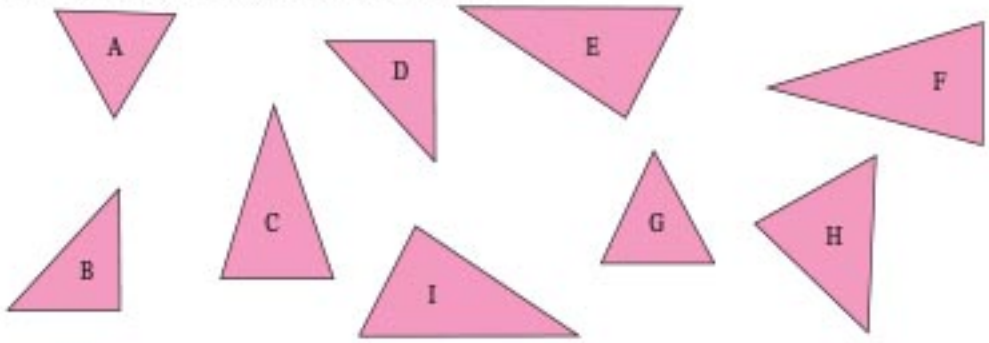
1. Çizim 9'da gördüğün eş 2 boyutlu şekil çiftlerini yaz.



çiz. 9

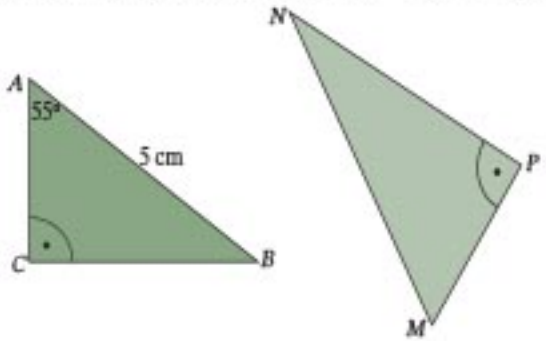
2. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ olduğu bilinmektedir. Karşılık gelen çiftleri yaz:
a) köşeler, b) *ABC* ve *DEF* üçgenlerinin kenarları.

3. Çizim 10'da gördüğün eş üçgen çiftlerini yaz.

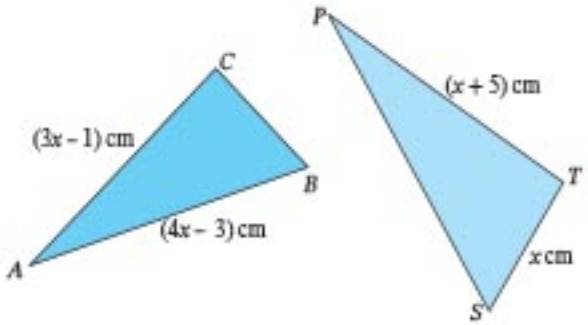


çiz. 10

4. $\Delta ABC \cong \Delta MNP$ olduğu bilinmektedir. Çizim 11'deki bilgilere göre aşağıdakileri bul:
a) *MN* kenarının uzunluğunu, b) N köşesindeki açının ölçüsünü.



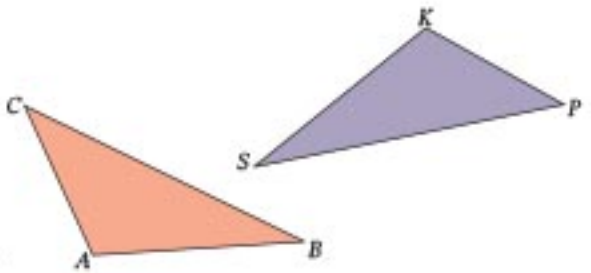
çiz. 11



çiz. 12

5. $\Delta ABC \cong \Delta PST$ olduğu bilinmektedir. Çizim 12'deki bilgilere göre üçgenlerin her bir kenarının uzunluğunu bul.

6. $\Delta ABC \cong \Delta KSP$ olduğu bilinmektedir (Çizim 13). $\measuredangle BAC = 38°$ ve $\measuredangle ACB = 26°$ ise $\measuredangle KSP$ açısının ölçüsünü hesapla.



çiz. 13

Araştırma

Tüm iki boyutlu (2B) şekiller kümesinde R bağıntısı "... ile eştir" şeklinde tanımlansın. R bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip olup olmadığını incele.

6. ÜÇGENLERDE EŞLİK KOŞULLARI (KRİTERLERİ)

İki üçgenin eş olup olmadığını kontrol etmek için, onların çakıştırılıp çakıştırılamayacağını, yani üst üste getirilebilip getirilemeyeceğini kontrol etmemiz gerekir. Ancak doğal olarak bunun her zaman mümkün olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Örneğin, üçgen şeklindeki iki arsanın eş olup olmadığını bu şekilde kontrol edemeyiz; çünkü onları üst üste getirmemiz mümkün değildir.
Bu nedenle, üçgenlerin eşliğini belirlemek için **üçgenlerde eşlik koşulları** adı verilen başka yöntemler kullanılır. Bu koşullarda, verilen üçgenlerin eşliğini belirlemek için gerekli şartlar tanımlanır. **Üç temel eşlik koşulu** vardır.

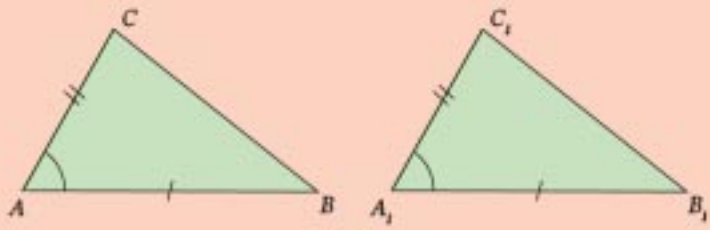
Birinci Üçgen Eşlik Koşulu

Etkinlik

Bir üçgenin iki kenarı 3 cm ve 5 cm, bu kenarlar arasındaki açı ise 102°'dir. Bu özelliklere sahip kaç farklı üçgen çizebilirsin? Cevabını gerekçelendir.

Bir üçgendeki iki kenar ve bu kenarlar arasındaki açı, diğer üçgendeki karşılık gelen iki kenar ve bu kenarlar arasındaki açıya eşit ise **iki üçgen eştir** (Çizim 1).

K: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$,
A: $\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$
K: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$
KAK: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

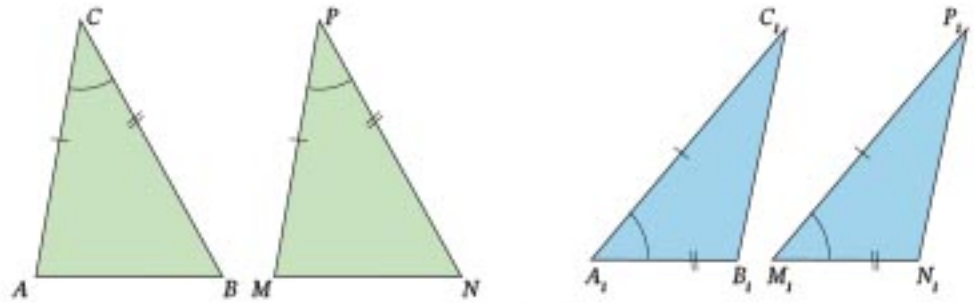


çiz. 1

Bu koşula göre, iki üçgenin eş olduğunu göstermek için bir üçgendeki iki kenarın ve bu kenarlar arasındaki açının, diğer üçgendeki karşılık gelen elemanlara eşit olup olmadığını kontrol ederiz. Bu nedenle bu koşul **Kenar – Açı – Kenar** olarak adlandırılır ve kısaca **KAK** şeklinde gösterilir.

Örnek 1

Çizim 2'de üçgen çiftleri çizilmiş ve karşılık gelen elemanlar gösterilmiştir.
KAK eşlik koşulunu kullanarak üçgenlerin eş olduğunu göster.



çiz. 2

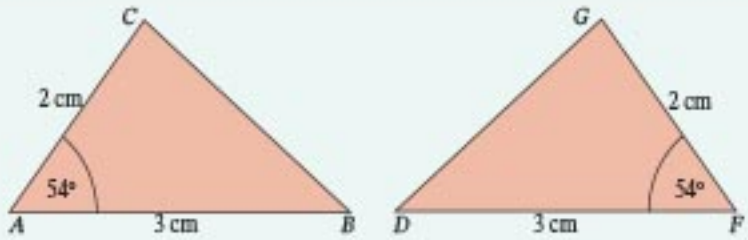
K: $\overline{AC} = \overline{MP}$
A: $\measuredangle ACB = \measuredangle MPN$
K: $\overline{CB} = \overline{PN}$
KAK: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

K: $\overline{A_1B_1} = \overline{M_1N_1}$
A: $\measuredangle B_1A_1C_1 = \measuredangle N_1M_1P_1$
K: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
KAK: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Örnek 2

Çizim 3'teki üçgenlerin eş olup olmadığını kontrol et.

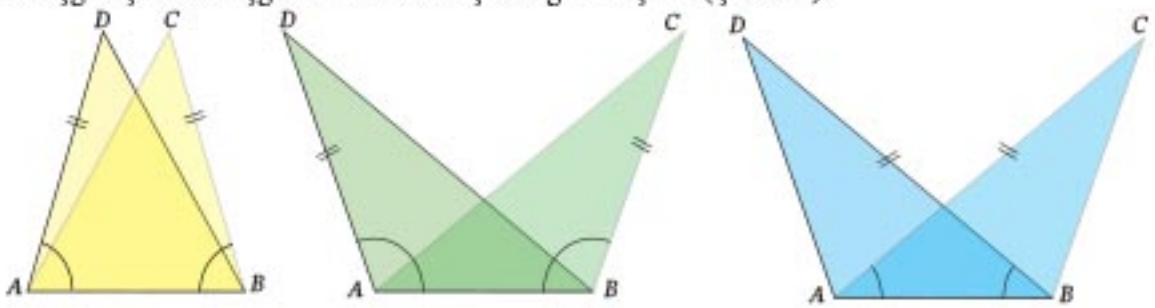
K: $\overline{AB} = \overline{FD} = 3$ cm
A: $\measuredangle BAC = \measuredangle DFG = 54°$
K: $\overline{AC} = \overline{FG} = 2$ cm
KAK: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$



çiz. 3

Örnek 3

Her üçgen çiftinde üçgenlerin neden eş olduğunu açıkla (Çizim 4):



çiz. 4

K: AB ortak kenardır
A: $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$
K: $\overline{BC} = \overline{AD}$
KAK: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

K: AB ortak kenardır
A: $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$
K: $\overline{BC} = \overline{AD}$
KAK: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

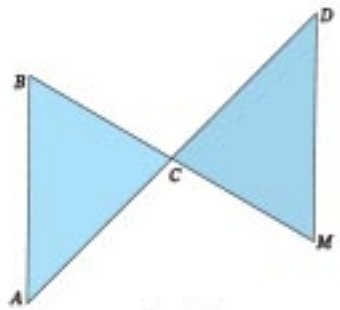
K: AB ortak kenardır
A: $\measuredangle BAC = \measuredangle ABD$
K: $\overline{AC} = \overline{BD}$
KAK: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

Örnek 4

Çizim 5'teki iki boyutlu şekli incele.
C noktası, AD ve BM doğru parçalarının orta noktasıdır.
Nedenini açıkla $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.

K: $\overline{AC} = \overline{DC}$	C noktası AD doğru parçasının orta noktasıdır.
A : $\measuredangle ACB = \measuredangle DCM$	ters açılardır.
K: $\overline{BC} = \overline{MC}$	C noktası BM doğru parçasının orta noktasıdır.

KAK: $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.



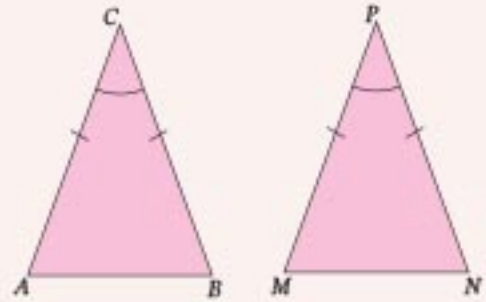
çiz. 5

Etkinlik

Çizim 6a ve Çizim 6b'deki üçgenleri incele. Aşağıdakileri belirlemek için neler yeterlidir?
a) İki dik üçgenin eş olduğunu,
b) İki ikizkenar üçgenin eş olduğunu.



çiz. 6a



çiz. 6b

- İki **dik üçgenin** dik kenar uzunlukları karşılıklı olarak eşit ise bu üçgenler eştir.
- İki **ikizkenar üçgenin** eş kenar uzunlukları ve tepe açılarının ölçüleri karşılıklı olarak eşit ise bu üçgenler eştir.

Örnek 5

İkizkenar MPQ üçgeninde, P köşesinden MQ tabanına PN yüksekliği çizilmiştir (Çizim 7).
ΔMNP ve ΔQNP üçgenlerinin eş olup olmadığını kontrol et.

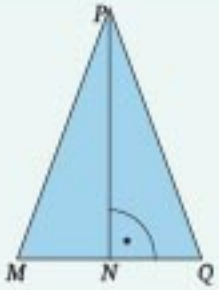
MNP ve *QNP* üçgenleri için aşağıdaki koşullar geçerlidir:

K: *PN* ortak kenardır.

A: $m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{QNP}) = 90°$ Yükseklik tabana diktir.

K: $\overline{NM} = \overline{NQ}$ Yükseklik tabanı iki eş parçaya ayırır.

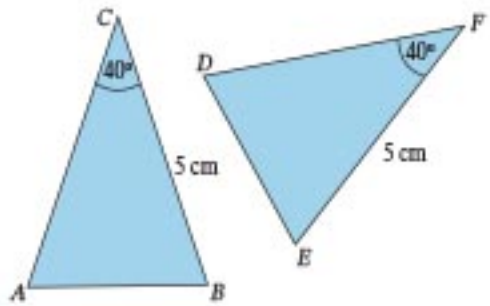
KAK: $\Delta MNP \cong \Delta QNP$



çiz. 7

Alıştırma 1

ABC ve *DEF* ikizkenar üçgenlerinin neden eş olduğunu açıkla (Çizim 8).



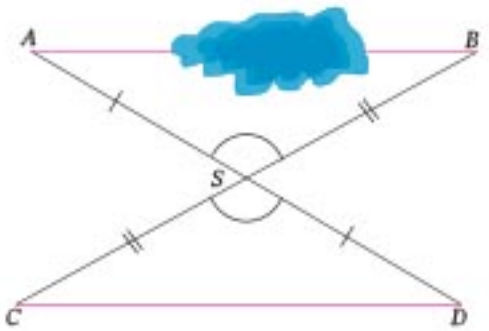
çiz. 8

Alıştırma 2

Çizim 9'da verilen arazide harita mühendisi, *A* ve *B* noktaları arasındaki uzaklığı ölçmelidir. Bu noktaların arasında, istenen uzaklığın ölçülmesini engelleyen bir su birikintisi vardır. Harita mühendisi, KAK koşulundan yararlanarak bu uzaklığı nasıl belirler? Yönerge: Çizim 10'u incele ve harita mühendisinin *A* ile *B* noktaları arasındaki uzaklık yerine neden *C* ile *D* noktaları arasındaki uzaklığı ölçebileceğini açıkla (Çizim 10).



çiz. 9

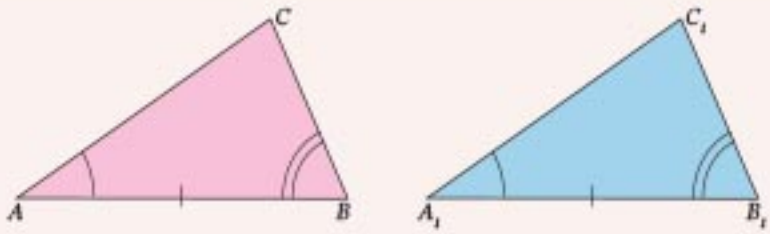


çiz. 10

İkinci Üçgen Eşlik Koşulu AKA

Etkinlik

1. Çizim 11'de, birer kenarlarının uzunlukları eşit ve bu kenarlara komşu olan karşılık gelen açılarının ölçüleri eşit olduğu bilinen iki üçgen verilmiştir. Verilen üçgenlerin karşılık gelen elemanlarını dikkatlice ölç ve karşılaştır. Üçgenler eş midir?



çiz. 11

2. Kenarlarının uzunlukları ve açı ölçüleri rastgele olan bir üçgen çiz. Daha sonra şeffaf bir kâğıt üzerine, bir kenarı ve bu kenar üzerinde bulunan açıları, diğer üçgendeki bir kenara ve ona karşılık gelen açılara eşit olacak şekilde başka bir üçgen çiz.
   a) Üçgenler çakışıyor mu? b) Üçgenler eş mi?

Önceki iki etkinliği doğru yaptıysan, üçgenlerin eş olduğunu fark etmiş olmalısın.

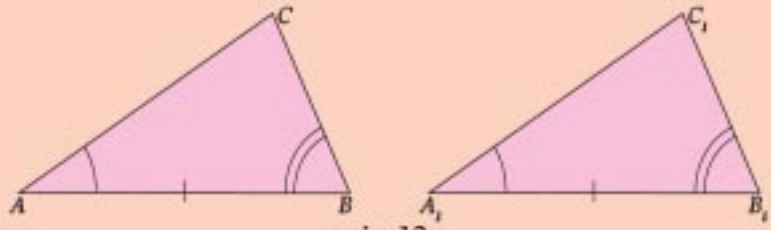
Bir kenarı ve bu kenar üzerinde bulunan açıları, diğer üçgendeki karşılık gelen kenar ve bu kenar üzerindeki açılara eşit ise **iki üçgen eştir** (Çizim 12).

A: $\measuredangle BAC = \measuredangle B_1A_1C_1$

K: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

A: $\measuredangle ABC = \measuredangle A_1B_1C_1$

AKA: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

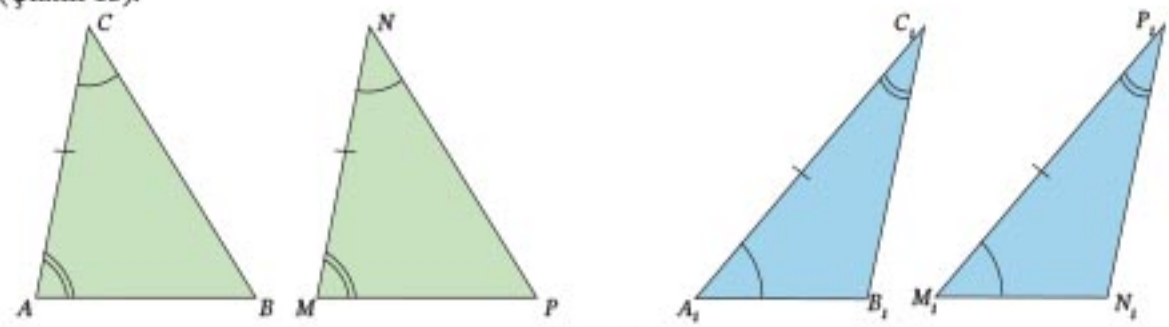


çiz. 12

Bu koşul, **Açı – Kenar – Açı** olarak adlandırılır ve kısaca **AKA** şeklinde gösterilir. Çünkü iki üçgenin eş olduğunu belirlemek için, bir üçgendeki bir kenarın ve bu kenar üzerindeki açıların, diğer üçgendeki karşılık gelen elemanlara eşit olup olmadığı kontrol edilir.

Örnek 6

AKA eşlik koşulunu kullanarak eş üçgenleri yaz ve üçgenlerin neden eş olduğunu belirle (Çizim 13).



çiz. 13

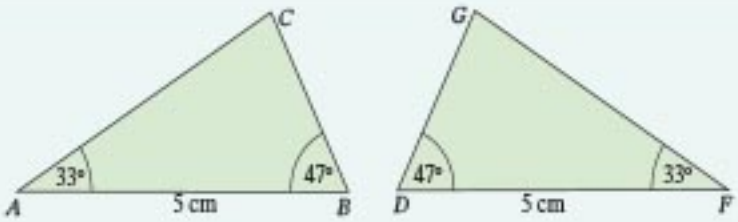
A: $\measuredangle BAC = \measuredangle PMN$
K: $\overline{AC} = \overline{MN}$
A: $\measuredangle ACB = \measuredangle MNP$
AKA: $\Delta ABC \cong \Delta MPN$

A: $\measuredangle B_1A_1C_1 = \measuredangle N_1M_1P_1$
K: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
A: $\measuredangle A_1C_1B_1 = \measuredangle M_1P_1N_1$
AKA: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Örnek 7

Çizim 14'teki üçgenlerin eş olup olmadığını belirle.

A: $\measuredangle BAC = \measuredangle DFG = 33°$,
K: $\overline{AB} = \overline{DF} = 5\,\text{cm}$,
A: $\measuredangle ABC = \measuredangle FDG = 47°$.
AKA: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$.



çiz. 14

Alıştırma 3

Çizim 15'te, *KM* köşegeni çizilmiş *KLMJ* paralelkenarı verilmiştir. *KLM* ve *MJK* üçgenleri eş midir?
Cevabını gerekçelendir.

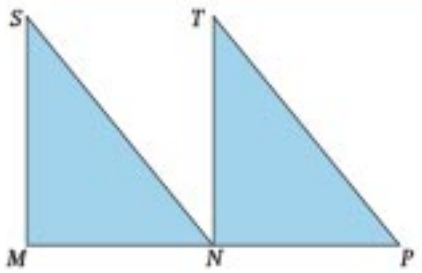


çiz. 15

Örnek 8

Çizim 16'daki iki boyutlu şekil için aşağıdaki koşullar verilmiştir:

$\overline{MN} = \overline{NP}$, $\measuredangle SMN = \measuredangle TNP$ ve $SN \parallel TP$.
$\Delta SMN \cong \Delta TNP$ olduğunu açıkla.



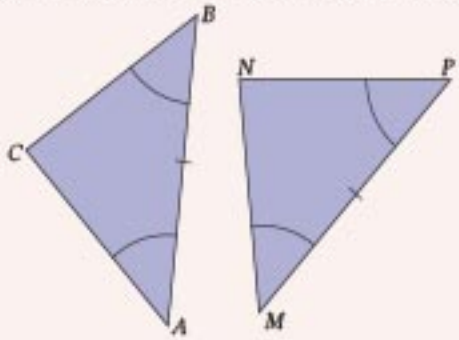
çiz. 16

A: $\measuredangle SMN = \measuredangle TNP$ soruda verilmiştir.
K: $\overline{MN} = \overline{NP}$ soruda verilmiştir.
A: $\measuredangle MNS = \measuredangle NTP$ $SN \parallel TP$ olduğundan dolayı açıların kenarları paraleldir.
AKA: $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.

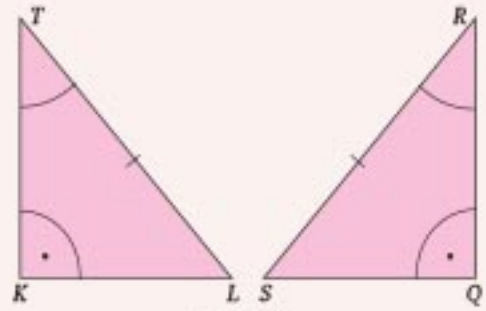
Etkinlik

a) Çizim 17'de işaretlenen elemanları eşit olan *ABC* ve *MPN* ikizkenar üçgenlerinin eşliği belirlenebilir mi?

b) Çizim 18'deki *KLT* ve *QSR* dik üçgenleri neden eştir?



çiz. 17



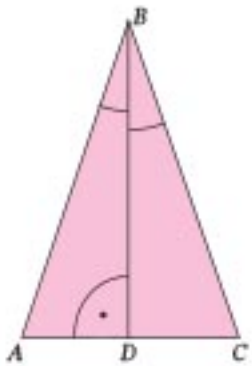
çiz. 18

- **İki dik üçgenin**; birinin bir dik kenar uzunluğu ile bu dik kenara komşu olan dar açısının ölçüsü, diğerinin karşılık gelen dik kenar uzunluğu ile bu dik kenara komşu olan dar açısının ölçüsüne eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.
- **İki dik üçgenin**; birinin hipotenüs uzunluğu ile bir dar açısının ölçüsü, diğerinin hipotenüs uzunluğu ile karşılık gelen dar açısının ölçüsüne eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.
- **İki ikizkenar üçgenin**; birinin taban uzunluğu ile bu tabana komşu olan açısının ölçüsü, diğerinin taban uzunluğu ile karşılık gelen tabana komşu olan açısının ölçüsüne eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.

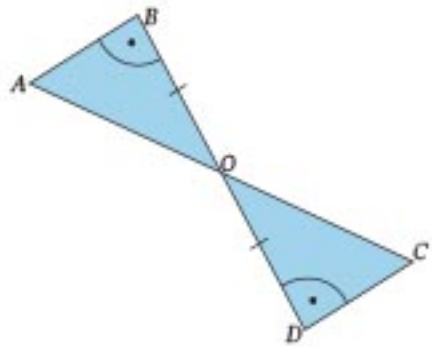
Alıştırma 4

Çizim 19'daki üçgenlerin eşliğini açıkla:

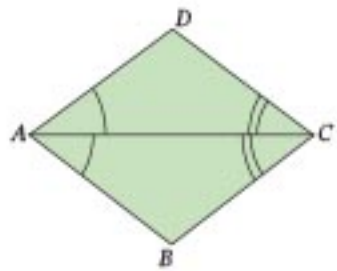
a) *ADB* ve *CDB*,



b) *ABO* ve *CDO*,



c) *ABC* ve *ADC*.

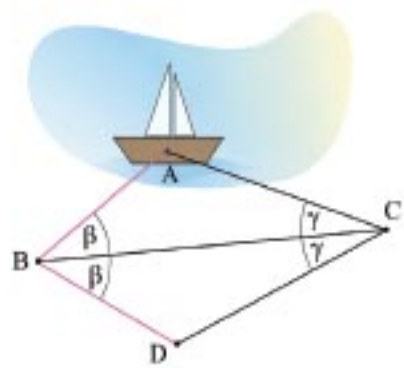


çiz. 19

Alıştırma 5

İkinci üçgen eşlik koşulunu kullanarak, teknedeki *A* noktası ile kıyıdaki *B* noktasında bulunan kulübe arasındaki uzaklığı nasıl belirleriz?

Yönerge: Çizim 20'yi incele ve *A* ile *B* arasındaki uzaklığı ölçmek yerine neden *B* ile *D* arasındaki uzaklığı ölçebileceğimizi açıkla.



çiz. 20

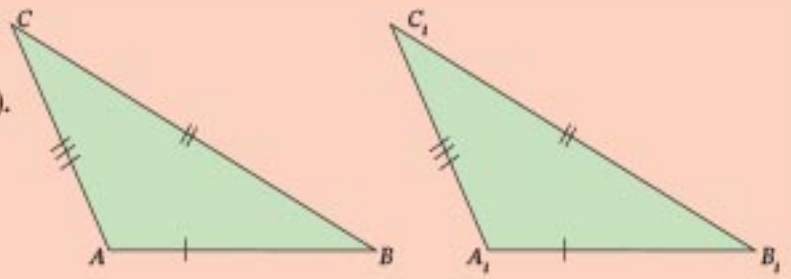
Üçüncü Üçgen Eşlik Koşulu KKK

Etkinlik

Kenar uzunlukları sırasıyla 4 cm, 6 cm ve 7 cm olan kaç üçgen çizebilirsin?
Böyle bir üçgen çiz.

İki üçgen, birinin üç kenarı diğerinin karşılık gelen üç kenarına eşit ise eştir (Çizim 21).

K: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$
K: $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$
K: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$
KKK: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



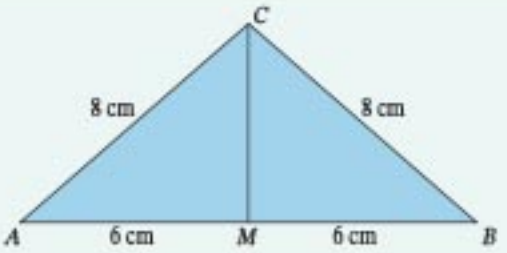
çiz. 21

Bu koşul, **kenar – kenar – kenar** olarak adlandırılır ve kısaca **KKK** şeklinde gösterilir. Çünkü iki üçgenin eşliğini, bir üçgenin üç kenar uzunluğunu diğer üçgenin karşılık gelen kenarlarıyla karşılaştırarak belirler.

Örnek 9

Çizim 22'deki *AMC* ve *BMC* üçgenlerinin eşliğini belirle.

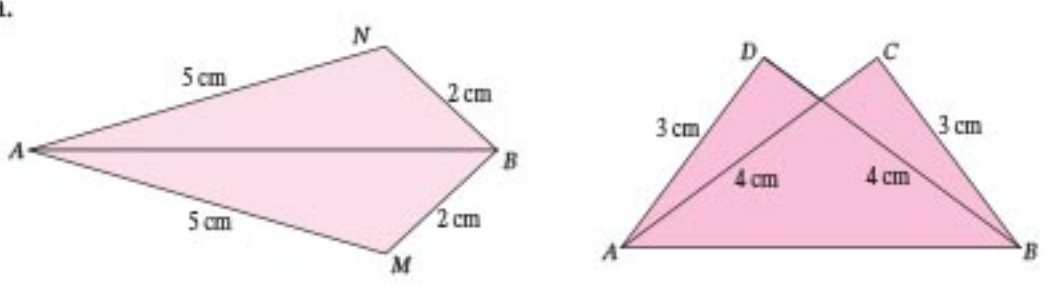
K: $\overline{AM} = \overline{BM}$
K: $\overline{AC} = \overline{BC}$
K: MC ortak kenardır.
KKK: $\Delta AMC \cong \Delta BMC$



çiz. 22

Alıştırma 6

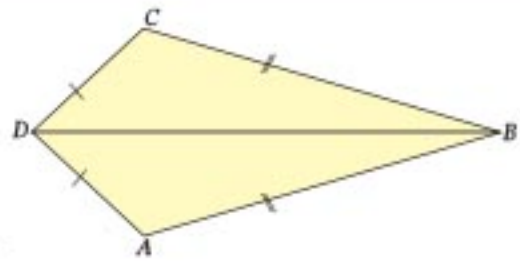
Çizim 23'teki iki boyutlu şekillerin her biri ikişer üçgen içerir. Bu üçgenlerin neden eş olduğunu açıkla.



çiz. 23

Örnek 10

Çizim 24'teki $ABCD$ dörtgeninin işaretlenen kenarlarına göre $\measuredangle DCB = \measuredangle DAB$ olduğunu açıkla.



çiz. 24

K: $\overline{DA} = \overline{DC}$

K: $\overline{AB} = \overline{CB}$

K: DB ortak kenardır.

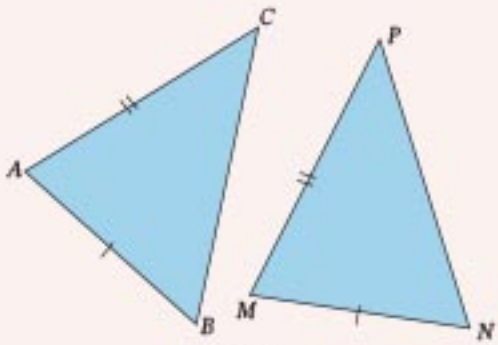
KKK: $\Delta DAB \cong \Delta DCB$

DAB açısı, DCB açısına karşılık geldiğinden $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$ olduğu sonucuna varırız.

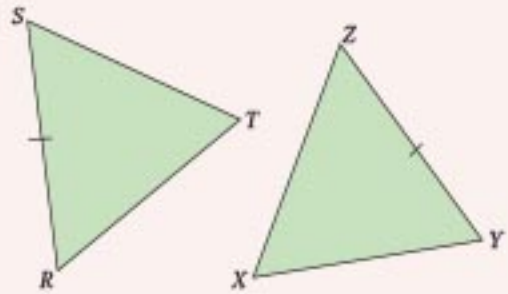
Etkinlik

a) Çizim 25'te işaretlenen karşılıklı elemanlarının ölçüleri eşit olan, tabanı AB olan ABC ikizkenar üçgeni ile tabanı MN olan MNP ikizkenar üçgeninin eş olup olmadığı belirlenebilir mi?

b) Çizim 26'daki RST ve XYZ eşkenar üçgenleri neden eştir?



çiz. 25



çiz. 26

- **İki ikizkenar üçgenin**; birinin taban uzunluğu ile eş kenarlarından birinin uzunluğu, diğerinin taban uzunluğu ile eş kenarlarından birinin uzunluğuna eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.
- **İki eşkenar üçgenin** kenar uzunlukları eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.

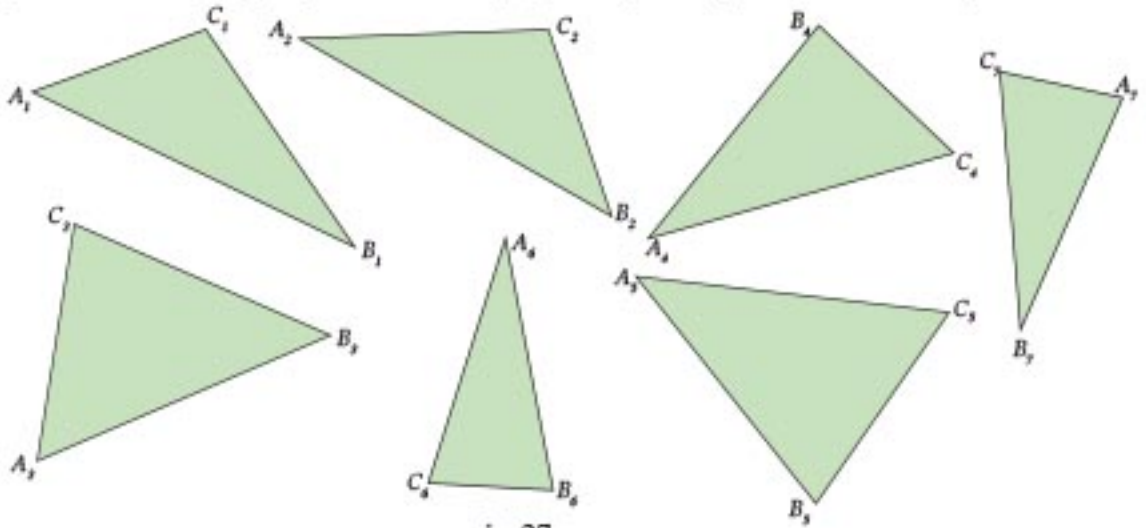
Alıştırma 7

ABC ikizkenar üçgeninde, C tepe noktasından CC_1 kenarortayı çizilmiştir. $\measuredangle AC_1C = \measuredangle BC_1C$ olduğunu açıkla. Çizim yap.

ALIŞTIRMA SORULARI

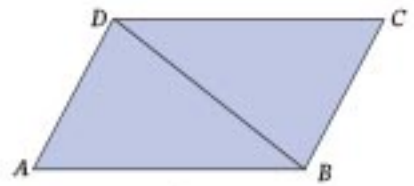
1. Verilen koşullara göre üçgenlerin eş olup olmadığını belirle:
   a) İki üçgenin karşılık gelen birer kenarı 3 cm uzunluğunda ve karşılık gelen iki açısı 35° ve 80° ölçüsündedir.
   b) İki üçgenin karşılık gelen kenar uzunlukları 3 cm, 9 cm ve 10 cm'dir.
   c) İki üçgenin karşılık gelen açı ölçüleri 44°, 78° ve 58°'dir.

2. Çizim 27'deki eş üçgen çiftlerini ve hangi eşlik koşuluna göre eş olduklarını yaz.



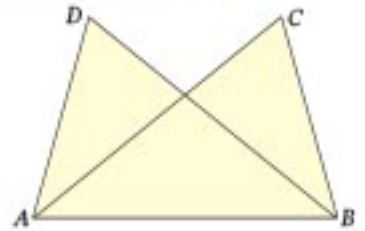
çiz. 27

3. BD doğru parçası, $ABCD$ paralelkenarının köşegenidir (Çizim 28).
   $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ olduğunu açıkla.



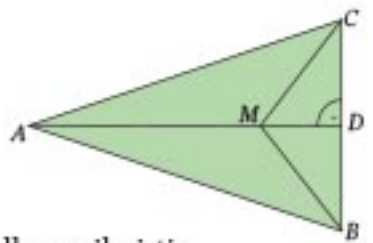
çiz. 28

4. Çizim 29'daki 2 boyutlu şekil için $AC = BD$ ve $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$ olduğu verilmiştir.
   Aşağıdakileri açıkla:
   a) $AD = BC$ b) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$



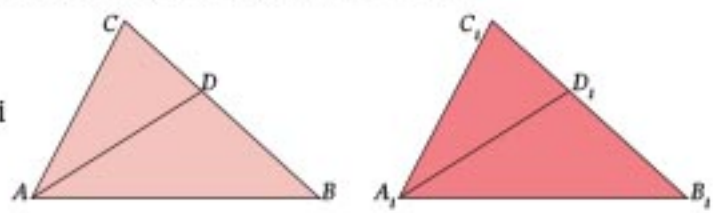
çiz. 29

5. Çizim 30'daki 2 boyutlu şekil için $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$ ve $\sphericalangle BMA = \sphericalangle CMA$ olduğu verilmiştir.
   $\Delta ABM \cong \Delta ACM$. olduğunu açıkla.



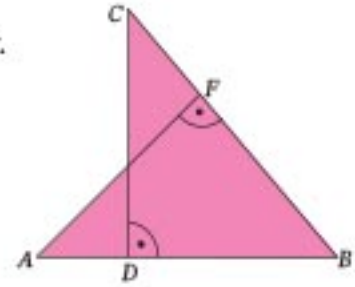
çiz. 30

6. Çizim 31'deki ABC ve $A_1B_1C_1$ üçgenleri için aşağıdaki koşullar verilmiştir:
   1) $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$
   2) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$
   3) AD ve A_1D_1, A ve A_1 köşelerindeki açıların açıortaylarıdır.
   4) $\overline{AD} = \overline{A_1D_1}$
   $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ olduğunu açıkla.



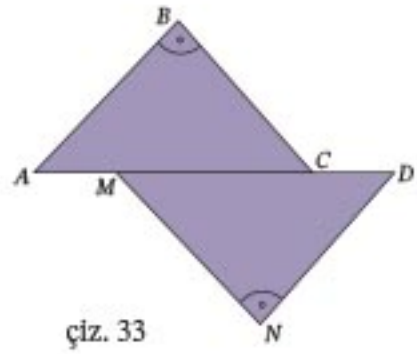
çiz. 31

7. Çizim 32'deki 2 boyutlu şekil için $\overline{AB} = \overline{BC}$ olduğu verilmiştir.
$\overline{AF} = \overline{CD}$ olduğunu açıkla.



çiz. 32

8. Çizim 33'teki 2 boyutlu şekil için $BC \parallel MN$ ve $\overline{AB} = \overline{ND}$ olduğu verilmiştir.
$\Delta ABC \cong \Delta DNM$ olduğunu açıkla.
Nedenini açıkla $\Delta ABC \cong \Delta DNM$.

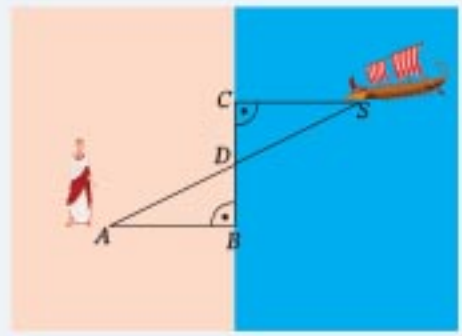


çiz. 33

9. İkizkenar üçgende aşağıdakilerin neden eşit olduğunu açıkla:
a) Üçgenin eş kenarlarına çizilen kenarortaylar,
b) Üçgenin eş kenarlarına çizilen yükseklikler.
Çizim yap.

Araştırma

Eski Yunan matematikçisi Thales (MÖ 624 – MÖ 547), savaş sırasında düşman gemilerinin kıyıya olan uzaklığını belirlemeyi başarmıştır.
Geminin karşısında bulunan kıyıdaki C noktasından, kıyı boyunca dik açıyla, istediği bir uzaklık kadar (örneğin 20 adım) D noktasına kadar yürümüştür. Buraya bir sopa yerleştirmiş ve aynı doğrultuda eşit uzaklık kadar (20 adım) B noktasına kadar devam etmiştir. Daha sonra karanın içine doğru dik açıyla A noktasına kadar yürümüş ve buradan sopanın üzerinden gemiye doğru bakabilmiştir.



Thales'in gemiye olan uzaklığı nasıl belirlediğini açıkla. Hangi uzaklığı ölçmüştür?
Ölçülen uzaklık neden gemi ile kıyı arasındaki uzaklığa eşittir?
Miletli Thales'e atfedilen bu yöntem, nehir genişliğini, kaya genişliğini ve benzerlerini belirlemek için de kullanılmıştır.

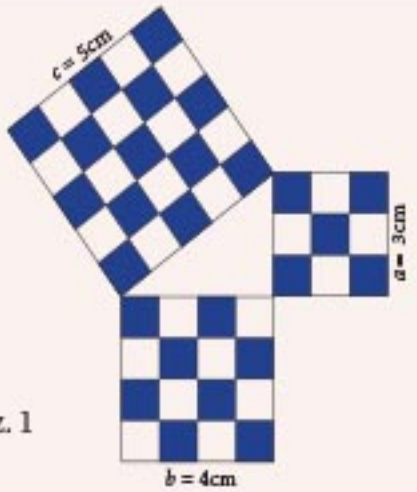
7. PİSAGOR TEOREMİ

Etkinlik

Dik kenarları 3 cm ve 4 cm, hipotenüsü ise 5 cm olan bir dik üçgen verilmiştir (Çizim 1). Karelerin her biri, kenar uzunluğu 1 cm olan küçük karelere bölünmüştür.

a) Her karede kaç küçük kare vardır?

b) Dik kenarlar üzerindeki küçük karelerin toplamı ile hipotenüs üzerindeki küçük karelerin sayısı arasında bir ilişki var mıdır?



çiz. 1

Dik kenarlar üzerindeki küçük karelerin toplamı ile hipotenüs üzerindeki küçük karelerin sayısı arasında bir ilişki olduğunu fark etmiş olmalısın. Buna göre:

3 cm uzunluğundaki dik kenar üzerindeki küçük kare sayısı $3^2 = 9$,

4 cm uzunluğundaki dik kenar üzerindeki küçük kare sayısı $4^2 = 16$,

5 cm uzunluğundaki hipotenüs üzerindeki küçük kare sayısı ise $5^2 = 25$'tir.

Bu da, dik kenarlar üzerindeki küçük karelerin sayılarının toplamının, hipotenüs üzerindeki küçük karelerin sayısına eşit olduğunu gösterir; yani $9 + 16 = 25$.

Fark ettiğin bu özellik her dik üçgen için geçerlidir ve adını antik çağ matematikçisi **Pisagor**'dan alan Pisagor Teoremi olarak bilinir.

Pisagor Teoremi

Her dik üçgende, hipotenüsün karesi, dik kenarların karelerinin toplamına eşittir.

Buna göre, bir dik üçgende dik kenarlar a ve b ile hipotenüs c arasındaki ilişki

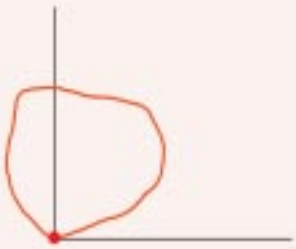
$c^2 = a^2 + b^2$ bağıntısıyla ifade edilir.

Etkinlik

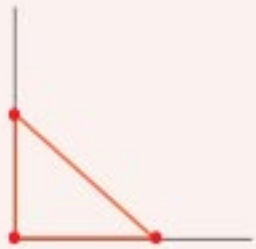
Bu etkinlik için gerekli malzemeler: bir kâğıt, yaklaşık 10 cm kenar uzunluğunda kare şeklinde bir strafor parçası, bir lastik ve kâğıdı strafora tutturmak için üç adet toplu iğne.

Hazırlık: Kâğıt üzerine bir dik açı çiz. Kâğıdı, toplu iğnelerden birini dik açının köşesine batırarak strafora sabitle (Çizim 2a).

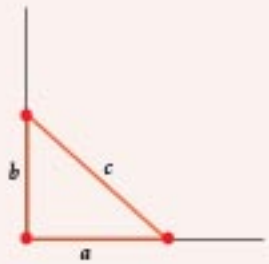
Daha sonra lastiği bu iğneye tak. Diğer iki iğne yardımıyla lastiği ger ve açının her iki koluna sabitle (Çizim 2b). Dik kenarlar a ve b ile hipotenüs c'nin uzunluklarını ölç (Çizim 2c) ve bunlar için $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğinin geçerli olup olmadığını kontrol et. İki iğneyi açının kolları boyunca farklı yerlere taşı, tekrar ölçüm yap ve yeniden kontrol et.



çiz. 2a



çiz. 2b



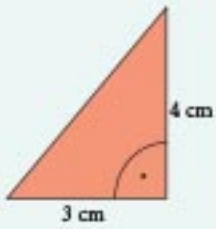
çiz. 2c

Örnek 1

Dik üçgenin, aşağıdaki dik kenarları verildiğinde hipotenüsünün uzunluğunu hesapla:
a) $a = 3$ cm ve $b = 4$ cm, b) $a = 8$ cm ve $b = 10$ cm.

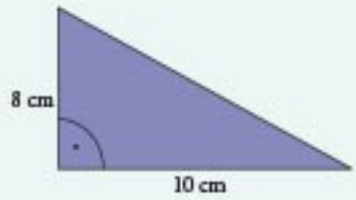
Hesaplamalarda hesap makinesi kullanacağız ve sonuçları virgülden sonra iki basamağa yuvarlayacağız.
Pisagor Teoremine göre hipotenüs c için:

a)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 9 + 16$
$c^2 = 25$
$c = \sqrt{25}$
$c = 5$ cm

b)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 10^2 + 8^2$
$c^2 = 100 + 64$
$c^2 = 164$
$c = \sqrt{164}$
$c = 12{,}81$ cm

Hipotenüsü hesaplarken $c^2 = a^2 + b^2$ formülü yerine, bundan elde edilen

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

formülünü doğrudan kullanabileceğimizi unutmayalım.

Alıştırma 1

Dik üçgenin aşağıdaki dik kenarları verildiğinde hipotenüs c'nin uzunluğunu hesapla:
a) $a = 24$ cm ve $b = 7$ cm, b) $a = 12$ cm ve $b = 13$ cm.

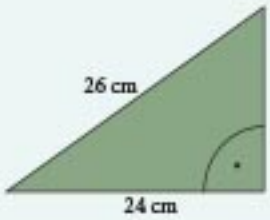
Pisagor Teoremi yardımıyla, hipotenüs ve dik kenarlardan biri verildiğinde diğer dik kenarın uzunluğunu da belirleyebiliriz.

Örnek 2

Hipotenüsü ve bir dik kenarı verilen bir dik üçgende diğer dik kenarın uzunluğunu hesapla:
a) $c = 26$ cm ve $a = 24$ cm, b) $b = 27$ cm ve $c = 50$ cm.

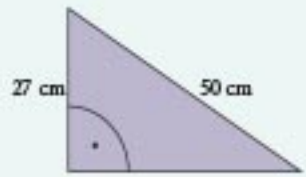
Pisagor Teoremine göre bilinmeyen dik kenar için:

a)



$c^2 = a^2 + b^2$
$26^2 = 24^2 + b^2$
$676 = 576 + b^2$
$b^2 = 676 - 576$
$b^2 = 100$
$b = \sqrt{100}$
$b = 10$ cm

b)



$c^2 = a^2 + b^2$
$50^2 = a^2 + 27^2$
$2500 = a^2 + 729$
$a^2 = 2500 - 729$
$a^2 = 1771$
$a = \sqrt{1771}$
$a = 42{,}08$ cm

Bilinmeyen dik kenarı hesaplarken, $c^2 = a^2 + b^2$ formülü yerine aşağıdaki formülleri doğrudan kullanabileceğimizi unutmayalım:

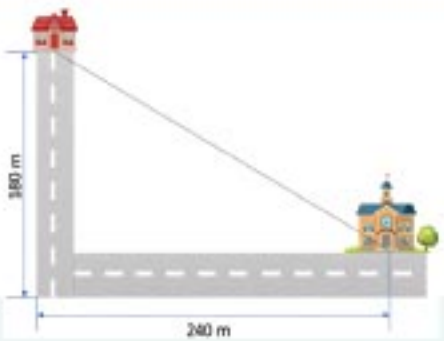
$a^2 = c^2 - b^2$ veya $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\quad$ $b^2 = c^2 - a^2$ veya $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Alıştırma 2

Hipotenüsü ve bir dik kenarı verilen bir dik üçgende diğer kenarın uzunluğunu hesapla:
a) $c = 15$ cm ve $a = 11$ cm, b) $c = 50$ cm ve $b = 30$ cm.

Örnek 3

Tanya okula yürüyerek gitmektedir. Önce kendi sokağı boyunca 180 m yürümekte, sonra 90° dönerek okula ulaşmak için 240 m daha yürümektedir (Çizim 3).
Tanya'nın evi ile okul arasındaki doğru uzaklık kaç metredir?



çiz. 3

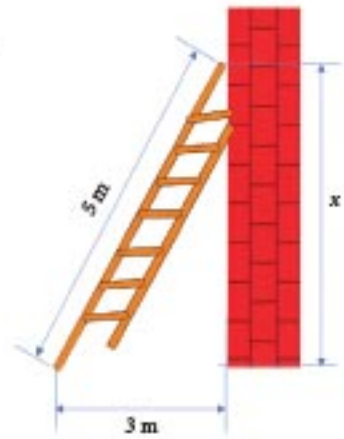
Tanya, bir dik üçgenin $a = 180$ m ve $b = 240$ m uzunluğundaki iki dik kenarı boyunca yürümektedir.
Tanya'nın evi ile okul arasındaki uzaklık, bu üçgenin hipotenüsü c'dir. Pisagor Teoremini uygulayalım:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{180^2 + 240^2} = c = \sqrt{32\,400 + 57\,600} = \sqrt{90\,000} = 300\,\text{m}.$$

Tanya'nın evi ile okulunun uç noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu 300 m'dir.

Alıştırma 3

5 m uzunluğundaki bir merdiven dik bir duvara dayalıdır (Çizim 4). Merdivenin alt ucu duvardan 3 m uzaklıktadır. Merdiven duvara yerden kaç metre yükseklikte temas etmektedir?



çiz. 4

Ters pisagor teoreminin özelliği de geçerlidir.

Ters Pisagor Teoremi

Bir üçgende en uzun kenarın karesi, diğer iki kenarın kareleri toplamına eşitse, bu üçgen dik üçgendir.

Ters pisagor teoremi yardımıyla bir üçgenin dik üçgen olup olmadığını belirleyebiliriz.

Örnek 4

Aşağıdaki kenar uzunluklarına sahip üçgenin dik üçgen olup olmadığını kontrol et:
a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm ve $c = 5$ cm, b) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm.

a) Ters pisagor teoremine göre üçgen diktir, çünkü
$5^2 = 3^2 + 4^2$.
Bu üçgen Eski Mısırlılar tarafından da biliniyordu. Bu nedenle **Mısır üçgeni** adını almıştır.

b) Ters pisagor teoremine göre üçgen diktir, çünkü
$13^2 = 5^2 + 12^2$.
Bu üçgen Eski Hintliler tarafından da biliniyordu. Bu nedenle **Hint üçgeni** adını almıştır.

a, b ve c doğal sayıları için $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliği sağlanıyorsa, yani bu sayılar bir dik üçgenin kenar uzunlukları olabiliyorsa, bu sayılara **Pisagor sayı üçlüleri (Pisagor üçlüsü)** denir. Pisagor üçlüleri (a, b, c) sıralı üçlüsü şeklinde yazılır.

Örneğin; (3, 4, 5), (5, 12, 13), (20, 21, 29) birer Pisagor üçlüsüdür.

Alıştırma 4

Verilen sayı üçlülerinin Pisagor üçlüsü olup olmadığını kontrol et:
a) (10, 11, 14), b) (6,8,10), c) (9,12,15), d) (10,24,26), e) (15,36,39).

ALIŞTIRMA SORULARI

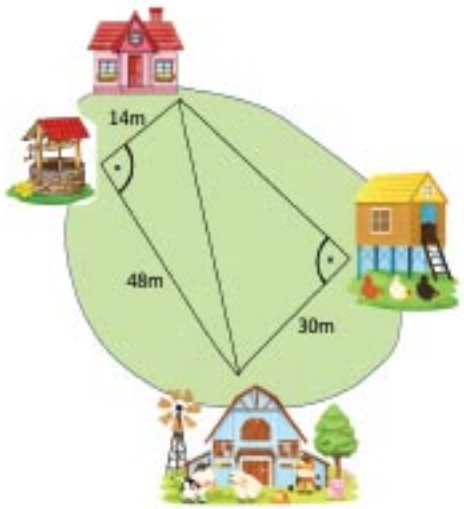
1. Dik kenarları verilen bir dik üçgenin hipotenüsünü belirle:
   a) $a = 6$ cm ve $b = 12$ cm, b) $a = 8$ cm ve $b = 6$ cm,
   c) $a = 12$ cm ve $b = 16$ cm, d) $a = 10$ cm ve $b = 24$ cm.

2. Hipotenüsü ve ikinci dik kenarı verilen bir dik üçgende diğer dik kenarı belirle:
   a) $c = 20$ cm ve $b = 12$ cm, b) $c = 10$ cm ve $a = 8$ cm,
   c) $c = 25$ cm ve $b = 15$ cm, d) $c = 34$ cm ve $a = 16$ cm.

3. Bir limandan aynı anda iki gemi hareket etmiştir. Gemilerden biri batı yönünde 24 km/sa hızla, diğeri ise kuzey yönünde 26 km/sa hızla gitmiştir. Gemilerin hareketlerinden sonra birbirlerinden ne kadar uzaklaşacaklarını hesapla:
   a) 1 saat sonra, b) 2 saat sonra.

4. Hipotenüsü ve bir dik kenarı verilen dik üçgenin çevre uzunluğunu hesapla: a) $c = 29$ cm ve $b = 21$ cm, b) $c = 34$ cm ve $b = 16$ cm, c) $c = 17$ cm ve $b = 15$ cm.

5. Bir köy avlusunda ev ile kuyu arasındaki uzaklık 14 m, kuyu ile ahır arasındaki uzaklık 48 m, ahır ile kümes arasındaki uzaklık ise 30 m'dir (Çizim 5).
   a) Ev ile ahır arasındaki uzaklık kaç metredir?
   b) Ev ile kümes arasındaki uzaklık kaç metredir?



çiz. 5

6. Aşağıdaki kenar uzunluklarına sahip üçgenin dik üçgen olup olmadığını incele:
   a) $a = 15$ cm, $b = 36$ cm ve $c = 39$ cm, b) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm ve $c = 15$ cm,
   c) $a = 20$ cm, $b = 13$ cm ve $c = 25$ cm, d) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm ve $c = 15$ cm.

7. **Proje Etkinliği**

1. Pisagor Üçlüleri Oluşturuyoruz

Pisagor üçlülerini (a, b, c) Öklid bağıntıları (formülleri) yardımıyla oluştururuz. m ve n, m > n olacak şekilde herhangi iki doğal sayı olsun. Pisagor üçlüsünü oluşturan a, b ve c sayıları aşağıdaki formüllerle elde edilir:

$a = (m^2 - n^2)k$, $b = 2mnk$ ve $c = (m^2 + n^2)k$.

Örneğin, $m = 2$, $n = 1$ ve $k = 1$ için

$a = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = \mathbf{3}$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{4}$ ve $c = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = \mathbf{5}$ elde edilir.

$m = 3$, $n = 1$ ve $k = 1$ için

$a = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = \mathbf{8}$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{6}$ ve $c = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = \mathbf{10}$ elde edilir.

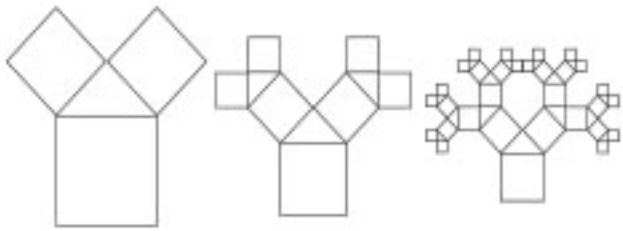
Verilen tabloları yeniden çiz ve doldur.

$m = 2, n = 1$ ve $k = 1$	a	b	c
$m = 3, n = 1$ ve $k = 1$			
$m = 4, n = 1$ ve $k = 1$			
$m = 5, n = 1$ ve $k = 1$			
$m = 6, n = 1$ ve $k = 1$			

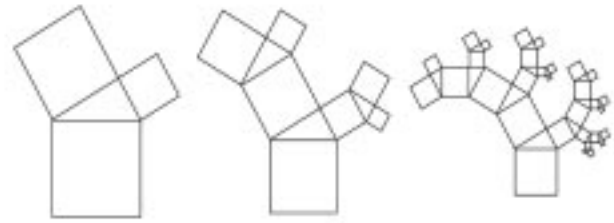
$m = 3, n = 2$ ve $k = 1$	a	b	c
$m = 4, n = 2$ ve $k = 1$			
$m = 5, n = 2$ ve $k = 1$			
$m = 6, n = 2$ ve $k = 1$			
$m = 7, n = 2$ ve $k = 1$			

2. Pisagor Ağacı Oluşturuyoruz

Pisagor ağacında dalların ve yaprakların kenar uzunluklarının ölçüleri Pisagor üçlülerinden oluşur. Pisagor ağacını oluşturmaya kökten başlanır. Bunun için önce bir kare çizilir ve karenin üzerine bir dik üçgen oluşturulur. Bu üçgen ikizkenar dik üçgen (Çizim 6a) ya da çeşitkenar dik üçgen (Çizim 6b) olabilir.



çiz. 6a



çiz. 6b

Daha sonra dik kenarlar üzerine kareler çizilir, ardından bu karelerin üzerine yeni dik üçgenler oluşturulur ve böylece tasarım geliştirilir.
Pisagor ağaçlarına örnekler Çizim 7a ve Çizim 7b'de verilmiştir.



çiz. 7a



çiz. 7b

Senin görevin, bir Çizim kâğıdı üzerinde kendi Pisagor ağacını oluşturmaktır. Bunun için kenar uzunluğu 5 cm olan bir kare ile başla ve karenin üzerine:

a) ikizkenar dik üçgen, b) çeşitkenar dik üçgen oluştur.

Gövdenin, dalların ve yaprakların şeklini istediğin gibi planlayabilir; üçgenleri farklı konumlarda yerleştirerek tasarımını oluşturabilirsin.

Araştırma



1. Pisagor Teoremi, geometrideki en önemli ve en yaygın kullanılan teoremlerden biridir. Adını, MÖ VI. yüzyılda yaşamış olan antik matematikçi ve filozof Pisagor'dan almıştır.
İnternetten araştırma yaparak antik matematikçi Pisagor'un yaşamı ve keşifleri hakkında bilgi topla.

3. Bir meteoroloji istasyonundaki meteorologlar atmosferdeki bir bulutu gözlemlemektedir. Yapılan ölçümlerde:

- Meteoroloji istasyonu ile bulutun tam altında bulunan nokta arasındaki yatay uzaklığın $d = 4$ km olduğu,
- Bulutun yerden yüksekliğinin $h = 1{,}5$ km olduğu belirlenmiştir.

Meteoroloji istasyonu ile bulut arasındaki uzaklık L ile gösterilmiştir.

a) Durumu bir çizimle göster ve dik üçgenin dik kenarlarını ve hipotenüsünü işaretle.

b) Pisagor Teoremini kullanarak meteoroloji istasyonu ile bulut arasındaki L uzaklığını hesapla. Sonucu 0,1 km'ye yuvarla.

c) Bilim insanlarının, üç uzunluğu da (iki dik kenar ve hipotenüs) ayrı ayrı ölçmeleri durumunda, Pisagor Teoreminin tersini kullanarak ölçümün doğruluğunu nasıl kontrol edebileceklerini açıkla.

d) Meteorolojide, 0,1 km hassasiyetindeki bir ölçüm hatasının hangi durumlarda kritik olabileceğini araştır (uçak seferleri veya hava tahmini gibi durumlarda).

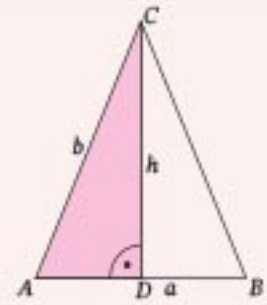
8. PİSAGOR TEOREMİNİN ÜÇGENLERDE UYGULANMASI

Etkinlik

Çizim 1'de, tabanı a ve eş kenarı b olan ABC ikizkenar üçgeni verilmiştir. C köşesinden tabana h yüksekliği çizilmiştir.

a) ADC ve BCD üçgenleri dik üçgen midir?

b) $AD = DB$ midir?



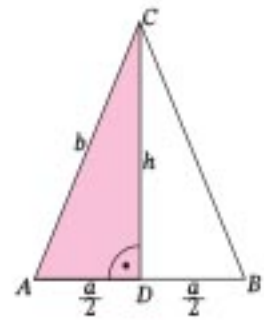
çiz. 1

ABC ikizkenar üçgeninde, a tabanına çizilen h yüksekliği, ABC ikizkenar üçgenini ADC ve BDC olmak üzere iki eş dik üçgene ayırır (Çizim 2).

Pisagor Teoremine göre, ikizkenar üçgenin eş kenarı b'yi hesaplamak için şu formülü elde ederiz:

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Burada h üçgenin yüksekliği, a ise üçgenin tabanıdır.



çiz. 2

Örnek 1

İkizkenar üçgende aşağıdakileri hesapla:

a) $a = 16$ cm ve $h = 15$ cm ise eş kenar b'yi, b) $a = 10$ cm ve $b = 13$ cm ise yükseklik h'yi,

c) $b = 25$ m ve $h = 24$ m ise taban a'yı.

Pisagor formulunde (bağıntısında) değerler yerine yazılarak elde edilir:

a) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + 8^2$

$b^2 = 289$

$b = \sqrt{289}$

$b = 17$ cm.

b) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - 5^2$

$h^2 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$ cm.

$h = 12$ cm.

c) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25^2 - 24^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 49$

$\frac{a}{2} = 7$

$a = 14$ cm.

Alıştırma 1

Tabanı 18 cm ve yüksekliği 12 cm olan bir ikizkenar üçgenin çevresini hesapla.
Çizimini yap.
Yönerge: İkizkenar üçgenin çevresi, $L = a + 2b$ formülü ile hesaplanır.
Burada a taban, b ise ikizkenar üçgenin eş kenarıdır.

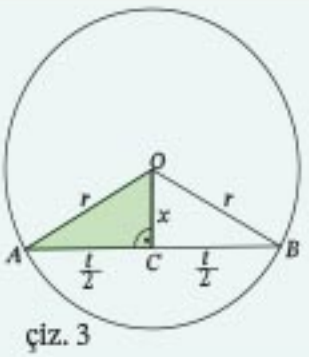
Örnek 2

Yarıçapı $r = 8$ cm olan bir çemberde t = 12,8 cm uzunluğunda bir kiriş çizilmiştir. Kirişin çember merkezine olan uzaklığını hesapla (Çizim 3).

ABO üçgeni, $AO = BO = r$ eş kenarlarına sahip bir ikizkenar üçgendir.
$OC = x$ uzaklığı, ABO üçgeninin yüksekliğidir.
Pisagor Teoremi yardımıyla:

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 8^2 - \left(\frac{12,8}{2}\right)^2 = 8^2 - 6,4^2 = 23,04,$$

$x = 4,8$ cm elde ederiz.



çiz. 3

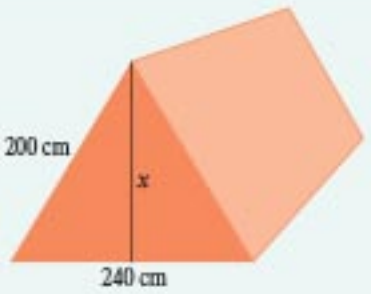
Örnek 3

Dragan, giriş kısmı eş kenarı 200 cm ve tabanı 240 cm olan ikizkenar üçgen şeklindeki çadırını desteklemek için bir boru satın alacaktır (Resim 1).
Dragan'ın satın alması gereken borunun uzunluğu kaç santimetredir?

Borunun uzunluğu x, tabanı 240 cm ve eş kenarı 200 cm olan ikizkenar üçgenin yüksekliğidir.
Pisagor Teoremi yardımıyla:

$$x^2 = 200^2 - \left(\frac{240}{2}\right)^2 = 200^2 - 120^2 = 25600, \quad x = 160 \text{ cm}.$$

Dragan'ın satın alması gereken borunun uzunluğu 160 cm'dir.

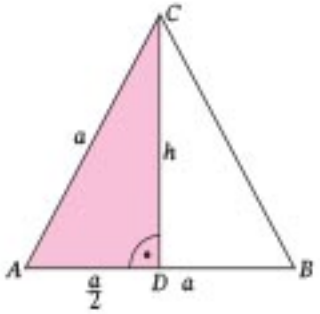


Resim 1

Herhangi bir yüksekliği h çizildiğinde, ABC eşkenar üçgeni iki eş dik üçgene ayrılır (Çizim 4).
Pisagor Teoremi yardımıyla, eşkenar üçgenin kenarı a'yı hesaplamak için şu bağıntıyı elde ederiz:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Burada h, eşkenar üçgenin yüksekliğidir.



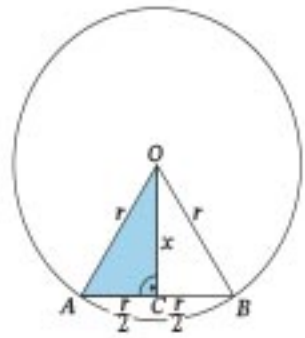
çiz. 4

Alıştırma 2

Eşkenar üçgende kenar $a = 10$ cm ise yüksekliği h'yi hesapla.

Alıştırma 3

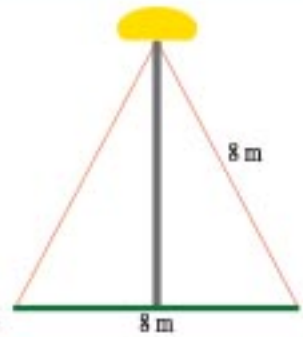
Yarıçapı $r = 8$ cm olan bir çemberde, uzunluğu çemberin yarıçapına eşit olan bir kiriş çizilmiştir.
Kirişin çember merkezine olan x uzaklığını hesapla (Çizim 5).



çiz. 5

Alıştırma 4

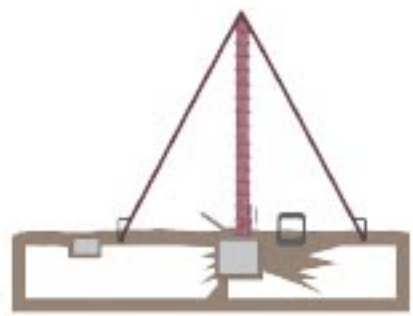
Okul bahçesine, 8 m uzunluğunda iki simetrik destekle tutturulmuş bir direk üzerinde bir lamba yerleştirilmiştir (Resim 2).
Yerde ölçülen iki destek arasındaki uzaklık 8 m ise direğin yüksekliği kaç metredir?



Resim 2

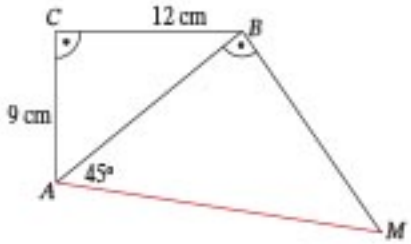
ALIŞTIRMA SORULARI

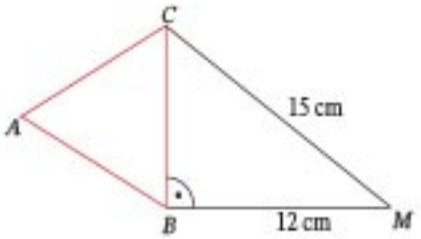
1. Tabanı ve eş kenarı bilinen ikizkenar üçgenin yüksekliğini hesapla:
   a) $a = 7$ cm ve $b = 5{,}5$ cm, b) $a = 18$ cm ve $b = 15$ cm.
2. Tabanı a ve tabana ait yüksekliği h verilen ikizkenar üçgenin eş kenarını hesapla:
   a) $a = 14$ cm ve $h = 24$ cm, b) $a = 24$ dm ve $h = 16$ dm.
3. Kenarı verilen eşkenar üçgenin yüksekliğini hesapla:
   a) $a = 8$ cm, b) $a = 10$ cm.
4. Hipotenüsü 10 cm olan ikizkenar dik üçgenin dik kenar uzunluğunu hesapla.
5. 40 m yüksekliğindeki bir direk, tabanından 9 m uzaklıktaki zemine çakılmış kazıklara çelik halatlarla bağlanmıştır (Resim 3). Çelik halatların uzunluğu kaç metredir?



Resim 3

6. Çizim 6'daki bilgilere göre verilenleri hesapla:
a) AM doğru parçasının uzunluğunu, b) ABC eşkenar üçgeninin çevresini.





çiz. 6

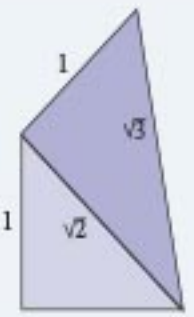
7. Çapı 60 metre olan dairesel bir göletin merkezine bir heykel yerleştirilmiştir. Göletin üzerine 48 metre uzunluğunda bir köprü yapılmıştır (Resim 4). Köprünün orta noktasından heykele doğru küçük bir geçici köprü yapılacaktır. Bu köprünün uzunluğu kaç metre olur?



Resim 4

Araştırma

Seçilen ölçü biriminde $\sqrt{2}$ uzunluğunda bir doğru parçası oluşturmak için bir dik kenarı 1 olan dik üçgen oluşturmak gerekir.
$\sqrt{2}$ uzunluğundaki doğru parçasını oluşturduğumuz çizimde, dik kenarları $\sqrt{2}$ ve 1 uzunluğunda olan bir dik üçgen oluşturursak, hipotenüsün uzunluğu $\sqrt{3}$ olur:
$(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$
Aynı çizim üzerinde $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$. uzunluğundaki doğru parçalarını nasıl oluşturabileceğini açıkla.



çiz. 7

9. DÖRTGEN. PARALELKENAR. DİKDÖRTGEN, EŞKENAR DÖRTGEN VE KARE

Etkinlik

a) Çizim 1'deki dörtgenleri adlandır.



çiz. 1

b) Paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karelerle ilgili bildiğin bazı özellikleri say.

Dörtgen

Çizim 2'deki *ABCD* dörtgenini incele.
A, *B*, *C* ve *D* noktalarının dörtgenin **köşeleri**, *AB*, *BC*, *CD* ve *DA* doğru parçalarının ise dörtgenin **kenarları** olduğunu hatırlayalım.
α, β, γ ve δ açıları dörtgenin iç açılarıdır (kısaca açılarıdır).
Aynı kenar üzerinde bulunan iki köşeye **komşu** (ardışık) **köşeler**, aynı kenar üzerinde bulunmayan iki köşeye **karşı köşeler** denir.

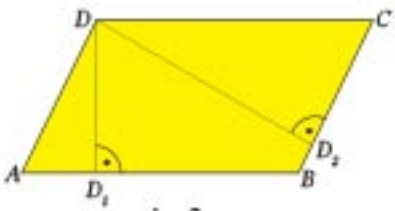


çiz. 2

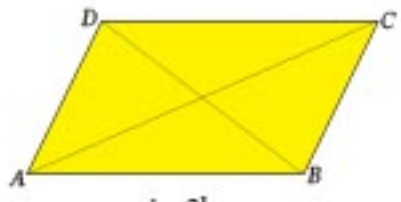
Örneğin, *A* ve *B* köşeleri komşu, *A* ve *C* köşeleri karşı köşelerdir.
Ortak köşesi olan iki kenara **komşu kenarlar**, ortak köşesi olmayan iki kenara **karşı kenarlar** denir. Bu anlamda *AB* ve *BC* kenarları komşu, *AB* ve *CD* kenarları karşı kenarlardır.
Aynı kenar üzerinde bulunan açılara **komşu açılar**, aynı kenar üzerinde bulunmayan açılara **karşı açılar** denir.
Bir dörtgenin iç açılarının toplamı 360°'dir, yani $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Paralelkenar

Karşılıklı kenar çiftleri paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir.
Paralelkenarda bir kenara ait doğru parçası taban, bu tabanın karşısındaki kenardan tabana çizilen dik doğru parçasının uzunluğuna ise o tabana ait **yükseklik** denir.
Ayrıca, paralelkenarın karşı olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçasına **paralelkenarın köşegeni** denir.



çiz. 3a



çiz. 3b

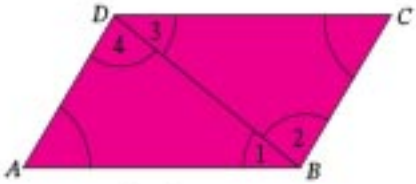
Çizim 3a'da $ABCD$ paralelkenarı verilmiştir. DD_1 ve DD_2 doğru parçaları, D köşesinden sırasıyla AB ve BC kenarlarına çizilen yüksekliklerdir. Her paralelkenarın iki yüksekliği olduğunu fark etmişsindir.
Çizim 3b'de $ABCD$ paralelkenarı verilmiştir. AC ve BD doğru parçaları paralelkenarın köşegenleridir. Her paralelkenarın iki köşegeni vardır.

Alıştırma 1

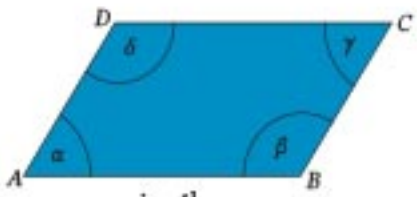
İstediğin bir paralelkenar çiz, ardından köşelerini ve açılarını adlandır. Komşu köşe, karşı köşe, komşu açı ve karşı açı çiftlerini yaz. Paralelkenarın:
a) yüksekliklerini, b) köşegenlerini çiz.

Üçgenlerde eşlik koşullarını kullanarak, daha önce öğrendiğin paralelkenarların bazı özelliklerini açıklayabiliriz.

Çizim 4a'daki $ABCD$ paralelkenarını incele. ABD ve CDB üçgenleri için:
A: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$, çünkü AB ve CD paralel doğrularını kesen BD doğru parçasına göre iç ters açılardır.
K: BD ortak kenardır.
A: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$, çünkü AD ve BC paralel doğrularını kesen BD doğru parçasına göre iç ters açılardır.
AKA: $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.
ABD ve CDB üçgenlerinin eşliğinden karşılık gelen kenarların ve açıların eşit olduğunu elde ederiz.
Daha açık olarak:
Karşı kenarlar $\overline{AB} = \overline{CD}$ ve $\overline{AD} = \overline{CB}$ eşittir,
Karşı açılar $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ ve $\sphericalangle ABC = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = \sphericalangle ADC$ eşittir.
α ve δ açıları, AB ve CD paralel doğrularını kesen AD doğru parçasına göre iç ters açılar olduğundan bütünlerdir (Çizim 4b), yani $\alpha + \delta = 180°$.



çiz. 4a

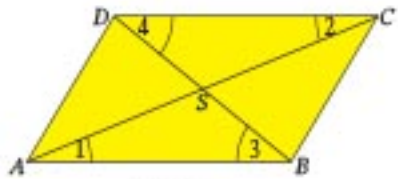


çiz. 4b

- Her köşegen paralelkenarı iki eş üçgene ayırır.
- Her paralelkenarda karşı kenarlar birbirine eşittir.
- Her paralelkenarda karşı açılar birbirine eşittir.
- Her paralelkenarda komşu açılar bütünlerdir.

Alıştırma 2

Üçgenlerde eşlik koşullarını kullanarak,
her paralelkenarda köşegenlerin kesişim noktası tarafından iki eş parçaya ayrıldığını açıkla.
Yönerge: $\Delta ABS \cong \Delta CDS$ olduğunu belirle (Çizim 5).



çiz. 5

Örnek 1

Bir paralelkenarın açılarından biri 70° ise diğer açılarını hesapla.

$\alpha = 70°$.
$\gamma = 70°$ Paralelkenarda karşı açıları eşittir.
$\alpha + \beta = 180°$ Paralelkenarda komşu açıları bütünlerdir.
$70° + \beta = 180°$
$\beta = 110°$
$\delta = \beta = 110°$ Paralelkenarda karşı açılar eşittir.

Alıştırma 3

Bir botanik parkında yeni bir sera yapılmaktadır. Seranın tabanı *ABCD* paralelkenarı biçiminde olacaktır. Mimar, arazide *A*, *B*, *C* ve *D* noktalarını işaretlemiş ve *A* köşesindeki açının 72° olduğunu ölçmüştür. Paralelkenarın açılarını hesapla.

Alıştırma 4

Verilen bir paralelkenarda iki karşı açının toplamı 142°'dir. Paralelkenarın açılarını hesapla.

Dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare birer paralelkenardır. Bu nedenle paralelkenarlara ait genel özellikler onlar için de geçerlidir. Devamında, problem çözmede kullanabileceğin dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve karelere ait bazı özel özellikleri vereceğiz.

Dikdörtgen

Bütün açıları dik açı olan paralelkenara **dikdörtgen** denildiğini hatırla.
Çizim 6'da *AC* ve *BD* köşegenleri olan *ABCD* dikdörtgeni verilmiştir.
ABC ve *BAD* üçgenleri için:



çiz. 6

K: *AB* ortak kenardır.
A: $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD = 90°$ *ABCD* paralelkenarı bir dikdörtgendir.
K: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Kparalelkenarın karşı kenarlarıdır.
KAK: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.
$\overline{AC} = \overline{BD}$ *ABC* ve *BAD* eş üçgenlerinin karşılık gelen kenarlarıdır.

Her dikdörtgende köşegenler birbirine eşittir.

Çizim 7'de köşegenleri eşit olan $ABCD$ paralelkenarı verilmiştir.
ABC ve BAD üçgenleri için:

K: AB ortak kenardır.

K: $\overline{AC} = \overline{BD}$, paralelkenarın köşegenleri için verilen koşula göre birbirine eşittir.



çiz. 7

K: $\overline{AD} = \overline{BC}$, paralelkenarın karşı kenarları olduğundan.

KKK: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$ ABC ve BAD eş üçgenlerinde karşılık gelen açılar olduklarından.

$\measuredangle ABC + \measuredangle BAD = 180°$ paralelkenarda komşu açılar olduklarından.

$\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$ ve $\measuredangle ABC + \measuredangle BAD = 180°$ olduğundan $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD = 90°$ elde edilir.

Bir paralelkenarın köşegenleri eşit ise bu paralelkenar dikdörtgendir.

Örnek 2

$ABCD$ dikdörtgeninde köşegenler S noktasında kesişmektedir.
a) Köşeleri A, B, C, D veya S olan tüm eş üçgen çiftlerini yaz.
b) Bunlardan hangileri ikizkenar, hangileri dik üçgendir?

a) $\Delta ABS \cong \Delta DCS$, $\Delta BSC \cong \Delta ASD$, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$, $\Delta BAD \cong \Delta CDA$ ve $\Delta DCB \cong \Delta CDA$.
b) İkizkenar olanlar: ΔABS, ΔDSC, ΔBSC ve ΔASD.
Dik üçgen olanlar: ΔABC, ΔBAD, ΔBCD ve ΔCDA.

Örnek 3

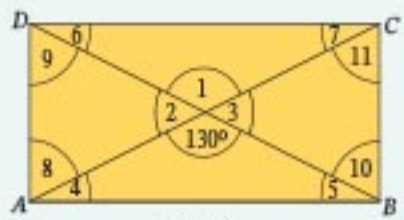
$ABCD$ dikdörtgeninin AC ve BD köşegenlerinin oluşturduğu geniş açı 130°'dir. Köşegenlerin dikdörtgenin kenarlarıyla oluşturduğu açılar kaç derecedir?

AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktasını S ile gösterelim. Çizim 8'den şunu görürüz:

$\measuredangle 1 = 130°$ ters açılar.

$\measuredangle 2 = \measuredangle 3 = 180° - 130° = 50°$ komşu bütünler açılar.

$\measuredangle 4 = \measuredangle 5 = 25°$ ABS ikizkenar üçgeninin taban açıları.



çiz. 8

$\measuredangle 6 = \measuredangle 7 = 25°$ DSC ikizkenar üçgeninin taban açıları.

$\measuredangle 8 = \measuredangle 9 = 65°$ ASD ikizkenar üçgeninin taban açıları.

$\measuredangle 10 = \measuredangle 11 = 65°$ BSC ikizkenar üçgeninin taban açıları.

Alıştırma 5

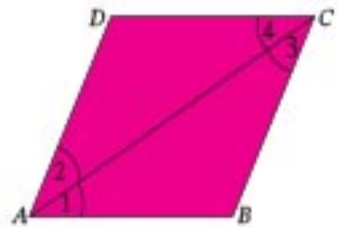
ABCD dikdörtgeninde, *AC* köşegeni ile *AD* kenarı arasındaki açı 32°'dir.
a) *AC* köşegeni ile *BC* kenarı arasındaki açıyı hesapla.
b) *AC* köşegeninin kenarlarla oluşturduğu diğer açıları bul.
c) *AC* ve *BD* köşegenleri arasındaki açı kaç derecedir?

Alıştırma 6

ABCD dikdörtgen biçimindeki bir odada, *A* noktasından karşı köşe C'ye tavandan bir *LED* şerit yerleştirilmiştir. Şerit, *AB* kenarı ile 52°'lik açı yapmaktadır.
a) *ABCD* dikdörtgenini çiz.
a) Şeridin *AD* kenarı ile oluşturduğu açı kaç derecedir?
b) Şerit ile *BC* kenarı arasındaki açı kaç derecedir?

Eşkenar Dörtgen

Bütün kenar uzunlukları eşit olan **paralelkenara** eşkenar dörtgen denildiğini hatırla.
Çizim 9'daki *ABCD* eşkenar dörtgeni için:
$\measuredangle BAD = \measuredangle BCD$ ve $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ paralelkenarda karşı açılar olduklarından.



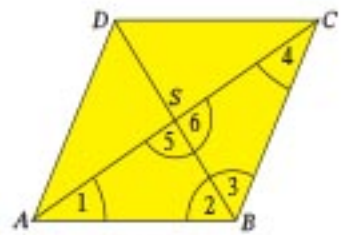
çiz. 9

ABC ve *ADC* ikizkenar üçgenleri için:
K: *AC* ortak kenardır.
K: $\overline{AB} = \overline{AD}$, eşkenar dörtgenin bütün kenarları eşittir.
K: $\overline{BC} = \overline{CD}$,
KKK: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ ve $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$ *ABC* ve *ADC* eş üçgenlerinin karşılık gelen açıları olduklarından.

AC'nin *A* köşesindeki açının ve *C* köşesindeki açının açıortayı olduğunu görürüz.
Benzer şekilde, *BD*'nin *B* köşesindeki açının ve *D* köşesindeki açının açıortayı olduğunu açıklayabiliriz.

Her eşkenar dörtgende köşegenler karşı açıların açıortaylarıdır.

Çizim 10'da, *AC* ve *BD* köşegenleri S noktasında kesişen *ABCD* eşkenar dörtgeni verilmiştir.
ΔABS ve ΔCBS üçgenleri için:
K: *BS* ortak kenardır.
K: $\overline{AB} = \overline{BC}$, eşkenar dörtgenin bütün kenarları eşittir.
K: $\overline{AS} = \overline{CS}$, eşkenar dörtgende köşegenler birbirini ortalar.
KKK: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.
$\measuredangle 5 = \measuredangle 6$ ΔABS ve ΔCBS eş üçgenlerinin karşılık gelen açıları olduklarından.



çiz. 10

$\measuredangle 5 = \measuredangle 6$ ve $\measuredangle 5 + \measuredangle 6 = 180°$ olduğundan $\measuredangle 5 = \measuredangle 6 = 90°$ elde edilir.
AC ve *BD* köşegenleri birbirine diktir ($AC \perp BD$).

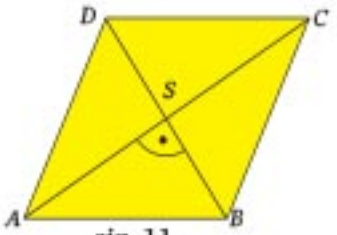
Her eşkenar dörtgende köşegenler birbirine diktir.

Çizim 11'de, köşegenleri AC ve BD birbirine dik olan $ABCD$ paralelkenarı verilmiştir.
ΔABS ve ΔCBS üçgenleri için:

K: BS ortak kenardır.

A: $\measuredangle ASB = \measuredangle CSB = 90°$, paralelkenarın köşegenlerinin dik olma koşuluna göre.

K: $\overline{AS} = \overline{CS}$, paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar.



çiz. 11

KAK: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\overline{AB} = \overline{BC}$ çünkü ΔABS ve ΔCBS eş üçgenlerinin karşılık gelen kenarlarıdır.

Bir paralelkenarda köşegenler birbirine dik ise bu paralelkenar eşkenar dörtgendir.

Alıştırma 7

$ABCD$ eşkenar dörtgeninde A_1, B_1, C_1 ve D_1 noktaları sırasıyla AB, BC, CD ve DA kenarlarının orta noktalarıdır. Bu noktaların birleştirilmesiyle nasıl bir paralelkenar elde edilir? Cevabını gerekçelendir.

Örnek 4

Bir eşkenar dörtgenin kenar uzunluğu 5 cm ve bir açısı 120° ise kısa köşegeninin uzunluğunu hesapla.

Sorudaki koşulları sağlayan $ABCD$ eşkenar dörtgeni Çizim 12'de verilmiştir. Buna göre:

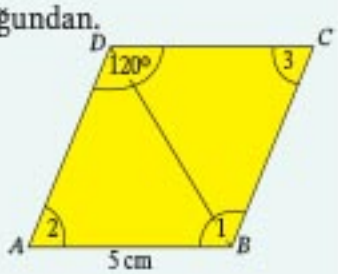
$\measuredangle 1 = 120°$ eşkenar dörtgende karşı açılar eşit olduğundan.

$\measuredangle 2 = \measuredangle 3$ eşkenar dörtgende karşı açılar eşit olduğundan.

$120° + 120° + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 360°$ eşkenar dörtgenin iç açıları toplamı 360° olduğundan.

$\measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 120°$

$\measuredangle 2 = \measuredangle 3$ ve $\measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 120°$ olduğundan $\measuredangle 2 = \measuredangle 3 = 60°$ bulunur.

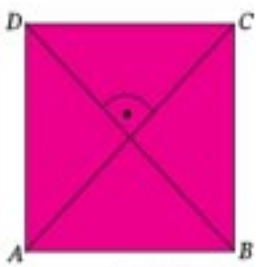


çiz. 12

ABD üçgeni, tepe açısı 60° olan bir ikizkenar üçgen olduğu için eşkenar üçgendir. Buna göre kısa köşegen $\overline{BD} = 5\text{cm}$ olur.

Kare

Her kare, kenarları eşit olan bir dikdörtgen ve açıları dik olan bir eşkenar dörtgen olduğundan, dikdörtgenler ve eşkenar dörtgenler için geçerli olan bütün özellikler kareler için de geçerlidir. Bunların yanında karelerin aşağıdaki ek özellikleri de vardır.
Karede köşegenler eşittir, çünkü kare bir dikdörtgendir.
Ayrıca köşegenler birbirine diktir, çünkü kare aynı zamanda bir eşkenar dörtgendir (Çizim 13).



çiz. 13

- Her karede köşegenler eşit ve birbirine diktir.
- Bir paralelkenarda köşegenler eşit ve birbirine dik ise bu paralelkenar karedir.

Örnek 5

Bir müzede, $ABCD$ kare biçiminde bir salonda etkileşimli bir sergi vardır. A, B, C ve D köşelerine lazer ışınları yayan cihazlar yerleştirilmiştir.
Sergi açıldığında A köşesinden C köşesine doğru bir ışın gönderilir (AC köşegeni boyunca), B köşesinden ise D köşesine doğru bir ışın gönderilir (BD köşegeni boyunca).
Cihazlar, iki ışın her kesiştiğinde bir ışık efekti etkinleşecek şekilde programlanmıştır.
a) AC ve BD ışınları hangi açıyla kesişir?
b) AC ve BD köşegenleri eşit midir? Nedenini açıkla.
c) AC köşegeni AB kenarı ile hangi açıyı oluşturur?

Salon kare biçimindedir. Bu nedenle:
a) AC ve BD ışınları dik açıyla kesişir.
b) AC ve BD köşegenleri eşittir.
c) AC köşegeni AB kenarı ile 45°'lik açı oluşturur.

Alıştırma 8

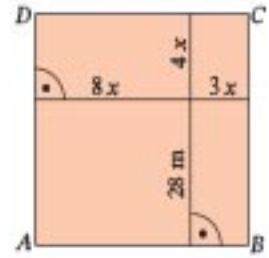
$ABCD$ karesinde A_1, B_1, C_1 ve D_1 noktaları sırasıyla AB, BC, CD ve DA kenarlarının orta noktalarıdır. Bu noktaların birleştirilmesiyle nasıl bir paralelkenar elde edilir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir paralelkenarın iki karşı açısının toplamı 94°'dir. Paralelkenarın her bir açısının ölçüsünü bul.
2. Bir paralelkenarın açılarından birinin diğerinin 2 katı olduğu biliniyorsa paralelkenarın açılarını hesapla.
3. Eşkenar dörtgenin büyük köşegeni, bir kenarıyla 35°'lik açı oluşturur. Eşkenar dörtgenin açılarını bul.
4. Bir köşegeni kenarına eşit olan eşkenar dörtgenin açılarını bul.
5. Dikdörtgenin 6 cm uzunluğundaki kenarı, köşegenle 60°'lik açı oluşturur. Köşegenin uzunluğunu bul.
6. Dikdörtgenin köşegenleri 132°'lik açıyla kesişir. Köşegenler ile dikdörtgenin kenarları arasındaki açıları bul.
7. Eşkenar dörtgende yükseklik ile kenar arasındaki açı 34°'dir. Eşkenar dörtgenin açılarını bul.
8. Bir açısı 46° olan eşkenar dörtgende köşegenler ile kenarlar arasındaki açıları bul.
9. Yükseklik ile kısa köşegen arasındaki açı 35° ise eşkenar dörtgenin açılarını bul.

10. $ABCD$ dikdörtgeninde M noktası AB kenarının orta noktasıdır. M noktasından geçen bir doğru, CD kenarını N noktasında kesecek şekilde çizilmiştir ve $m(\widehat{BMN}) = 75°$'dir. Çizim yap, ardından aşağıdaki açıları hesapla:
a) $m(\widehat{MNC})$, b) $m(\widehat{AMN})$.

11. Kare biçimindeki bir arsa, Çizim 14'teki gibi bölümlere ayrılmıştır. Arsanın boyutlarını (kenarlarını) bul.



çiz. 14

Araştırma

Strafor üzerine kareli kâğıt yerleştir. Daha sonra 4 toplu iğneyi bir dörtgenin köşeleri olacak şekilde yerleştir ve etraflarına esnek bir bant (lastik) geçir.
Toplu iğnelerin konumlarını değiştirerek paralelkenarların özelliklerini araştır. Köşegenlerin kesişim noktasının konumuna göre bir dörtgenin ne zaman paralelkenar olduğunu incele.
Bu paralelkenar ne zaman eşkenar dörtgen olur?
Paralelkenarda dikdörtgen elde etmek için köşegenlerde nasıl bir değişiklik yapılmalıdır?

10. YAMUK VE DELTOİD

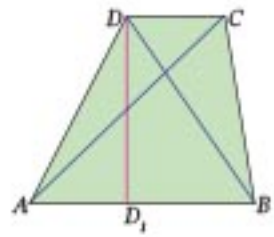
Etkinlik

Çizim 1'de verilen dörtgenlerden hangisinin yalnızca bir çift paralel kenarı vardır?



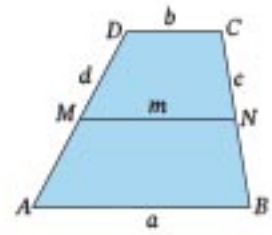
çiz. 1

Karşılıklı kenar çiftlerinden yalnızca biri paralel olan dörtgene yamuk denildiğini hatırla.
Çizim 2'de $ABCD$ yamuğu gösterilmiştir. AB ve CD kenarları paraleldir ve **tabanlar** (üst ve alt taban) olarak adlandırılır.
AD ve BC kenarları paralel değildir ve yamuğun yan **kenarları** olarak adlandırılır.
Paralel kenarlar arasındaki uzaklığa yamuğun **yüksekliği** denir.
Karşılıklı iki köşeyi birleştiren doğru parçasına **yamuğun köşegeni** denir.
DD_1 doğru parçası yamuğun yüksekliği, AC ve BD doğru parçaları ise yamuğun köşegenleridir.



çiz. 2

AD yan kenarının orta noktasını M, BC yan kenarının orta noktasını N ile gösterirsek, MN doğru parçası $ABCD$ yamuğunun orta tabanıdır (Çizim 3). Tabanların uzunlukları $a = \overline{AB}$, $b = \overline{CD}$; yan kenarların uzunlukları $c = \overline{BC}$ ve $d = \overline{AD}$; orta tabanın uzunluğu ise $m = \overline{MN}$ ile gösterilir.



çiz. 3

Yamuğun yan kenarlarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasına yamuğun **orta tabanı** denir.

Alıştırma 1

İstediğin bir yamuk çiz, ardından şunları çiz:
a) yüksekliklerini, b) köşegenlerini, c) orta tabanını.

Yamuğun orta tabanı, tabanlara paraleldir ve uzunluğu taban uzunlukları toplamının yarısına eşittir.

Buna göre, yamuğun orta tabanı m uzunluğu şu formülle hesaplanır:

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Burada a ve b yamuğun tabanlarıdır.

Örnek 1

Taban uzunlukları 8 cm ve 5 cm olan bir yamuğun orta tabanını hesapla.

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{8+5}{2} = 6{,}5\,\text{cm}$ Yamuğun orta tabanı formülünde yerine koyarak hesaplıyoruz.

Alıştırma 2

Aşağıdaki taban uzunluklarına sahip yamuğun orta taban uzunluğunu hesapla:
a) $a = 17$ cm ve $b = 11$ cm, b) $a = 4{,}2$ dm ve $b = 28$ cm.

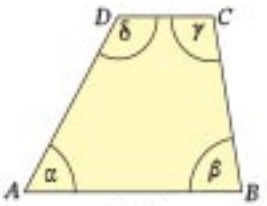
Alıştırma 3

Bir yamuğun tabanları arasındaki fark 10 cm'dir. Orta taban uzunluğu m = 15 cm ise taban uzunluklarını hesapla.

Çizim 4'teki *ABCD* yamuğunun iç açıları α, β, γ ve δ'dir.
Yamuğun kenarlarını doğrular elde edecek şekilde uzatırsak:

$\alpha + \delta = 180°$ *AB* ve *DC* paralel doğrularını kesen *AD* kesenine göre aynı taraftaki iç açılar olduklarından.

$\beta + \gamma = 180°$ *AB* ve *DC* paralel doğrularını kesen *BC* kesenine göre aynı taraftaki iç açılar olduklarından. .



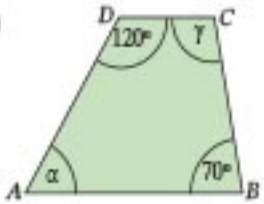
çiz. 4

Yamuğun aynı yan kenarı üzerinde bulunan açılar bütünlerdir.

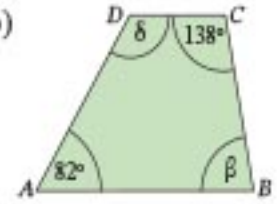
Örnek 2

Çizim 5'te verilen yamuğun açılarını hesapla:

a)



b)



çiz. 5

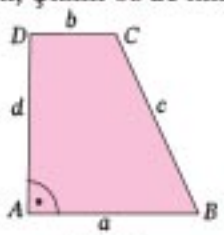
Aynı yan kenar üzerinde bulunan açılar bütünler olduğundan:

a) $\alpha + 120° = 180°$, $\alpha = 60°$;
$70° + \gamma = 180°$, $\gamma = 110°$.

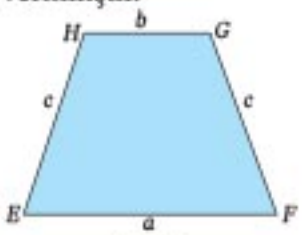
b) $\delta + 82° = 180°$, $\delta = 98°$;
$\beta + 138° = 180°$, $\beta = 42°$.

Yan kenarlarından biri tabanlarına dik olan yamuğa **dik yamuk** denir.
Yan kenar uzunlukları eşit olan yamuğa **ikizkenar yamuk** denir.

Çizim 6a'da dik yamuk, Çizim 6b'de ikizkenar yamuk verilmiştir.



çiz.6a

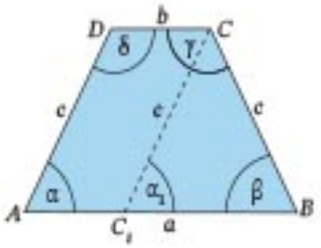


çiz. 6b

Alıştırma 4

İstediğin bir ikizkenar yamuk çiz, ardından onun:
a) yüksekliğini, b) köşegenlerini, c) orta tabanını çiz.

Çizim 7'de *ABCD* ikizkenar yamuğu verilmiştir.
AD'ye paralel olan CC_1 doğru parçası ile yamuk,
C_1BC ikizkenar üçgenine ve AC_1CD paralelkenarına ayrılır.



çiz. 7

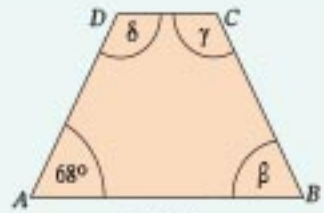
$\alpha_1 = \beta$ C_1BC ikizkenar üçgeninde taban açıları olduklarından.
$\alpha_1 = \alpha$ C_1C ve AD paralel doğrularını kesen AB kesenine göre yöndeş açılar olduklarından.
$\beta = \alpha$ Yukarıdaki iki eşitlikten elde edilir.

Her ikizkenar yamukta aynı taban üzerinde bulunan açılar(taban açıları) eşittir.

Örnek 3

$ABCD$ ikizkenar yamuğunda açılardan biri $\alpha = 68°$ ise yamuğun açılarını hesapla (Çizim 8).

$\beta = \alpha = 68°$ Açılar, AB tabanı üzerinde bulunan açılar olduklarından birbirlerine eşittir.
$\alpha + \delta = 180°$ Açılar, AD yan kenarı üzerinde bulunan açılar olduklarından bir bütünlerdir.
$68° + \delta = 180°$ Yerine koyup hesaplarız.
$\delta = 180° - 68°$
$\delta = 112°$.
$\gamma = \delta = 112°$ Açılar, CD tabanı üzerinde bulunan açılar olduklarından eşittir.

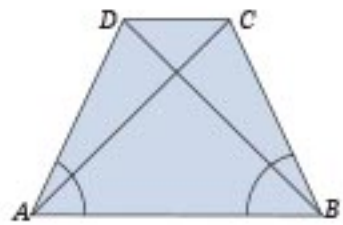


çiz. 8

Alıştırma 5

Bir ikizkenar yamuğun tabanlarından biri üzerinde bulunan açıların toplamı 150° 20''dir. Yamuğun diğer açılarını hesapla.

Çizim 9'da $ABCD$ ikizkenar yamuğu verilmiştir.
ABC ve BAD üçgenleri için:
K: AB ortak kenardır.
A: $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$, ikizkenar yamuğun AB tabanı üzerindeki açılar eşit olduklarından.
K: $\overline{AD} = \overline{BC}$, $ABCD$ yamuğu sorunun koşuluna göre ikizkenardır.
KAK: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.
$\overline{AC} = \overline{BD}$ eş üçgenlerde karşılık gelen kenarlar olduklarından.

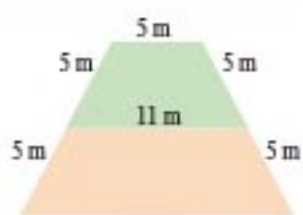


çiz. 9

İkizkenar yamukta köşegenler eşittir.

Örnek 4

Okul bahçesindeki çiçek alanı ikizkenar yamuk şeklindedir (Resim 1). Üst taban, yan kenarlara eşittir ve 5 m uzunluğundadır. Alt taban 11 m uzunluğundadır.
Okul, yan kenarları iki katına çıkaracak şekilde çim alanı genişletmeyi ve ardından etrafını çitle çevirmeyi planlamaktadır.
Tüm çim alan için kaç metre çit gereklidir?



Resim 1

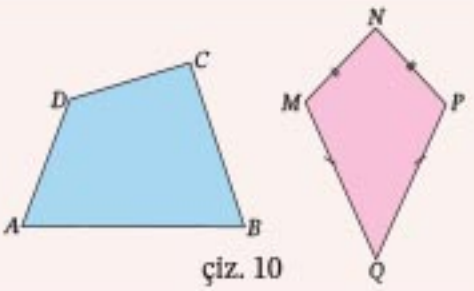
Yan kenarların iki katına çıkarılmasıyla orta tabanı 11 m olan bir ikizkenar yamuk elde ederiz. Buna göre, $11 = \frac{a+5}{2}$, $a = 2 \cdot 11 - 5 = 17$ m.

Çim alanın çevresi $L = 5 + 10 + 10 + 17 = 42$ m olur.

Deltoid

Etkinlik

Çizim 10'da *ABCD* ve *MNPQ* olmak üzere iki trapezoid verilmiştir.
Bunların hiçbirinde paralel kenar çifti yoktur.
Hangisinin ikişer ikişer komşu kenarları eşittir?

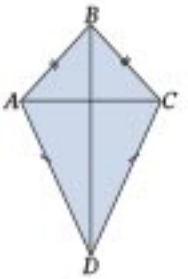


çiz. 10

MNPQ trapezoidinin iki çift komşu(ardışık) kenarlarının eşit olduğunu, yani $\overline{MN} = \overline{PN}$ ve $\overline{MQ} = \overline{PQ}$ olduğunu fark etmiş olmalısın.

Karşılıklı komşu kenar uzunlukları ikişer ikişer eşit olan dörtgene **deltoid** denir.

Çizim 11'deki *ABCD* deltoidi için:
K: *BD* ortak kenardır.
K: $\overline{AB} = \overline{CB}$,
K: $\overline{AD} = \overline{CD}$,
KKK: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

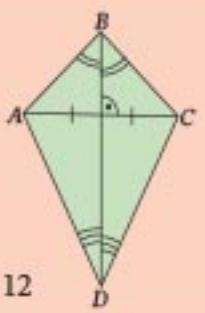


çiz. 11

Deltoidin tepe köşelerini birleştiren (simetri ekseni olan) köşegeni, deltoidi iki eş üçgene böler.

Bu iki üçgenin eşliğinden aşağıdaki özellikleri elde ederiz (Çizim 12).

- Deltoidin tepe köşeleri dışındaki karşılıklı açılarının ölçüleri eşittir.
- Deltoidin tepe köşelerini birleştiren (simetri ekseni olan) köşegeni, diğer köşegeni ortalar.
- Deltoidin taban köşelerini birleştiren köşegeni, deltoidi iki ikizkenar üçgene böler.
- Deltoidin köşegenleri birbirine diktir.



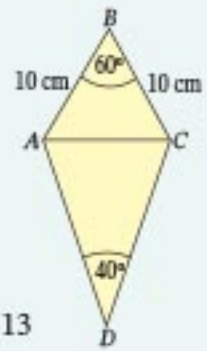
çiz. 12

Örnek 5

Deltoidin kısa kenarları 10 cm uzunluğundadır. İki karşı açısı 60° ve 40°'dir. Kısa köşegenin uzunluğu kaçtır? Çizim yap ve hesapla.

Sorudaki koşulları sağlayan *ABCD* deltoidi Çizim 13'te verilmiştir.
ACB üçgeni, tepe açısı 60° olan bir ikizkenar üçgen olduğu için eşkenar üçgendir.

Buna göre kısa köşegen $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$ olur.



çiz. 13

Alıştırma 7

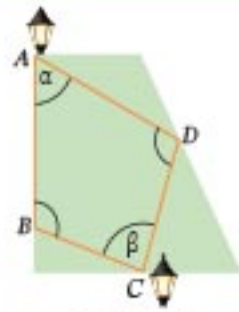
Deltoidde komşu olmayan iki açı 115° ve 46°'dir. Kalan açıları hesapla.

Alıştırma 8

Deltoidin iç açılarından biri 51°, eş açıların toplamı ise 144°'dir. Deltoidin açılarını hesapla.

Alıştırma 9

Bir parkta, dik yamuk şeklindeki bir çim alana *A* ve *C* noktalarında ışıklar yerleştirilmiştir (Resim 2). *A*'daki ışık $\alpha = 38°$ açıyla, *C*'deki ışık ise $\beta = 132°$ açıyla ışık yaymaktadır.
Kesişimle *ABCD* deltoidi oluşuyorsa α ve β açılarının kolları hangi açılarla kesişir?



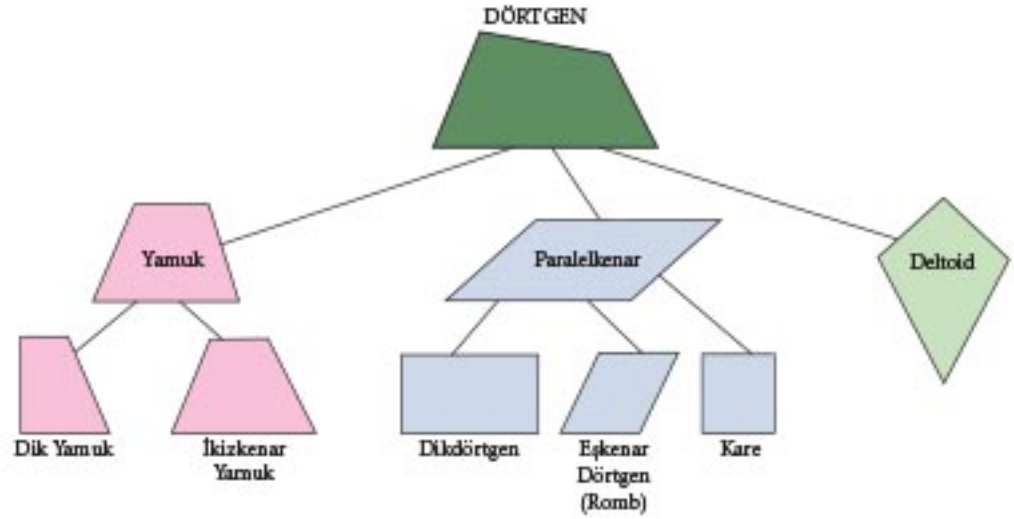
Resim 2

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Tabanları $a = 18{,}6$ cm ve $b = 13{,}8$ cm olan yamuğun orta tabanını hesapla.
2. Bir yamuğun orta tabanı 7,3 cm, tabanlarından biri 8,7 cm'dir. Diğer tabanı hesapla.
3. Bir ikizkenar yamuğun orta tabanı 7 cm uzunluğundadır ve tabanları arasındaki fark 5 cm'dir. Taban uzunluklarını hesapla.
4. Yan kenar uzunlukları 3 cm ve 4 cm olan bir yamuğun çevresi 20 cm'dir. Yamuğun orta taban uzunluğunu hesapla.
5. Bir dik yamuğun tabanlarından biri üzerinde bulunan açıların toplamı 235°'dir. Yamuğun diğer açılarını hesapla.

6. Bir ikizkenar yamuğun alt tabanındaki açılardan biri 45°'dir, yüksekliği 8 cm'dir ve küçük tabanı 6 cm uzunluğundadır. Yamuğun büyük tabanının uzunluğunu hesapla.
7. Küçük tabanındaki açı, büyük tabanındaki açının iki katı olan ikizkenar yamuğun açılarını hesapla.
8. Bir iç açısı 45°, taban uzunlukları 9 cm ve 5 cm olan ikizkenar yamuğun yüksekliğini hesapla.
9. $ABCD$ ikizkenar yamuğunda, uzun taban, yan kenar ve yamuğun köşegenlerinden biriyle oluşan ABC üçgeni ikizkenardır. $\measuredangle BAC = 40°$ ise $\measuredangle DAC$ açısını hesapla.
10. Deltoidde iki karşı açı 51° ve 86°'dir. Deltoidin diğer açılarını hesapla.
11. Deltoidin iç açılarından biri 47°, eş açıların toplamı ise 236°'dir. Deltoidin açılarını bul.
12. **Proje Görevi**
    Verilen zihin haritasını fon kartonuna çiz. Soruların cevaplarını uygun dörtgenin içine yazacak şekilde doldur.

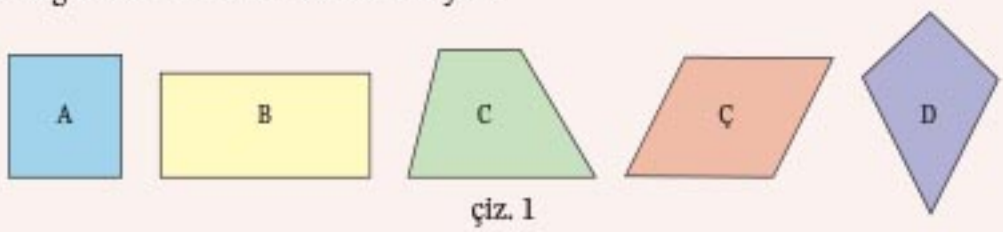
DÖRTGEN Dörtgen nedir? Hangi iki kenar komşu, hangileri karşı kenardır? Hangi iki köşe komşu, hangileri karşı köşedir? İç açılarının toplamı kaçtır?	YAMUK Yamuk nedir? Paralel olmayan kenarlara ne ad verilir? Yamuğun orta tabanı nedir? Aynı yan kenar üzerindeki açılar nasıldır?	DELTOİD Kenarları nasıldır? Deltoidin köşegenleri birbirine göre nasıl konumdadır?
İKİZKENAR YAMUK Yan kenarlar birbirine göre nasıldır? Aynı taban üzerindeki açılar nasıldır? Köşegenler birbirine göre nasıldır?	DİK YAMUK Hangi yamuğa dik yamuk denir?	PARALELKENAR Paralelkenar nedir? Karşı kenarlar birbirine göre nasıldır? Karşı açıları nasıldır? Komşu açıları nasıldır? Köşegenleri kesişim noktalarına göre nasıl bir özelliğe sahiptir?
DİKDÖRTGEN Köşegenlerinin uzunlukları nasıldır? Açıları nasıldır?	KARE Köşegenlerinin uzunlukları nasıldır? Kenarlarının uzunlukları nasıldır? Açıları nasıldır? Köşegen, karşı açılar için ne ifade eder?	EŞKENAR DÖRTGEN (ROMB) Kenarlarının uzunlukları nasıldır? Köşegenleri hangi açıyla kesişir? Köşegen, karşı açılar için ne ifade eder?



11. PİSAGOR TEOREMİNİN DÖRTGENLERDE UYGULANMASI

Etkinlik

a) Çizim 1'deki dörtgenleri adlandır.
b) Her dörtgen türü hakkında bildiklerini yaz.

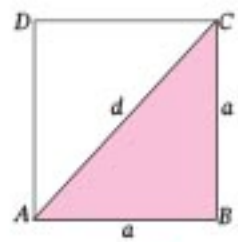


çiz. 1

Pisagor Teoremi; dörtgenlerle ilgili sorularda da uygulanır (kareler, dikdörtgenler, yamuklar, eşkenar dörtgenler, deltoidler vb.). Bazı doğru parçaları çizilerek bu dörtgenler, aralarında dik üçgenler bulunacak şekilde parçalara ayrılabilir. Bunu aşağıdaki sorularla göstereceğiz. Hesaplamalarda hesap makinesi kullanacağız ve sonucu virgülden sonra iki basamağa yuvarlayacağız.

Pisagor Teoreminin Kare, Dikdörtgen ve Eşkenar Dörtgende Uygulanması

Çizim 2'de kenarı a olan $ABCD$ karesi verilmiştir. d köşegeni, kareyi iki eş ikizkenar dik üçgene ayırır. Bu köşegen, bu üçgenlerin her birinin hipotenüsüdür.



çiz. 2

Pisagor Teoremini bu üçgenlerin her birine uygulayarak, karenin köşegeni d'yi hesaplamak için kullanılan formülü elde ederiz:

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Burada a, karenin kenar uzunluğudur.

Örnek 1

Kenar uzunluğu $a = 9$ cm olan bir karenin köşegeni d'yi hesapla.

$d^2 = 2a^2, d^2 = 2 \cdot 9^2$	Karenin köşegenini hesaplama formülünde yerine koyarız.
$d = 12{,}73$ cm	Sonucu iki ondalık basamağa yuvarlarız.

Örnek 2

Köşegeni $d = 8$ cm olan bir karenin kenar uzunluğu kaçtır?

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,\ a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32,\ a = \sqrt{32} = 5{,}66$ cm

Alıştırma 1

Verilenleri hesapla:

a) $a = 6$ cm ise karenin köşegeni d

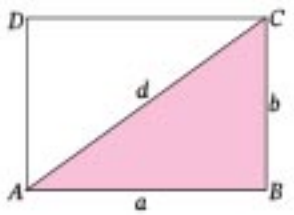
b) $d = 10$ cm ise karenin kenar uzunluğu a

Çizim 3'te kenar uzunlukları a ve b olan $ABCD$ dikdörtgeni verilmiştir. Köşegen d, dikdörtgeni iki eş dik üçgene ayırır. Bu köşegen, her iki üçgenin de hipotenüsüdür.

Pisagor Teoremini bu üçgenlerin her birine uygularsak, dikdörtgenin köşegeni d için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$d^2 = a^2 + b^2$

Burada a ve b, dikdörtgenin kenar uzunluklarıdır.



çiz. 3

Örnek 3

Kenar uzunlukları $a = 20$ cm ve $b = 40$ cm olan bir dikdörtgenin köşegeni d'yi hesaplayınız.

Dikdörtgenin köşegenini hesaplama formülünde verilen değerleri yerine koyarız.

$d^2 = a^2 + b^2 = 20^2 + 40^2 = 400 + 1600 = 2000,$

$d = \sqrt{2000} = 44{,}72$ cm .

Örnek 4

d = 16 cm ve $b = 7$ cm ise, dikdörtgenin a kenarını hesapla.

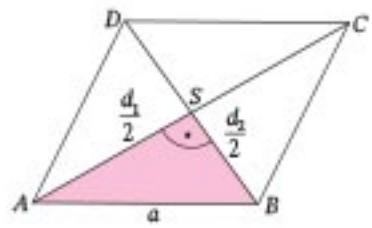
$d^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = d^2 - b^2 = 16^2 - 7^2 = 256 - 49 = 207$, $a = 14{,}39$ cm.

Örnek 5

Boyu 2,1 m olan bir basketbolcuya uzunluğu 2 m ve genişliği 1 m olan bir otel yatağı verilmiştir. Basketbolcu yatağa uzanabilir mi?

Otel yatağının köşegeni $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5^2} = 2{,}24$ m 'dir.
2,1 m < 2,24 m olduğundan, basketbolcu yatağa uzanabilecektir.

Çizim 4'te, kenarı a ve köşegenleri d_1 ve d_2 olan $ABCD$ eşkenar dörtgeni verilmiştir.
Eşkenar dörtgenin köşegenlerinin birbirlerini ortaladığını ve birbirlerine dik olduğunu hatırla. Buna göre, köşegenler eşkenar dörtgeni dört dik üçgene ayırır. Pisagor teoremini dik üçgen ASB'ye uygulayarak, Çizim 4'teki eşkenar dörtgenin a kenarını hesaplama formülünü elde ederiz.



çiz. 4

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

burada d_1 ve d_2 eşkenar dörtgenin köşegenleridir.

Örnek 6

Köşegenleri 24 cm ve 10 cm olan bir eşkenar dörtgenin çevresini hesapla.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \quad a = \sqrt{169} = 13\,\text{cm}.$$

Çevresi $L = 4a = 52$ cm'dir.

Alıştırma 2

Kenar uzunluğu $a = 5$ cm olan bir eşkenar dörtgenin büyük köşegenini hesapla.
Küçük köşegen $d_2 = 3$ cm'dir.

Örnek 7

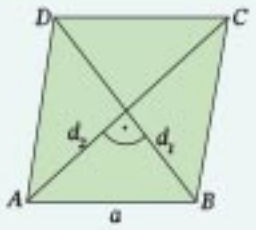
Mile, eşkenar dörtgen biçimindeki çim alanını küçük köşegen d_1 boyunca bir çitle iki eşit parçaya bölmek istiyor (Çizim 5).
Diğer köşegenin $d_2 = 80$ m ve kenarın $a = 41$ m olduğunu biliyorsa, kaç metre çit satın almalıdır?

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 41^2 - \left(\frac{80}{2}\right)^2 = 1681 - 1600 = 81$$

$$\frac{d_1}{2} = 9$$

$d_1 = 18$ m.

Mile, $2 \cdot 41 + 18 = 100$ m çit satın almalıdır.



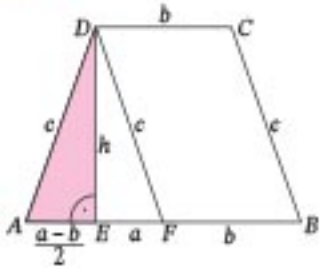
çiz. 5

Pisagor Teoreminin Yamuk ve Deltoidde Uygulanması

BC kenarına paralel olan *DF* doğru parçası ile ikizkenar yamuk *BCDF* paralelkenarına ve tabanı $a - b$, yüksekliği h olan ikizkenar üçgen *AFD*'ye ayrılır (Çizim 6).
DE yüksekliği, ikizkenar üçgen *AFD*'yi iki eş dik üçgene ayırır.
Bunların her birine Pisagor teoremini uygulayarak,
ikizkenar yamuğun *c* yan kenarı için

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

formülü elde ederiz, burada h yükseklik, *a* ve *b* ise yamuğun tabanlarıdır.



çiz. 6

Örnek 8

Tabanları $a = 10$ cm ve $b = 4$ cm, yan kenar uzunluğu $c = 5$ cm olan ikizkenar yamuğun yüksekliğini hesapla.

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 5^2 - \left(\frac{10-4}{2}\right)^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$h = 4$ cm.

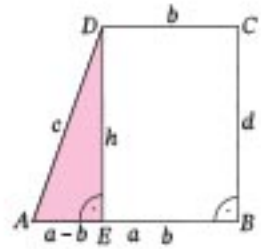
Alıştırma 3

Tabanları $a = 18$ cm ve $b = 8$ cm, yüksekliği $h = 12$ cm olan ikizkenar yamuğun çevresini hesapla.
Yönerge: İkizkenar yamuğun çevresi $L = a + b + 2c$ formülüyle hesaplanır; burada *a* ve *b* tabanlar, *c* ise ikizkenar yamuğun yan kenarıdır.

Çizim 7'de, tabanları a ve b, yüksekliği h olan
$ABCD$ dik yamuk verilmiştir.
Dik üçgen AED'ye Pisagor teoremini uygulayarak,
dik yamuğun c yan kenarını hesaplama formülünü elde ederiz,

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2$$

burada h yükseklik, a ve b ise yamuğun tabanlarıdır.



çiz. 7

Örnek 9

Tabanları $a = 10$ cm ve $b = 6$ cm, yan kenarı $c = 12$ cm olan dik yamuğun yüksekliğini hesapla.

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2,\ h^2 = c^2 - (a-b)^2 = 12^2 - (10-6)^2 = 128$$

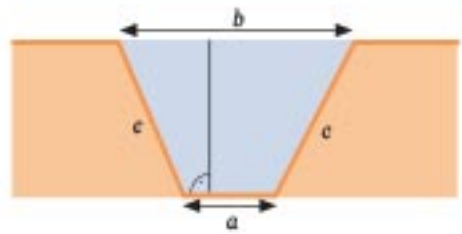
$$h = \sqrt{128} = 11{,}31\,\text{cm}.$$

Alıştırma 4

Tabanları $a = 12$ cm ve $b = 9$ cm, yüksekliği $h = 4$ cm olan dik yamuğun çevresini hesapla.
Yönerge: Dik yamuğun çevresi $L = a + b + c + d$ formülüyle hesaplanır;
burada a ve b tabanlar, c ve d ise dik yamuğun yan kenarlarıdır.

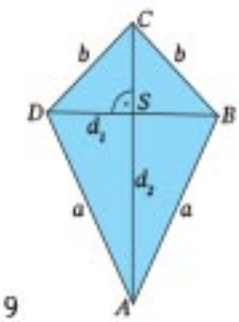
Alıştırma 5

Bir kanalın derinliği 2,4 m, genişliği ise
$b = 3{,}2$ m'dir (Çizim 8). Yan duvarları $c = 25$ dm
uzunluğundaysa, kanalın taban genişliği
a kaç metredir?



çiz. 8

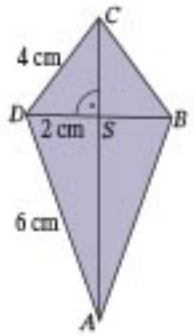
Çizim 9'da, kenar uzunlukları a ve b, köşegen uzunlukları d_1 ve d_2
olan $ABCD$ deltoidi verilmiştir.
Deltoidde köşegenlerin birbirine dik olduğunu hatırla.
Köşegenler, deltoidi dört dik üçgene ayırır.



çiz. 9

Örnek 10

Çizim 10'daki verilere göre *ABCD* deltoidinin köşegenlerini hesapla.



çiz. 10

Şekildeki verilere göre:

$d_1 = \overline{BD} = 2 \cdot 2 = 4\,\text{cm}$

$\overline{CS}^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$\overline{CS} = \sqrt{12} = 3{,}46\,\text{cm}$

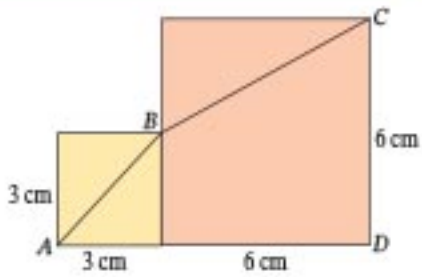
$\overline{AS}^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

$\overline{AS} = \sqrt{32} = 5{,}66\,\text{cm}$

$d_2 = \overline{AS} + \overline{CS} = 5{,}66 + 3{,}46 = 9{,}12\,\text{cm}$.

Alıştırma 6

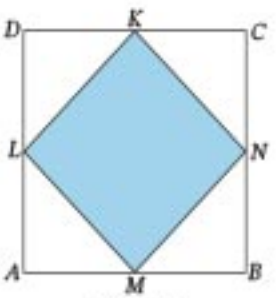
Kenarları 3 cm ve 6 cm olan iki kare, Çizim 11'deki gibi yan yana yerleştirilmiştir. *ABCD* dörtgeninin çevresini hesapla.



çiz. 11

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Kenarları aşağıda verilen dikdörtgenlerin köşegen uzunluğunu bul:
   a) $a = 2{,}4$ cm ve $b = 3{,}2$ cm, b) $a = 14$ cm ve $b = 48$ cm.
2. Kenarı $a = 7{,}5$ cm uzunluğunda olan karenin köşegen uzunluğunu bul.
3. Köşegenleri verilen eşkenar dörtgenin çevresini bul:
   a) 48 cm ve 64 cm, b) 66 cm ve 88 cm.
4. Kenarı ve bir köşegeni verilen eşkenar dörtgenin diğer (d_2) köşegenini bul:
   a) $a = 26$ cm ve $d_1 = 48$ cm, b) $a = 30$ cm ve $d_1 = 36$ cm.
5. *ABCD* karesinin kenarı 8 cm'dir. İçine, köşeleri verilen karenin kenarlarının orta noktalarında bulunan başka bir *MNKL* karesi çizilmiştir. *MNKL* karesinin çevresini bul (Çizim 12).



çiz. 12

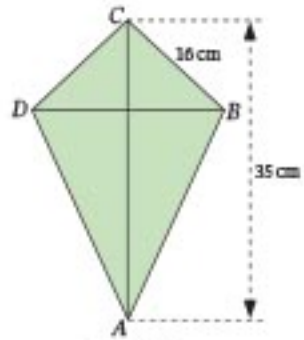
6. Ivan, çapı 230 cm olan yuvarlak bir masa satın almıştır. Yüksekliği 2 m ve genişliği 90 cm olan giriş kapısından evine sokabilecek mi?
7. Eşkenar dörtgenin yüksekliği 3 cm, dar açısı ise 45°'dir. Eşkenar dörtgenin çevresini bul.
8. İkizkenar yamuğun tabanları $a = 42$ cm ve $b = 24$ cm, yan kenarının uzunluğu ise 41 cm'dir. Yamuğun yüksekliğini hesapla.

9. Bir dik yamuğun iki tabanı 5 cm ve 10 cm uzunluğundadır, daha uzun yan kenarının uzunluğu ise 13 cm'dir. Yamuğun yüksekliğini hesapla.

10. Tabanları $a = 23$ cm ve $b = 11$ cm, yüksekliği $h = 8$ cm olan ikizkenar yamuğun çevresini hesapla.

11. Küçük köşegen, deltoidi kenarı 10 cm olan eşkenar üçgene ve yüksekliği 12 cm olan ikizkenar üçgene ayırır. Deltoidin kenarlarını hesapla.

12. Emran, Çizim 13'teki gibi deltoid biçiminde bir uçurtma yapmaktadır. Kenarlarına kırmızı şerit yapıştırmak istiyor. Kaç santimetre şeride ihtiyacı olacaktır?



çiz. 13

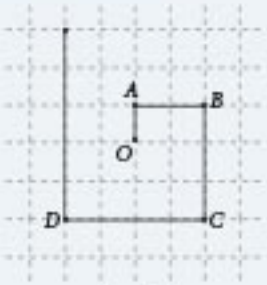
Araştırma

Uçağındaki arıza nedeniyle pilot Luka çöle inmek zorunda kalmıştır. O, yakınlarda bir köy olduğunu biliyordu, ancak köyün hangi yönde olduğunu ve ne kadar uzakta bulunduğunu bilmiyordu. Görüş uzaklığı $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ km'ye kadar olduğu için, köyü en fazla 1,41 km uzaklıktan görebilirdi.

Luka, pusula yardımıyla köyü aramak için uçaktan O ile gösterilen noktadan şu şekilde yürümeye başladı. 1 km kuzeye (A noktasına kadar), 2 km doğuya (B noktasına kadar), 3 km güneye (C noktasına kadar), 4 km batıya (D noktasına kadar), 5 km kuzeye (F noktasına kadar), 6 km doğuya vb. yürüdü (Çizim 14).

a) Luka bu şekilde köyü neden kesin olarak bulacaktır?

b) Görüş uzaklığı 1 km'ye kadar olsaydı ve Luka aynı şemaya göre yürüseydi, köyü kesin bulacak mıydı?



çiz. 14

12. ÇİZİM PROBLEMLERİ

Etkinlik

1. Ölçüleri verilen üçgenleri çiz.
   a) $b = 5$ cm ve $c = 3$ cm kenarları ve aralarındaki $\alpha = 55°$ açısı,
   b) $a = 5$ cm kenarı ve bu kenar üzerinde bulunan $\beta = 55°$ ve $\gamma = 60°$ açıları,
   c) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm ve $c = 4$ cm kenarları.
2. a) Bir üçgenin çizimi için kaç bağımsız elemana ihtiyaç vardır? Elemanlar arasında en az bir uzunluk elemanı var mıdır? İkizkenar üçgen veya dik üçgen çizimi için, aralarında en az bir uzunluk elemanı bulunan kaç bağımsız elemana ihtiyaç vardır; eşkenar üçgen çizimi için kaç bağımsız elemana ihtiyaç vardır?

b) Paralelkenar, köşegenlerinden biri çizildiğinde iki eş üçgene ayrılır. Paralelkenarın çizimi için, aralarında en az bir uzunluk elemanı bulunan kaç bağımsız elemana ihtiyaç duyulurdu? Eşkenar dörtgen, dikdörtgen veya kare çizimi için, aralarında en az bir uzunluk elemanı bulunan kaç bağımsız elemana ihtiyaç duyulurdu?

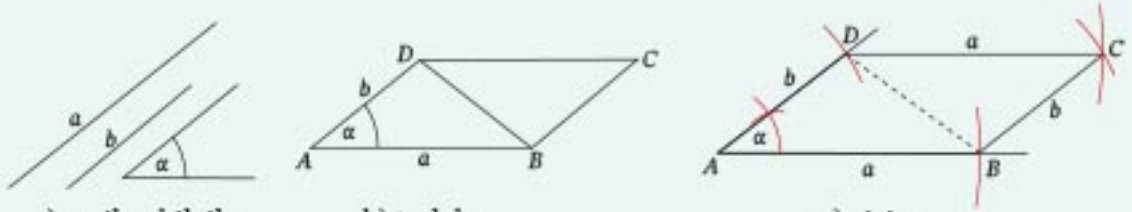
Paralelkenarların Çizimleri

Verilen sorulara doğru cevap verdiysen, **paralelkenarın çizimi** için en çok üç bağımsız elemana ihtiyaç olduğunu ve bunlardan en az birinin verilen uzunluk olduğunu kesinlikle fark etmişsindir. Üçgenin temel çizim yöntemlerini ve üçgenlerin eşlik koşulları KAK, AKA ve KKK yardımıyla elde edilen paralelkenar özelliklerini kullanarak, aşağıdaki paralelkenar çizimlerini de çok kolay ve basit bir şekilde yapacağız.

Örnek 1

İki komşu kenarı a ve b ile aralarındaki α açısı verilen $ABCD$ paralelkenarını çiz.

Çizim, önce verilen a ve b kenarları ve aralarındaki α açısı ile ABD üçgeni çizilecek şekilde yapılır. Daha sonra BD köşegeni üzerinde, üç kenarı verilen BDC üçgeni çizilir.
Böylece $ABCD$ paralelkenarını elde ederiz (Çizim 1). Bu tür yalnızca bir paralelkenar vardır.



a) verilen bilgiler b) taslak c) çizim

çiz. 1

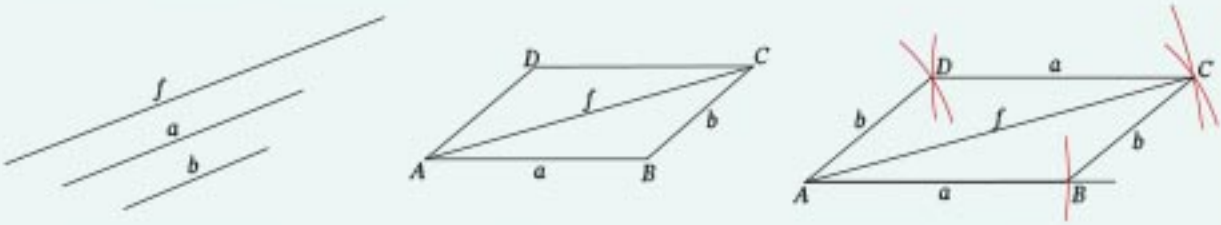
Alıştırma 1

İki komşu kenarı $a = 5$ cm ve $b = 3$ cm, aralarındaki açısı $\alpha = 60°$ olan $ABCD$ paralelkenarını çiz.

Örnek 2

İki komşu kenarı a ve b ile bir köşegeni f verilen $ABCD$ paralelkenarını çiz.

Çizim, önce ABC üçgeni çizilecek şekilde yapılır. Daha sonra AC köşegeni üzerinde, verilen üç kenarı olan ACD üçgeni çizilir. Böylece $ABCD$ paralelkenarını elde ederiz (Çizim 2). Bu tür yalnızca bir paralelkenar vardır.



a) verilen bilgiler b) taslak c) çizim

çiz. 2

Alıştırma 2

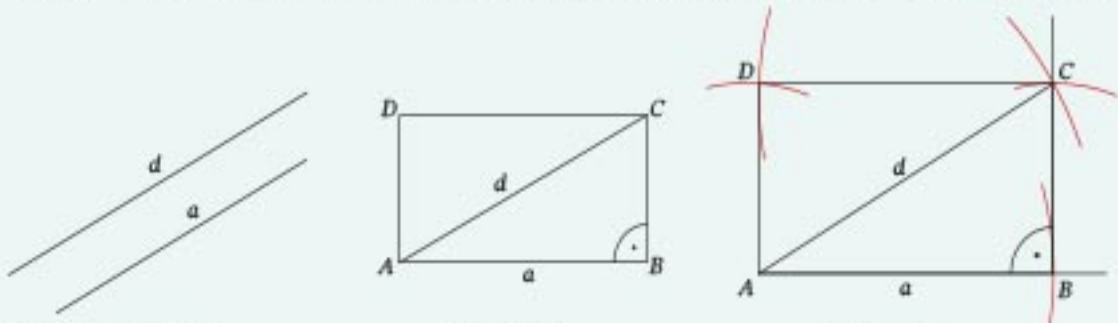
Kenarları $a = 4$ cm ve $b = 3$ cm, köşegeni $f = 6$ cm olan paralelkenarı çiz.

Dikdörtgen veya eşkenar dörtgen çizimi için, aralarında en az bir uzunluğu verilen iki eleman gerekli ve yeterlidir; kare çizimi için ise yalnızca bir verilen uzunluk gereklidir.

Örnek 3

Bir kenarı a ve köşegeni d verilen $ABCD$ dikdörtgenini çiz.

Çizim, önce dik kenar uzunluğu a ve hipotenüs uzunluğu d olan ABC dik üçgenini çizecek şekilde yapılır. Daha sonra AC köşegeni üzerinde, üç kenarının uzunluğu verilen ACD üçgeni çizilir. Böylece $ABCD$ dikdörtgenini elde edilir (Çizim 3). Bu tür yalnızca bir dikdörtgen vardır.



a) verilen bilgiler b) taslak c) çizim

çiz. 3

Alıştırma 3

Verilen ölçülere göre $ABCD$ dikdörtgenlerini çiz:

a) $b = 3$ cm kenarı ve $d = 5$ cm köşegeni,

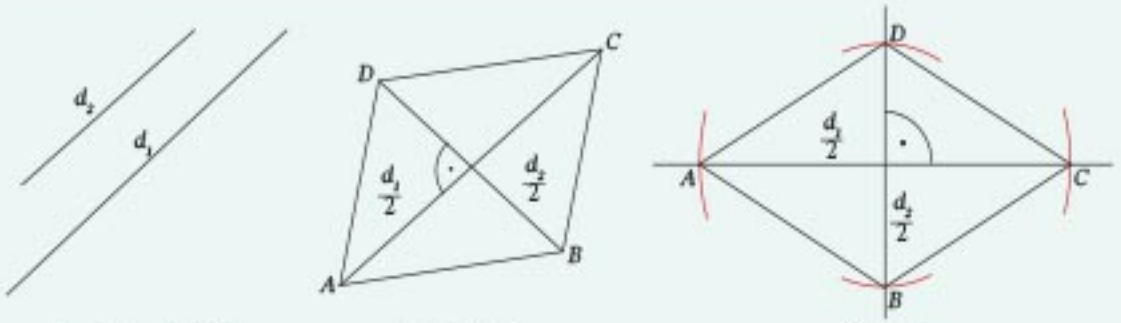
b) $d = 5$ cm köşegeni ve köşegenler arasındaki $\alpha = 40°$ açısı.

Yönerge: İstenen dikdörtgenin taslağını yap. Sonra α açısını çiz ve kenarlarını doğrulara kadar uzat. Dikdörtgenin köşegen uzunluklarının birbirine eşit olduğu ve birbirlerini ortaladıkları özelliğini kullan.

Örnek 4

Köşegen uzunlukları d_1 ve d_2 verilen *ABCD* eşkenar dörtgenini çiziniz.

Önce birbirine dik iki doğru çizeriz. Kesişim noktasından, bir doğru üzerinde bir köşegenin uzunluğunun yarısını, diğer doğru üzerinde ise diğer köşegenin uzunluğunun yarısını taşırız. Böylece Çizim 4'teki *A*, *B*, *C* ve *D* noktaları elde edilir. Bunların birleştirilmesiyle *ABCD* eşkenar dörtgeni elde edilir. Bu tür yalnızca bir eşkenar dörtgen vardır.



a) verilen bilgiler b) taslak c) çizim

çiz. 4

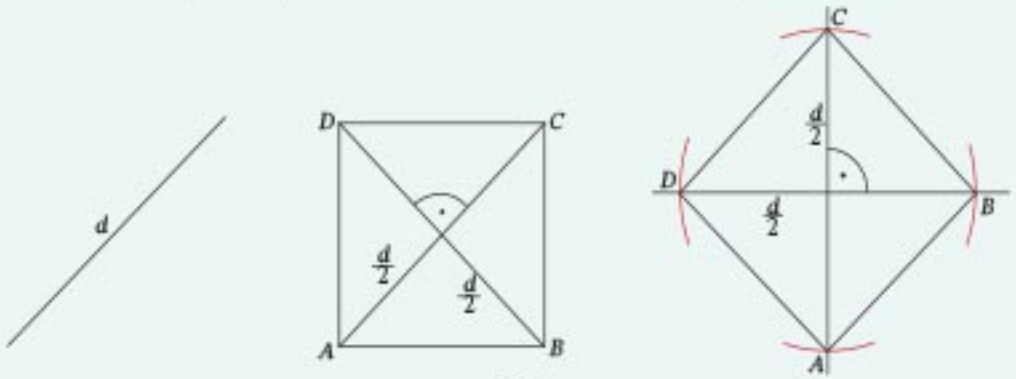
Alıştırma 4

Ölçüleri verilen *ABCD* eşkenar dörtgenini çiz.
a) $a = 3$ cm kenarı ve bir köşegeni $d_2 = 5$ cm,
b) iki köşegeni $d_1 = 10$ cm ve $d_2 = 64$ mm.

Örnek 5

Köşegen uzunluğu *d* verilen *ABCD* karesini çiz.

Önce birbirine dik iki doğru çizeriz. Kesişim noktasından, iki doğru üzerinde köşegen uzunluğunun yarısı kadar parçalar taşırız. Böylece Çizim 5'teki *A*, *B*, *C* ve *D* noktaları elde edilir. Bunların birleştirilmesiyle *ABCD* karesi elde edilir. Bu tür yalnızca bir kare vardır.



çiz. 5

Alıştırma 5

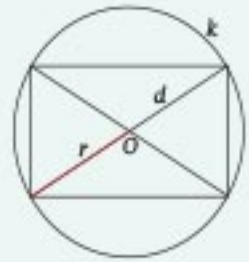
Kenarı $a = 3{,}5$ cm olan bir kare çiz.

Çevrel Çember ve İç Teğet Çember Çizimleri

Örnek 6

Köşegen uzunluğu d verilen dikdörtgenin çevrel çemberini çiziniz.

a) Çizim 6'da köşegeni d olan bir dikdörtgen verilmiştir.
Dikdörtgenin özelliklerine göre, köşegenlerinin kesişim noktası O, bütün köşelerinden eşit uzaklıktadır.
Bu nedenle merkezi O olan ve yarıçapı r, köşegenin yarısına eşit olan, yani $r = \frac{d}{2}$ olan k çemberini çizeriz. K (O, r) çemberi dikdörtgenin her köşesinden geçer; yani dikdörtgenin çevrel çemberidir. Bu tür bir çember yalnızca bir tanedir.



çiz. 6

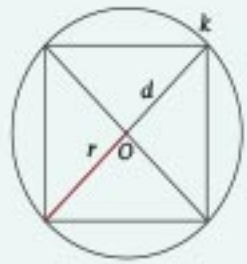
Alıştırma 6

Kenarları $a = 5$ cm ve $b = 3$ cm olan verilen dikdörtgenin çevresine k çemberini çiz.
Yönerge: Dikdörtgeni çiz ve köşegenlerini çiz.

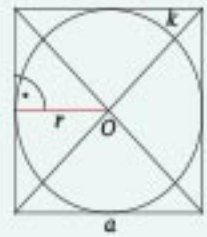
Örnek 7

a) Köşegen uzunluğu d olan karenin çevrel çemberini çiz.
b) Kenar uzunluğu a olan karenin iç teğet çemberini çiz.

a) Çizim 7a'da köşegen uzunluğu d olan bir kare verilmiştir.
Karenin özelliklerine göre, köşegenlerinin kesişim noktası O, bütün köşelerinden eşit uzaklıktadır.
Bu nedenle merkezi O olan ve yarıçapı r, köşegen uzunluğunun yarısına eşit olan, yani
$r = \frac{d}{2}$ olan k çemberini çizeriz.



çiz. 7a



çiz. 7b

K (O, r) çemberi karenin her köşesinden geçer; yani karenin çevrel çemberidir. Bu tür bir çember yalnızca bir tanedir.
b) Çizim 7b'de kenar uzunluğu a olan bir kare verilmiştir. Köşegenlerinin kesişim noktası O, kenarlarına da eşit uzaklıktadır. Bu nedenle iç teğet çemberin yarıçap uzunluğu r, karenin kenar uzunluğunun yarısına eşittir; yani $r = \frac{a}{2}$
k (O, r) çemberi karenin bütün kenarlarına teğettir; yani karenin iç teğet çemberidir. Bu tür bir çember yalnızca bir tanedir.

Alıştırma 7

a) Kenar uzunluğu $a = 4$ cm olan karenin çevrel çemberini çiz.
b) Kenar uzunluğu $a = 5$ cm olan karenin iç teğet çemberini çiz.

Alıştırma 8

Mimarlar şehir parkında yeni bir bölüm tasarlamaktadır. Bu bölüm, yalnızca sözlerle tanımladıkları iki kısımdan oluşur. Birinci kısım, dikdörtgen biçiminde bir çiçekliktir ve dikdörtgenin her köşesinden geçen ışıklı bir çember vardır. İkinci kısım kare biçimindedir ve içinde karenin her kenarına dokunan bir çeşme ile karenin her köşesinden geçen ışıklı bir çember vardır. Mimarların tanımladığı kısımları çiz.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Ölçüleri verilen $ABCD$ paralelkenarını çiz:
   a) Kenar uzunluğu $a = 3$ cm, $b = 6$ cm ve köşegen uzunluğu $f = 4$ cm,
   b) Köşegen uzunlukları $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$ cm ve aralarındaki açının $\alpha = 75°$ olan.

2. Ölçüleri verilen $ABCD$ eşkenar dörtgenini çiz:
   a) köşegenleri $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$ cm,
   b) Kenarı $a = 5$ cm ve dar açısı $45°$,
   c) Kenarı $a = 4$ cm ve yüksekliği $h = 3$ cm,
   d) Köşegeni $d_1 = 7$ cm ve yüksekliği $h = 4$ cm.

3. Ölçüleri verilen $ABCD$ dikdörtgenini çiz:
   a) Kenarları $a = 4{,}5$ cm ve $b = 3$ cm,
   b) Kenarı $b = 3{,}5$ cm ve köşegeni $d = 5{,}5$ cm.

4. Belediye, farklı biçimlerdeki dört komşu parselden oluşan küçük bir botanik park yapmaya karar vermiştir: paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kare.
   Mimar yalnızca şu açıklayıcı notları bırakmıştır:
   - A parselinin uzunlukları 8 m ve 6 m olan iki çift paralel kenarı vardır. Komşu kenarları eşit değildir. Bu bölümde aromatik bitkilerin dikilmesi planlanmaktadır.
   - B parselinin 7 m'lik dört eşit kenarı vardır ve köşegenlerinden biri diğerinden daha uzundur.
     Bu bölümde güllerin dairesel düzende dikilmesi planlanmaktadır.
   - C parselinin açıları 90°'dir ve komşu kenarları 5 m ve 9 m uzunluğundadır. Bu bölüm bankların yerleştirilmesi için kullanılacaktır.
   - Ç parselinin dört kenarı 6 m'dir ve bütün açıları diktir. Burası kumlu bir çocuk köşesi olacaktır.
   Mimarın tanımladığı şekilleri tanı, sonra ölçek kullanarak çiz.

5. Kenarı $a = 3$ cm ve köşegeni $d = 5$ cm olan dikdörtgenin çevresel çemberini çiz.

6. Kenarı $a = 4$ cm olan karenin iç teğet çemberini çiz.

7. Köşegeni $d = 6$ cm olan karenin çevresel çemberini çiz.

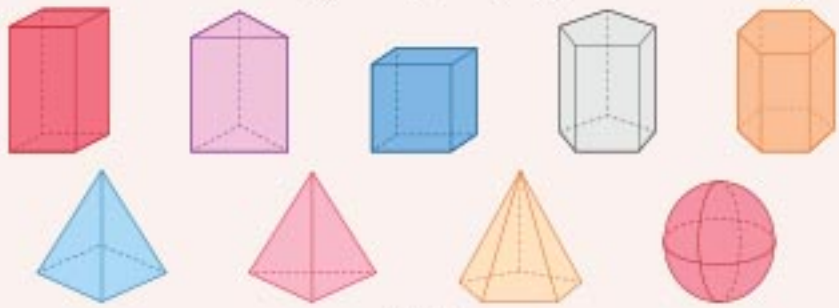
Araştırma

1. Andrey bir çember çizmiş, ancak çemberin merkezini işaretlememiştir ve çemberin yarıçapını da bilmiyordur. Andrey'e çemberin merkezini ve yarıçapını bulmasında yardım et. Eğer imkânın varsa, Andrey'e yardım etmek için eğitim amaçlı bir yazılım kullan.
2. Arif, kare olmayan bir dikdörtgenin içine bir çember çizmeye çalışmaktadır. Arif'in neden yanıldığını açıkla.

13. ÇOKYÜZLÜLER, KÜRE VE KÜRESEL YÜZEY

Etkinlik

Çizim 1'deki üç boyutlu (3B) şekilleri adlandır. Bunlardan hangileri köşeli, hangileri eğri yüzeyli 3B şekillerdir? Her birinin hangi iki boyutlu (2B) şekillerle sınırlandığını açıkla.



çiz. 1

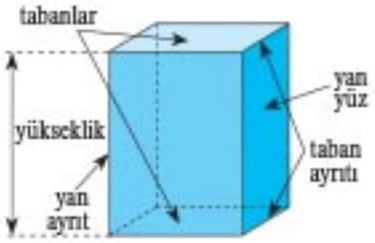
Üç boyutlu şekiller (3B), uzayın bir parçasıdır ve bunları **stereometri** (uzay geometrisi) adı verilen geometri dalı inceler. Buna karşılık düzlemsel 2B şekilleri **planimetri (düzlem geometrisi)** inceler. En sık kullanılan 3B şekillerden biri çokyüzlerdir.

Uzayın çokgenlerle (üçgenler, dörtgenler, beşgenler vb.) sınırlandırılmış parçasına **çokyüzlü** (polihedron) denir.

Çokyüzlülerin çiziminde görünen ayrıtlar sürekli çizgi ile, görünmeyen ayrıtlar ise kesik çizgi ile çizilir.
Şimdiye kadar iki gurup çokyüzlüyle tanıştık: **prizmalar** ve **piramitler**.

Prizmaların çokgen biçiminde, birbirine eş ve paralel iki tabanı vardır (Çizim 2).
Tabanların karşılık gelen köşelerini birleştiren doğru parçaları birbirine paraleldir ve **yan ayrıtlar** olarak adlandırılır.
Tabanların bir parçası olan, yani tabanların kenarları olan ayrıtlar **taban ayrıtları** olarak adlandırılır.

Taban ayrıtlarının çiftleri, karşılık gelen yan ayrıtlarla birlikte prizmanın **yan yüzleri** olarak adlandırılan paralelkenarları oluşturur.
Bir prizmaya, paralel ayrıtları iki tabana da dik ise **dik prizma** diyeceğiz.
Biz yalnızca dik prizmaları inceleyeceğiz. Tabanlarının hangi çokgen olduğuna bağlı olarak prizma; üçgen prizma, dörtgen prizma vb. olabilir.

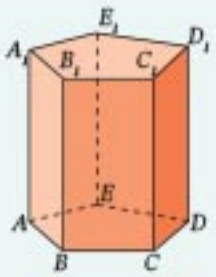


çiz. 2

Örnek 1

Çizim 3'teki beşgen prizma için aşağıdakilerin tümünü yaz:
a) köşeleri, b) yan ayrıtları, c) taban ayrıtları, d) yan yüzleri, e) tabanları.

a) Köşeler şu noktalardır: $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1$ ve E_1,
b) Yan ayrıtlar şu doğru parçalarıdır: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ve EE_1,
c) Taban ayrıtları şu doğru parçalarıdır:
$AB, BC, CD, DE, EA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$ ve E_1A_1,
d) Yan yüzler şu dikdörtgenlerdir:
$ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1$ ve EAA_1E_1,
e) Tabanlar şu beşgenlerdir: $ABCDE$ ve $A_1B_1C_1D_1E_1$.



çiz. 3

Bir dik prizmanın tabanları düzgün çokgenler ise, o prizmaya **düzgün prizma** denir.
Prizmanın tabanları arasındaki uzaklığa prizmanın **yüksekliği** denir ve genellikle H ile gösterilir.

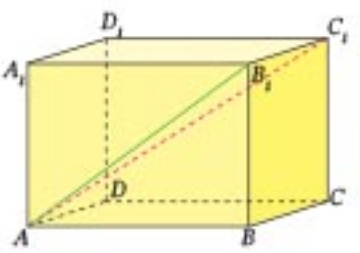
Alıştırma 1

Aşağıda verilen prizmaların yan ayrıtı sayılarını bulunuz:
a) Sekizgen prizmada, b) Onikigen prizmada?

Bir çokyüzlünün aynı yüzünde bulunmayan iki köşesini birleştiren doğru parçasına **cisim köşegeni** denir.

Örnek 1

Dikdörtgenler prizması, üç çift paralel dikdörtgenle sınırlandırılmış prizmadır. Çizim 4'te ayrıt uzunlukları a, b ve c olan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dikdörtgenler prizması verilmiştir.
AC_1 doğru parçası, prizmanın bir cisim köşegenidir.
AB_1 doğru parçası bir cisim köşegeni değildir; çünkü ABB_1A_1 yüzünün bir elemanıdır (yüz köşegenidir).



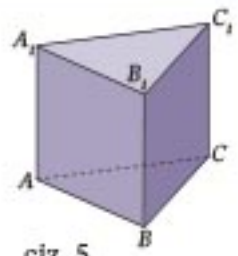
çiz. 4

Alıştırma 2

Çizim 4'teki dikdörtgenler prizmasının bütün köşegenlerini adlandır. Bunlardan hangileri cisim (uzay) köşegenidir, hangileri cisim köşegeni değildir?

Örnek 3

Çizim 5'te $ABCA_1B_1C_1$ üçgen prizması verilmiştir. Bu prizmanın neden cisim köşegeni olmadığını açıkla.

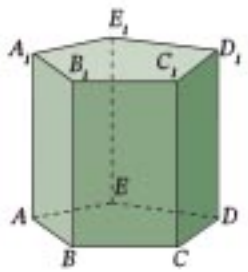


çiz. 5

Bir prizmada, prizmanın iki köşesini birleştiren her doğru parçası; ya prizmanın bir yüzünde yer alır ya da prizmanın bir ayrıtıdır.

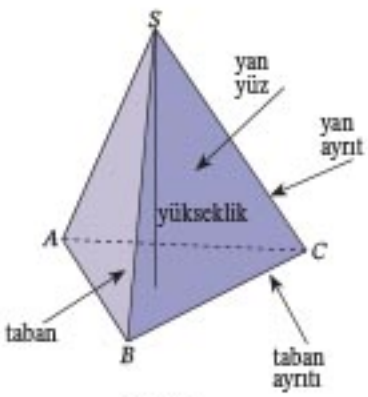
Alıştırma 3

Çizim 6'daki prizmanın bütün cisim köşegenlerini yaz.



çiz. 6

Piramidin tabanı bir çokgendir ve taban düzleminde bulunmayan, **tepe noktası** adı verilen bir köşesi vardır (Çizim 7).
Tepe ile tabanın köşelerini birleştiren doğru parçalarına **yan ayrıtlar** denir.
Tabanın kenarları olan ayrıtlar **taban ayrıtları** olarak adlandırılır.
Her taban ayrıtı, karşılık gelen iki yan ayrıtla birlikte piramidin yan yüzleri olarak adlandırılan üçgenleri oluşturur.
Piramitler, tabanlarının hangi çokgen olduğuna bağlı olarak üçgen, dörtgen vb. olabilir.



çiz. 7

Örnek 4

Çizim 7'deki üçgen piramit için:
a) bütün köşelerini, yan ayrıtlarını, taban ayrıtlarını, yan yüzlerini yaz,
b) tepe noktasını ve tabanını yaz.

a) Köşeler *A*, *B*, *C* ve S noktalarıdır; yan ayrıtlar *AS*, *BS* ve *CS* doğru parçalarıdır; taban ayrıtları *AB*, *BC* ve *CA* doğru parçalarıdır; yan yüzler *ABS*, *BCS* ve *CAS* üçgenleridir.
b) Tepe noktası S köşesidir, taban ise *ABC* üçgenidir.

Eğer piramidin tabanı düzgün bir çokgen ise ve bütün yan ayrıtları aynı uzunlukta ise, bu piramide **düzgün piramit** denir.
Piramidin tepe noktasından tabanına olan uzaklığa piramidin yüksekliği denir ve genellikle H ile gösterilir.
Üçgen piramide, 4 köşesi olduğu için tetrahedron denir. Ancak çoğu zaman tetrahedron denildiğinde, yüzleri eşkenar üçgenlerden oluşan düzgün üçgen piramit anlaşılır.

Alıştırma 4

Aşağıda verilen piramitlerin taban ayrıtı sayılarını bulunuz:
a) Onbeşgen piramitte, b) Yirmigen piramitte?

Örnek 5

Piramitte cisim köşegeni var mıdır?

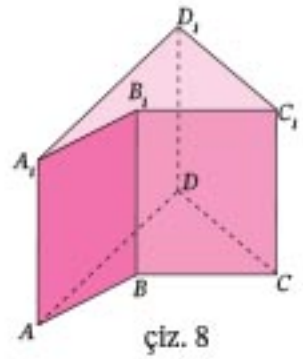
Bir piramidin tepe noktasını tabanın herhangi bir köşesine birleştiren doğru parçası, piramidin bir yan ayrıtıdır ve köşegen olamaz. Tabanın iki köşesini birleştiren doğru parçası ise bir cisim köşegeni değildir. Bu nedenle piramitlerde cisim köşegeni yoktur.

Örnek 6

Üçgen prizmanın cisim köşegeni olmadığını biliyoruz. Aynı şekilde, piramitlerin de cisim köşegeni olmadığını biliyoruz. Ancak düzgün üçgen prizma $ABCA_1B_1C_1$ üzerine düzgün piramit $A_1B_1C_1S$ yerleştirirsek ne prizma ne de piramit olan bir çokyüz elde ederiz. Bu çokyüzün AS, BS ve CS olmak üzere üç cisim köşegeni vardır.

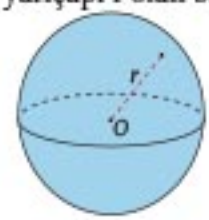
Bir çokyüzlünün, herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası çokyüze ait oluyorsa **dışbükey (konveks)** çokyüzlü denir.

Üçgen prizmalar ve üçgen piramitler dışbükey çokyüzlere örnektir.
Çizim 8'de dışbükey olmayan bir çokyüz verilmiştir.
Örneğin, AC doğru parçası çokyüzün bir parçası değildir.

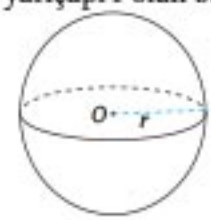


çiz. 8

Küre, uzayda verilen O noktasından uzaklığı yarıçap uzunluğu r'ye eşit veya r'den küçük olan bütün noktaların kümesidir.
Kürenin yüzeyi ise uzayda verilen O noktasından uzaklığı r olan noktaların kümesidir.
Çizim 9'da yarıçapı r olan bir küre, Çizim 10'da ise yarıçapı r olan bir küresel yüzey verilmiştir.



çiz. 9



çiz. 10

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çokyüzlü nedir, dışbükey çokyüzlü nedir? Bir dışbükey çokyüzlü çiz.
2. Ne prizma ne de piramit olan bir çokyüzlü çiz.
3. Bir altıgen prizma çiz ve adlandır. Aşağıdakilerin tümünü yaz:
   a) köşeleri, b) yan ayrıtları, c) taban ayrıtları, d) yan yüzleri, e) tabanları.
4. Bir üçgen prizma çiz ve her iki tabanı üzerine iki düzgün üçgen piramit çiz. Daha sonra elde edilen çokyüzün bütün cisim köşegenlerini renkli olarak çiz.
5. Bir yedigen piramit çiz ve adlandır.
   a) bütün köşelerini, yan ayrıtlarını, taban ayrıtlarını ve yan yüzlerini yaz,
   b) tepesini ve tabanını yaz.
6. Aşağıda verilen geometrik cisimlerin taban ayrıtı sayılarını bul:
   a) ongen prizmada,
   b) yirmigen piramitte
7. Aşağıda verilen geometrik cisimlerin köşe sayılarını bul:
   a) yüzgen piramitte,
   b) yüzgen prizmada?
8. Aşağıda verilen geometrik cisimlerin yan ayrıtı sayılarını bulunuz:
   a) Dokuzgen prizmada,
   b) Ongen piramitte.
9. Çizim 11'deki ev hangi 3B şekillerden oluşmaktadır?



çiz. 11

10. Küre nedir, küresel yüzey nedir? Çevrenden küre ve küresel yüzeye örnekler ver.

Araştırma

Mısır'daki Keops Piramidi nasıl bir piramittir? Üçgen piramit, dörtgen piramit vb. midir? Düzgün piramit midir?
Keops Piramidi'nin boyutları (ayrıtları) hakkında internette arama yap.
Keops Piramidi'nin 1: 1000 ölçekli kartondan bir modelini yap.

14. DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLER

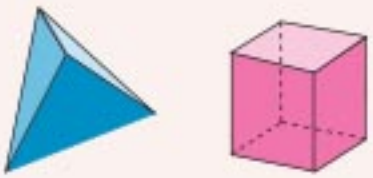
Etkinlik

1. Kenarları eşit ve açıları eşit olan çokgene ne ad verilir?
2. Çizim 1'deki çokgenlerden hangileri düzgündür, hangileri düzgün değildir?



çiz. 1

3. Çizim 2'deki küpün yüzleri nasıl çokgenlerdir, tetrahedronun yüzleri nasıl çokgenlerdir?



çiz. 2

Fark ettiysen düzgün dörtyüzlünün (tetrahedronun) ve küpün yüzleri düzgün çokgenlerdir. Daha kesin bir ifadeyle düzgün dörtyüzlünün yüzleri eşkenar üçgen, küpün yüzleri ise karedir.

Bütün yüzleri eş ve düzgün çokgenlerden oluşan konveks çokyüzlülere **düzgün çokyüzlü** denir.

Yalnızca beş çeşit düzgün çokyüzlü vardır ve bunlar antik çağ matematikçileri tarafından da bilinmekteydi. Düzgün çokyüzlülere, Antik Yunan filozof Platon'un adına atfen Platon cisimleri de denir. Aşağıdaki tabloda bütün düzgün çokyüzlü çeşitleri verilmiştir. Bu cisimlerin köşe, ayrıt ve yüz sayıları ile yüzlerini oluşturan düzgün çokgenlerin türleri belirtilmiştir.

	İsim	Köşeler	Ayrıtlar	Yüzler	Düzgün çokgen türü	Bir köşedeki ayrıt sayısı
	Dörtyüzlü	4	6	4	Eşkenar üçgen	3
	Küp	8	12	6	Kare	3
	Oktahedron	6	12	8	Eşkenar üçgen	4
	Dodekahedron	20	30	12	Düzgün beşgen	3
	İkosahedron	12	30	20	Eşkenar üçgen	5

Düzgün çokyüzlülerin doğada görülmesi ilgi çekicidir. Örneğin, adenovirüsün dış kabuğu yirmiyüzlü biçimindedir; bor izomerleri düzgün dörtyüzlü, düzgün sekizyüzlü veya yirmiyüzlü biçimleri oluşturur; moleküller ise çoğunlukla düzgün dörtyüzlü ya da düzgün sekizyüzlü geometrisine sahiptir. Elmaslar çoğu zaman düzgün sekizyüzlü biçiminde kristalleşirken, pirit minerali küp, düzgün sekizyüzlü veya onyikiyüzlü biçiminde kristalleşir (Resim 1).



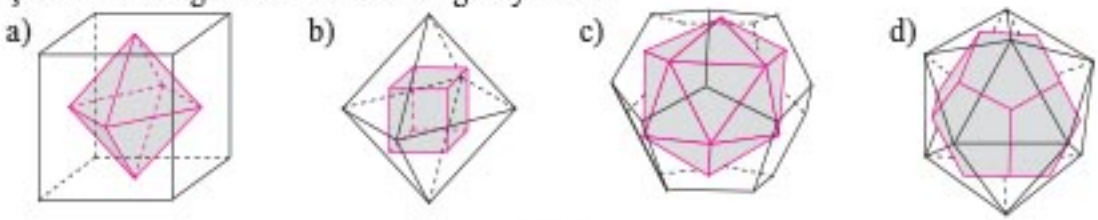
Adenovirüs Elmas Bor izomeri Molekül Pirit

Resim 1

ALIŞTIRMA SORULARI

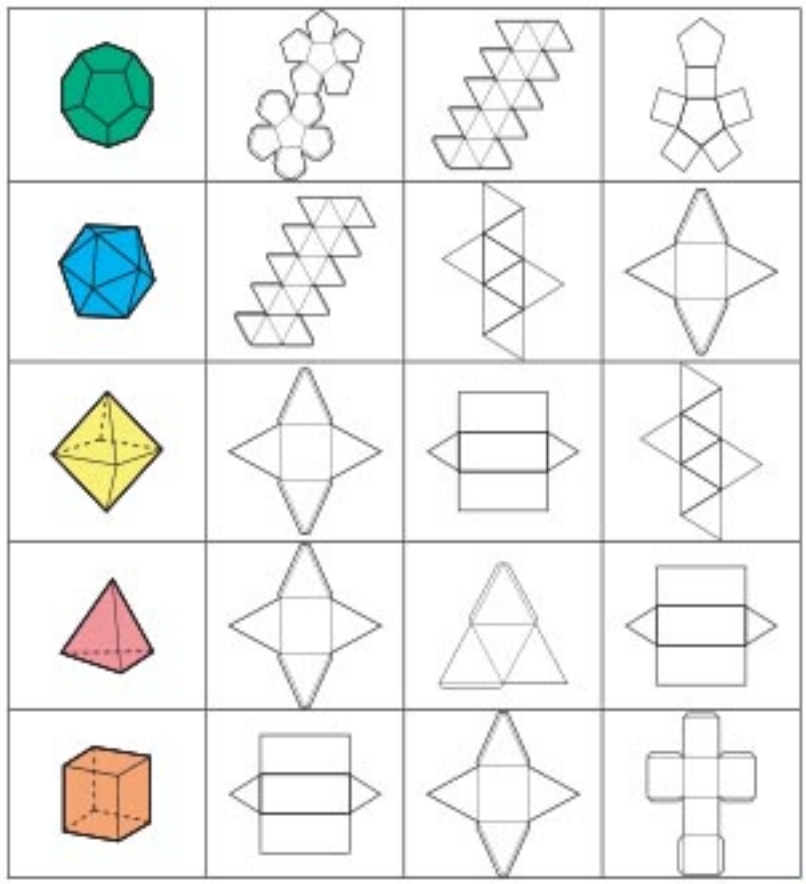
1. a) Düzgün çokyüzlülerin beş türünü yaz.
   b) Bunların her biri hangi düzgün çokgenlerle kaplıdır?
   c) Her birinin her köşesinden kaç ayrıt çıkar?

2. Çizim 3'te hangi Platon cisimlerini görüyorsun?



çiz. 3

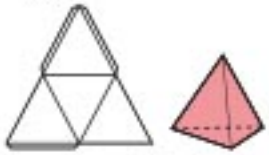
3. Verilen cisimlerden her birine hangi üç ağ karşılık gelir?

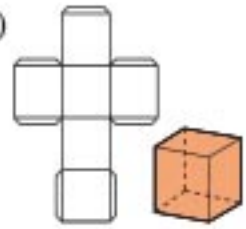


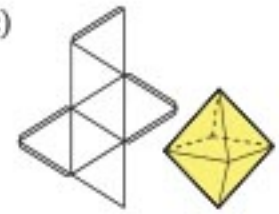
4. Proje Etkinliği

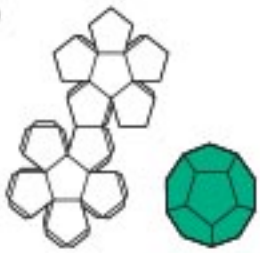
1) Açınımı (ağı) ve ölçüleri verilen cisimlerin modelini yap.

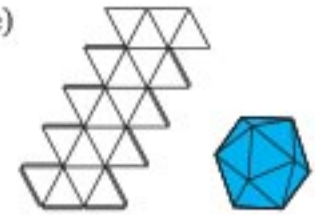
a) Üçgenin kenar uzunluğu 7 cm,
b) Karenin kenar uzunluğu 5 cm,
c) Üçgenin kenar uzunluğu 4 cm,
d) Beşgenin kenar uzunluğu 3 cm,
e) Üçgenin kenar uzunluğu 2 cm.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

2) Fon kartonu üzerine tabloyu çiz, her şekle ait bilgileri yaz ve modeli son satıra yapıştır.

					
Adı					
Yüz sayısı					
Ayrıt sayısı					
Köşe sayısı					
Model					

Araştırma

Platon cisimlerinin keşfi, Pisagorcular olarak adlandırılan Antik Yunan matematikçi topluluğunun bu cisimlerden üçünü tanımlamasıyla başlamış; Antik Yunan filozofu Platon ise kalan son iki cismi tanımlamıştır. Platon, bu beş cismi doğanın beş temel unsurunun simgesi olarak açıklamıştır: ateş, hava, su, toprak ve esir (evren).

İnternetten araştır:

a) Platon hangi elementi hangi cisimle eşleştirmiştir?
b) Bu eşleştirmedeki simgeselliği nasıl açıklamıştır?

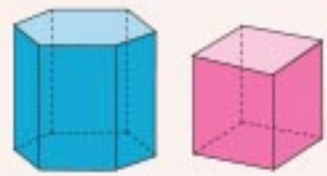
c) Johannes Kepler, araştırmalarında Platon cisimlerini nasıl kullanmıştır?



15. ÇOKYÜZLÜLERDE KÖŞE, AYRIT VE YÜZ SAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Etkinlik

Çizim 1'de iki dışbükey çokyüzlü verilmiştir.
Her biri için köşe sayısını say, ayrıt sayısını çıkar ve yüz sayısını ekle.
Ne fark ediyorsun? Verilen çokyüzlerin köşe, ayrıt ve yüz sayıları arasında bir ilişki var mıdır?



çiz. 1

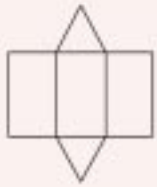
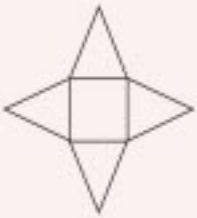
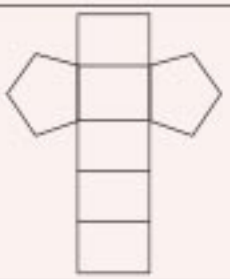
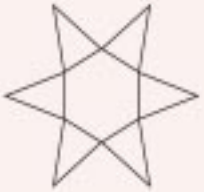
Her dışbükey çokyüzlü için **Euler bağıntısı** geçerlidir.

$$V - E + F = 2$$

Burada V köşe sayısını, E ayrıt sayısını ve F çokyüzün yüz sayısını gösterir.

Etkinlik

Tabloda verilen çokyüzlülerin ağlarını kartona çiz, kes ve çokyüzlüleri oluştur.
a) Her çokyüzlünün köşe, ayrıt ve yüz sayılarını belirle.
b) Her çokyüzlü için Euler bağıntısını doğrula.

Üçgen prizma	Dörtgen piramit	Beşgen prizma	Altıgen piramit
			

Örnek 1

Verilen şekller için Euler bağıntısını kontrol et:
a) üçgen piramit, b) dörtgen prizma, c) beşgen piramit.

a) üçgen piramit
$V = 4, E = 6$ ve $F = 4$
$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$

b) dörtgen prizma
$V = 8, E = 12$ ve $F = 6$
$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$

c) beşgen piramit
$V = 6, E = 10$ ve $F = 6$
$V - E + F = 6 - 10 + 6 = 2$

Alıştırma 1

Her Platon cismi için Euler bağıntısının doğruluğunu kontrol et:
a) düzgün dörtyüzlü, b) küp, c) Düzgün sekizyüzlü
d)Düzgün onyikiyüzlü e) Düzgün yirmiyüzlü

Örnek 2

Euler bağıntısı yardımıyla 6 köşesi, 12 ayrıtı ve 5 yüzü olan dışbükey bir çokyüzlünün var olup olmadığını kontrol et.

$V = 6, E = 12,$ ve $F = 5$
$V - E + F = 6 - 12 + 5 \neq 2$ Verilen koşullara sahip dışbükey bir çokyüzlü yoktur.

Alıştırma 2

20 köşesi, 40 ayrıtı ve 20 yüzü olan dışbükey bir çokyüzlü var mıdır?

Euler bağıntısı, bilinmeyen köşe, ayrıt veya yüz sayısının hesaplanmasında uygulanır.

Örnek 3

15 köşesi ve 28 ayrıtı olan dışbükey bir çokyüzlünün kaç yüzü vardır?

Sorudaki koşula göre V = 15 ve E = 28'dir. Bilinen değerleri Euler bağıntısında yerine koyarak şunu elde ederiz:
$V - E + F = 2, 15 - 28 + F = 2, F = 15.$
Verilen dışbükey çokyüzlünün 15 yüzü vardır.

Alıştırma 3

40 ayrıtı ve 21 yüzü olan dışbükey bir çokyüzlünün kaç köşesi vardır?

Alıştırma 4

Öğrenciler, gövdesi 22 yüzü ve 36 ayrıtı olan çokyüzlü biçiminde bir drone tasarlıyorlar. Drone gövdesinin kaç köşesi vardır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Euler bağıntısı yardımıyla 7 köşesi, 18 ayrıtı ve 12 yüzü olan dışbükey bir çokyüzlünün var olup olmadığını kontrol et.
2. Bir dışbükey çokyüzlünün 16 köşesi ve 10 yüzü vardır. Bu çokyüzlünün kaç ayrıtı vardır?
3. 36 ayrıtı ve 14 yüzü olan bir çokyüzlünün kaç köşesi vardır?
4. Ortak bir yüzü olan bir küp ve düzgün dörtgen piramitten oluşan bir çokyüzlü çiz. Sonra çokyüzlü için $V - E + F = 2$ eşitliğini kontrol et.
5. Ortak bir tabanı olan iki dörtgen piramitten oluşan bir çokyüzlü çiz. Sonra çokyüzlü için $V - E + F = 2$ eşitliğini kontrol et.

Araştırma

1. Çizim 2'de verilen çokyüzlüler dışbükey değil midir? Her birinin kaç "deliği" vardır?
   a) Her çokyüzlü için köşelerini, ayrıtlarını ve yüzlerini say.
   b) Her çokyüzlü için V − E + F ifadesinin değerini hesapla.
   c) Çokyüzlüdeki "delik" sayısı d olmak üzere, $V - E + F = 2 - 2 \cdot d$ formülü geçerli midir?
   d) Her yeni delikle birlikte V − E + F ifadesinin değeri 2 azalır mı?



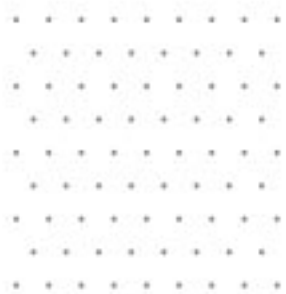
çiz. 2

16. KARMAŞIK ÜÇ BOYUTLU (3B) GEOMETRİK CİSİMLERİN ÇİZİMİ

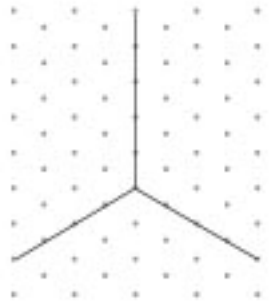
Karmaşık üç boyutlu (3B) şekilleri düzlem üzerinde çizmek için **izometrik kâğıt** kullanabiliriz. Bu kâğıtta, birbirine paralel nokta dizilerinden oluşan bir ağ bulunur. Her dizide yan yana bulunan iki nokta arasındaki uzaklık eşittir ve komşu dizideki en yakın noktayla birlikte bir eşkenar üçgen oluşturur. Kâğıdı doğru yerleştirmek önemlidir. Bunun için söz konusu nokta dizileri dikey olarak yerleştirilmelidir (Çizim 1a), yatay olarak değil (Çizim 1b). Bu sayede, Çizim 1c'de gösterildiği gibi, eksenleri arasında 120° açı bulunan üç eksenli bir koordinat sistemi oluşturabiliriz.
İzometrik kâğıtta çizim yaparken, çizilen 3B şeklin boyutları arasındaki oranlar, verilen 3B şeklin boyutları arasındaki oranlarla aynıdır.



çiz. 1a



çiz. 1b

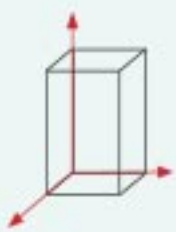


çiz. 1c

Örnek 1

Boyutları 3, 4 ve 5 birim olan bir dikdörtgenler prizmasını izometrik kâğıda çiz.

Çizim 2a'da dikdörtgenler prizmasının taslağı verilmiştir. İzometrik kâğıtta eksenleri arasında 120° açı bulunan bir koordinat sistemi çizeriz. Koordinat eksenleri üzerine sırasıyla 3, 4 ve 5 birimlik ayrıt uzunluklarını işaretleriz (Çizim 2b).



çiz. 2a



çiz. 2b

Taslağa göre görünen üç dikey ayrıtı çizeriz (Çizim 2c). Daha sonra diğer iki eksene paralel olan bütün görünen ayrıtları çizeriz (Çizim 2d). Son olarak görünmeyen ayrıtları kesik veya daha ince çizgilerle çizeriz (Çizim 2e).



çiz. 2c



çiz. 2d



çiz. 2e

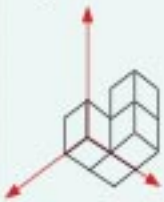
Örnek 2

Çizim 3'teki üç boyutlu şekil kaç küpten oluşmaktadır?
3B şekli izometrik kâğıda çiz.



çiz. 3

Çizim 3'teki 3B şekil 4 küpten oluşmaktadır.
Çizim 4a'da 3B şeklin taslağı verilmiştir.
İzometrik kâğıtta eksenleri arasında 120° açı bulunan bir koordinat sistemi çizeriz.
Daha sonra taslağa göre eksenler boyunca ilk üç ayrıtı çizeriz (Çizim 4b).
Taslağa göre dikey ayrıtları çizmeye devam ederiz (Çizim 4c).
Ardından diğer iki eksene paralel olan bütün ayrıtları çizeriz (Çizim 4d).
Çizim 4e'de verilen 3B şeklin izometrik çizimi gösterilmiştir.



çiz. 4a



çiz. 4b



çiz. 4c



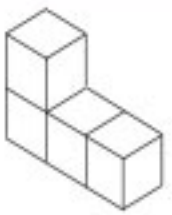
çiz. 4d



çiz. 4e

Alıştırma 1

Çizim 5'teki 3B şekil kaç küpten oluşmaktadır?
3B şekli izometrik kâğıda çiz.



çiz. 5

Alıştırma 2

Çizim 6'da gösterilen saksıları izometrik kâğıda çiz:

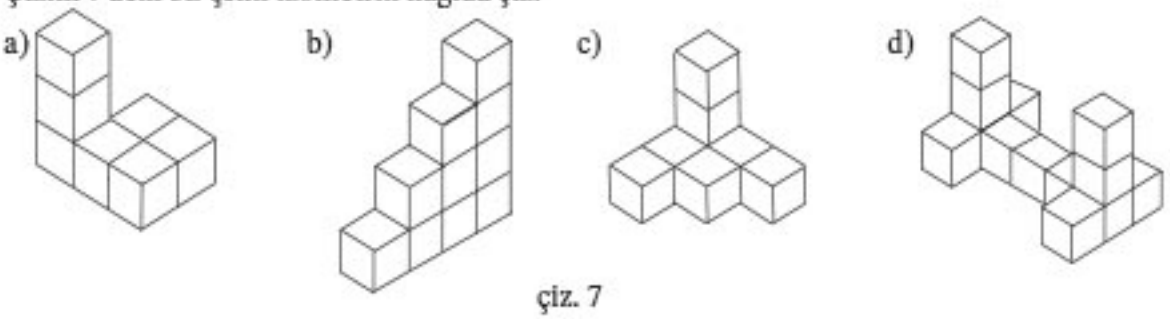


çiz. 6

ALIŞTIRMA SORULARI

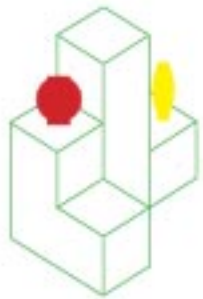
1. Çizim 7'deki 3B şekli izometrik kâğıda çiz:

a) b) c) d)



çiz. 7

2. Çizim 8'deki 3B şekli (vitrini) izometrik kâğıda çiz:



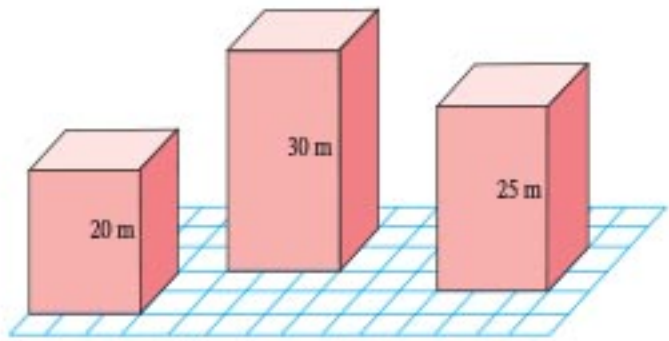
çiz. 8

3. Proje görevi

Zemin katta bulunan bir alışveriş merkezinin üzerinde yer alan üç binadan oluşan bir konut-iş yeri kompleksinin taslak çizimi verilmiştir. Binaların çevresindeki alanda peyzaj düzenlemesi ve çocuk oyun alanı planlanmıştır.

Arazi taslağındaki her kare, kenar uzunluğu 5 m olan bir karedir.

1) Çizim 9'daki taslak çizime göre, arazideki 5 m'nin izometrik kâğıtta birim doğru parçası ile gösterildiğini kabul ederek kompleksin çizimini izometrik kâğıda yap.
2) Kompleksin maketini aşağıdaki yönergelere göre yap:
   - Arazide 5 m olan birim doğru parçasının maketteki uzunluğu 5 cm olacaktır,
   - zemin katı 5 cm kalınlığında strafordan yap,
   - bina modellerini kartondan yap,
   - bina yüksekliğinin yaklaşık her 3 m'sinde bir kat olduğunu dikkate alarak kapı ve pencereleri çiz,
   - binaları plana göre straforun üzerine yapıştır,
   - binaların çevresindeki alanı kendi düşüncene göre düzenle.



çiz. 9

17. ÖTELEME, DÖNDÜRME VE EKSENEL SİMETRİ KOMBİNASYONLARI

Etkinlik

Dik koordinat sisteminde $A\,(2, 1)$ noktasını işaretle.

a) A noktasını 5 birim sola ve 3 birim aşağı ötele. Görüntüsünü A_1 ile göster.

b) A_1 noktasının, simetri ekseni $y = -2$ olan eksenel simetri (yansıma dönüşümü) altındaki görüntüsü A_2'yi bul.

c) A_2 noktasının, merkezi (0,1) ve açısı saat yönünün tersine 90° olan döndürme altındaki görüntüsünü A_3 ile göster.

Görevimiz, iki hareketin (ötelemeler, eksenel simetriler - yansıma dönüşümleri - veya döndürmeler) kombinasyonlarını yapmak ve seçilen koordinat sistemine göre verilen asıl şeklin görüntüsünü bulmak olacaktır.

Örnek 1

Köşeleri $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ ve $C(4, 3)$ noktalarında bulunan ABC üçgeni verilmiştir. Simetri ekseni $y = 0$ olan eksenel simetri ve merkezi (0, 0) noktası olan, saat yönünün tersine 90° açılı döndürme verilmiştir.

Andrey önce eksenel simetriyi, sonra döndürmeyi uygular (Çizim 1a); Admir ise önce döndürmeyi, sonra eksenel simetriyi uygular (Çizim 1b).

Onlar ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde etmişler midir?

Andrey sırasıyla şu üçgenleri elde eder:

$A(1, 1) \to D(1, -1) \to G(1, 1)$

$B(3, 1) \to E(3, -1) \to H(1, 3)$

$C(4, 3) \to F(4, -3) \to J(3, 4)$

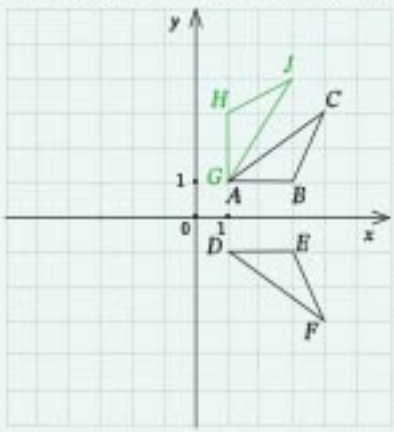
Admir sırasıyla şu üçgenleri elde eder:

$A(1, 1) \to K(-1, 1) \to N(-1, -1)$

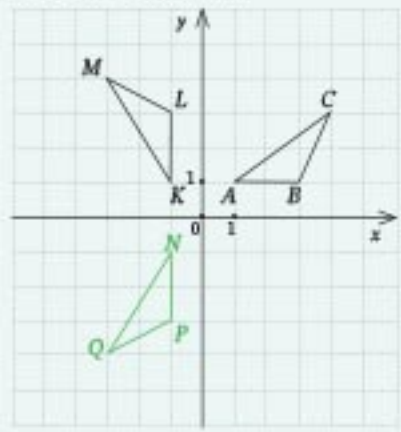
$B(3, 1) \to L(-1, 3) \to P(-1, -3)$

$C(4, 3) \to M(-3, 4) \to Q(-3, -4)$

Andrey ve Admir, ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde etmemişlerdir.



çiz. 1a



çiz. 1b

Alıştırma 1

Köşeleri $A(-2, 3)$, $B(1, 0)$ ve $C(3, 2)$ olan ABC üçgeni verilmiştir.

a) ABC üçgenini B köşesi etrafında, saat yönünün tersine 90° döndür.

b) Daha sonra ABC üçgeninin elde edilen görüntüsüne, $y = x$ doğrusuna göre eksenel simetri uygula.

c) Dönüşümleri ters sırayla uygula. ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde ettin mi?

Örnek 2

Köşeleri $A(-2, 1)$, $B(-2, 0)$ ve $C(0, 0)$ noktalarında bulunan ABC üçgeni verilmiştir.
y eksenine göre eksenel simetri ve 3 birim sağa, 1 birim yukarı öteleme verilmiştir. Arta önce eksenel simetriyi, sonra ötelemeyi uygular (Çizim 2a); Ana ise önce ötelemeyi, sonra eksenel simetriyi uygular (Çizim 2b). Onlar ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde etmişler midir?

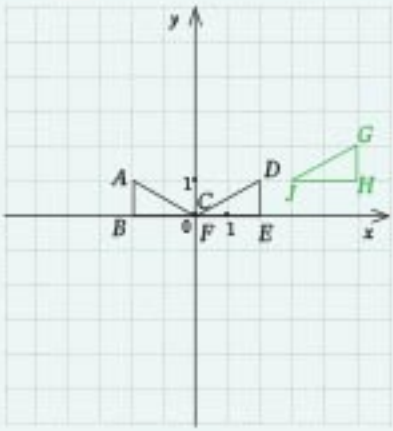
Arta sırasıyla şu üçgenleri elde eder:

$A(-2, 1) \rightarrow D(2, 1) \rightarrow G(5, 2)$
$B(-2, 0) \rightarrow E(2, 0) \rightarrow H(5, 1)$
$C(0, 0) \rightarrow F(0, 0) \rightarrow J(3, 1)$

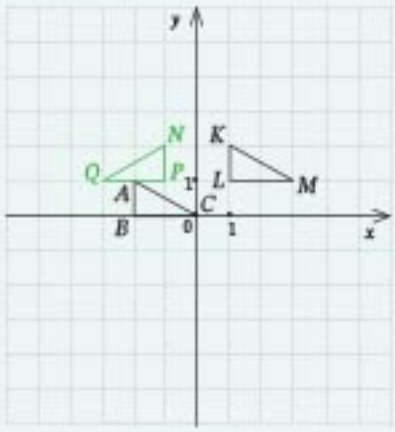
Ana sırasıyla şu üçgenleri elde eder:

$A(-2, 1) \rightarrow K(1, 2) \rightarrow N(-1, 2)$
$B(-2, 0) \rightarrow L(1, 1) \rightarrow P(-1, 1)$
$C(0, 0) \rightarrow M(3, 1) \rightarrow Q(-3, 1)$

Arta ve Ana, ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde etmemişlerdir.



çiz. 2a



çiz. 2b

Alıştırma 2

Köşeleri $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ ve $C(2, 5)$ olan ABC üçgenini çiz.

a) ABC üçgeninin x eksenine göre eksenel simetri altındaki görüntüsünü bul.

b) ABC üçgeninin elde edilen görüntüsüne 4 birim sola ve 5 birim yukarı öteleme uygula.

c) Dönüşümleri ters sırayla uygula. ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde ettin mi?

Örnek 3

Köşeleri $A(-1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$ noktalarında olan üçgen verilmiştir. Koordinat başlangıcı (orijin) merkezli, saat yönünün tersine 90° açılı döndürme ve 1 birim sola, 3 birim aşağı öteleme verilmiştir. Mila önce döndürmeyi, sonra ötelemeyi uygular (Çizim 3a); Merlinda ise önce ötelemeyi, sonra döndürmeyi uygular (Çizim 3b). Onlar ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde edecekler midir?

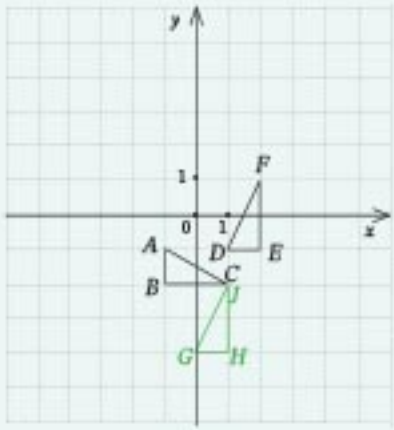
Mila sırasıyla şu üçgenleri elde eder:

$A(-1, -1) \rightarrow D(1, -1) \rightarrow G(0, -4)$
$B(-1, -2) \rightarrow E(2, -1) \rightarrow H(1, -4)$
$C(1, -2) \rightarrow F(2, 1) \rightarrow J(1, -2)$

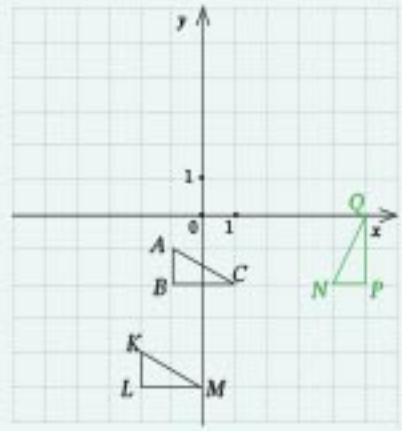
Merlinda sırasıyla şu üçgenleri elde eder:

$A(-1, -1) \rightarrow K(-2, -4) \rightarrow N(4, -2)$
$B(-1, -2) \rightarrow L(-2, -5) \rightarrow P(5, -2)$
$C(1, -2) \rightarrow M(0, -5) \rightarrow Q(5, 0)$

Mila ve Merlinda, ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde etmemişlerdir.



çiz. 3a



çiz. 3b

Alıştırma 3

Dik koordinat sisteminde köşe koordinatları $A(1, 0)$, $B(5, 1)$ ve $C(1, 4)$ olan ABC üçgenini çiz.

a) A köşesi etrafında, saat yönünün tersine 90° döndürme uygula.

b) Görüntüye 2 birim sola ve 5 birim aşağı öteleme uygula.

c) Dönüşümleri ters sırayla uygula. ABC üçgeninin aynı görüntüsünü elde ettin mi?

Etkinlik

Köşeleri $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(3, 3)$ noktalarında olan bir üçgen verilmiştir. Koordinat başlangıcı etrafında 180° döndürme ve x eksenine göre eksenel simetri verilmiştir. Dönüşümlerin uygulanma sırası önemli midir?

Alıştırma 4

Köşeleri $P(2, 1)$, $Q(6, 1)$, $R(6, 4)$ ve $S(2, 4)$ noktalarında olan bir dikdörtgen verilmiştir. Art arda iki dönüşüm uygulanmıştır: koordinat başlangıcı etrafında, saat yönünün tersine 180° döndürme ve y eksenine göre eksenel simetri.

a) Döndürmeden sonra P, Q ve R noktalarının koordinatlarını bul. Bunları P_1, Q_1 ve R_1 ile göster.

b) P_1, Q_1 ve R_1 noktalarının eksenel simetriden sonraki koordinatlarını bul. Bunları P_2, Q_2 ve R_2 ile göster.

c) İki dönüşümün sırası değiştirilirse aynı noktaları elde edip etmeyeceğini açıkla.

ALIŞTIRMA SORULARI

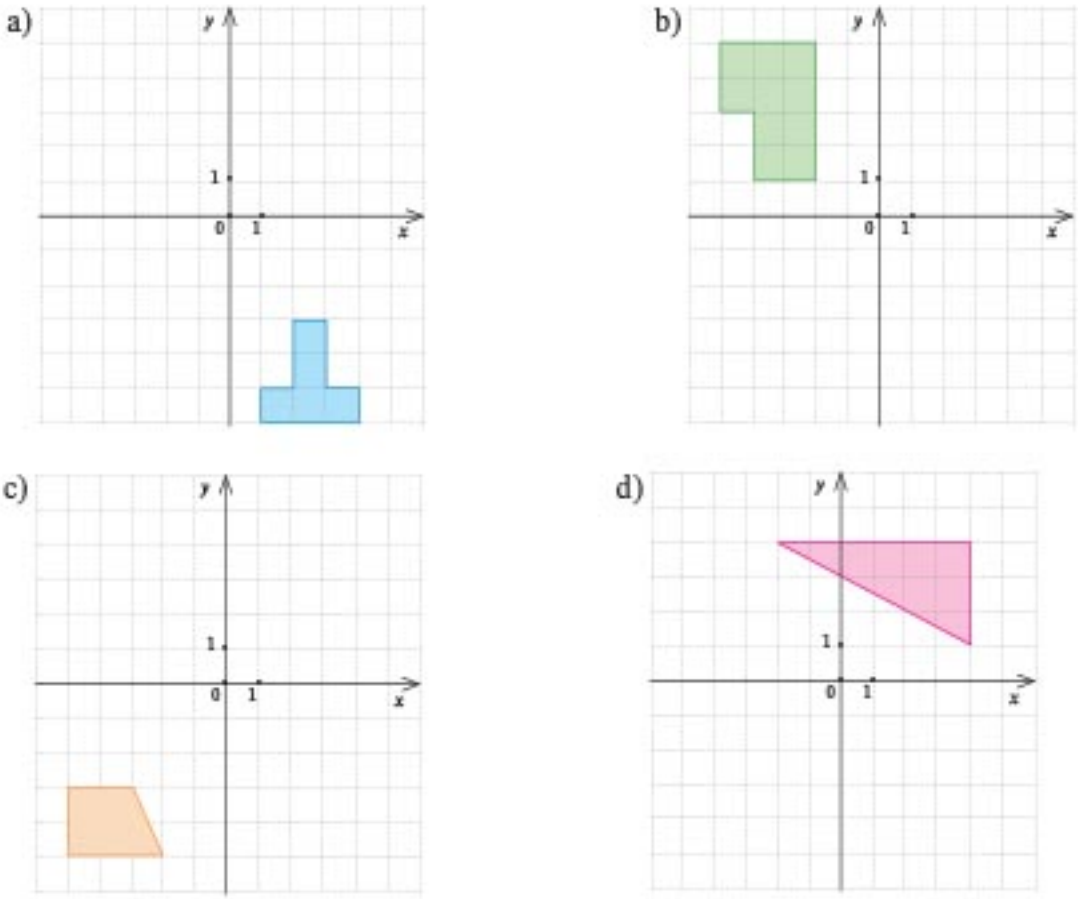
1. Çizim 4'te verilen şekil üzerinde aşağıdaki dönüşümleri uygula:

a) x eksenine göre eksenel simetri, sonra 3 birim sola ve 4 birim yukarı öteleme,

b) merkezi $(-1, 0)$ olan 180° döndürme, sonra $y = 1$ doğrusuna göre eksenel simetri,

c) $y = -1$ doğrusuna göre eksenel simetri, sonra merkezi $(0, -3)$ olan, saat yönünün tersine 90° döndürme,

d) 3 birim sola ve 5 birim aşağı öteleme, sonra $x = -1$ doğrusuna göre eksenel simetri.



Çizim 4

2. Dik koordinat sisteminde, köşe koordinatları $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ ve $C(2, 5)$ olan ABC üçgenini çiz.

a) ABC üçgeninin x eksenine göre eksenel simetri(yansıma dönüşümü) altındaki görüntüsünü bul ve MNP ile göster.

b) MNP üçgenine 4 birim sola ve 5 birim yukarı öteleme uygula.
c) Dönüşümleri ters sırayla uygula: önce ABC üçgenine 4 birim sola ve 5 birim yukarı öteleme, sonra elde edilen üçgene x eksenine göre eksenel simetri uygula.
Aynı görüntüyü elde ettin mi? Ne sonuç çıkarıyorsun?

3. Dik koordinat sisteminde, köşe koordinatları $A(1, -3)$, $B(3, -2)$, $C(4, 0)$ ve $D(3, 1)$ olan $ABCD$ dörtgenini çiz.
a) $ABCD$ dörtgeninin $y = 1$ doğrusuna göre eksenel simetri altındaki görüntüsünü belirle ve $MNPR$ ile göster.
b) $MNPR$ dörtgenini, merkezi $(0, -1)$ noktası olan 90° saat yönünde döndür.
c) Dönüşümleri ters sırayla uygula: önce $ABCD$'ye verilen döndürmeyi, sonra elde edilen dörtgene $y = 1$ doğrusuna göre eksenel simetri uygula. Aynı görüntüyü elde ettin mi? Nasıl bir sonuç çıkarıyorsun?

4. Bir spor salonuna yeni LED projektörler yerleştirilmektedir. Teknisyen önce salon planında üç projektör için öngörülen yerleri $A(1, 2)$, $B(4, 2)$ ve $C(4, 5)$ noktalarıyla işaretlemiştir. Daha sonra şefi, planın salonun diğer duvarı için uyarlanması gerektiğini söyler. Projektörleri yeni konuma taşımak için iki hareket uygulanmalıdır: x eksenine göre eksenel simetri ve 3 birim sola, 1 birim aşağı öteleme.
a) İki dönüşümün her birinden sonra A, B ve C noktalarının koordinatlarını bul.
b) Önce öteleme, sonra simetri uygulanırsa aynı sonucu elde edip etmeyeceğini kontrol et.

5. Köşeleri $A(1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$ noktalarında olan bir üçgen verilmiştir. İki öteleme verilmiştir: T_1 ile 3 birim sağa ve 4 birim yukarı gidilir; T_2 ile 1 birim sağa ve 3 birim aşağı gidilir. Dönüşümlerin uygulanma sırası önemli midir?

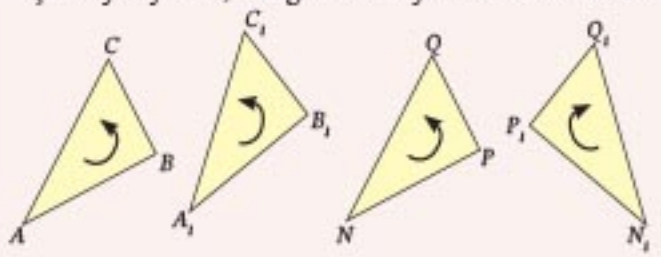
Araştırma

Aynı uzunluğa sahip ve paralel olmayan iki AB ve CD doğru parçası çiz. Bu sırada A ve C ile B ve D farklı noktalar olsun. C ve D noktalarının sırasıyla A ve B noktalarının görüntüleri olduğu döndürmeyi (dönme açı ve dönme merkez) belirle.
Yönerge: Döndürme merkezi A ve C noktalarına eşit uzaklıktadır; bu nedenle AC doğru parçasının orta dikmesi üzerinde yer alır. Aynı nedenle döndürme merkezi BD doğru parçasının orta dikmesi üzerinde de yer alır.

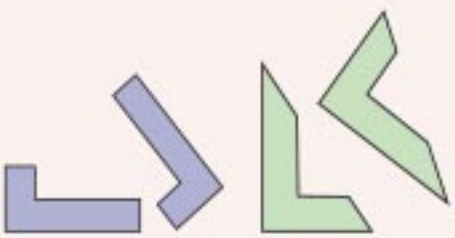
18. EKSENEL SİMETRİ, DÖNDÜRME VE ÖTELEME KOMBİNASYONLARINI BELİRLEME

Etkinlik

a) Çizim 1'deki üçgenler için $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ ve $\Delta NPQ \cong \Delta N_1P_1Q_1$ geçerlidir. Hangi üçgen çifti aynı yönlü, hangileri ters yönlüdür? Nasıl karar verdin? Cevabını açıkla.



çiz. 1



çiz. 2

b) Çizim 2'deki iki boyutlu (2B) şekiller ikişer ikişer eştir. Hangi 2B şekil çifti aynı yönlü, hangileri ters yönlüdür? Nasıl karar verdin? Cevabını açıkla.

Bu derste, verilen bir 2B şeklin konumunu değiştirmek için kullanılan eksenel simetri, döndürme ve öteleme kombinasyonlarını belirlemeye çalışacağız.

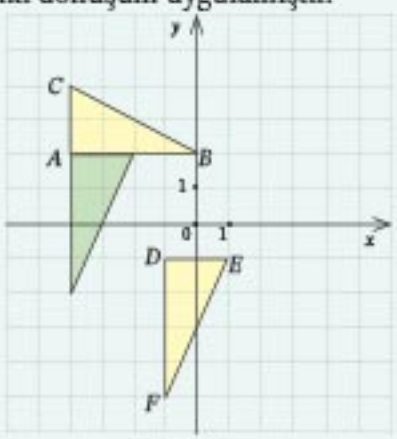
Örnek 1

Mariya ve Martin, köşeleri $A(-4, 2)$, $B(0, 2)$ ve $C(-4, 4)$ olan asıl şekil ABC üçgeninden, köşeleri $D(-1, -1)$, $E(1, -1)$ ve $F(-1, -5)$ olan görüntü DEF üçgeninin elde edildiği öteleme, döndürme ve eksenel simetri kombinasyonunu aramaktadır.

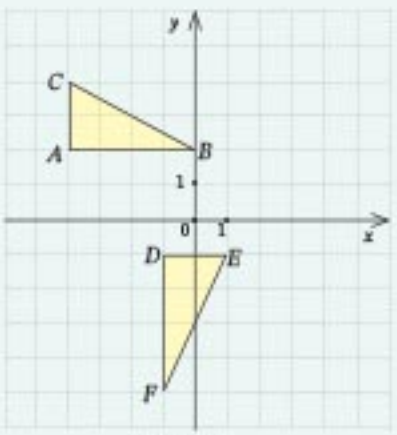
İkisi de iki üçgenin aynı yönlü olduğunu fark etmiştir. Bu, kombinasyonda eksenel simetri olmaması gerektiği anlamına gelir.

Mariya, merkezi $(-4, 2)$ noktası olan ve saat yönünde 90° açılı bir döndürme uygulamış, sonra 3 birim sağa ve 3 birim aşağı öteleme uygulamıştır (Çizim 3a).

Mariya, iki dönüşüm uygulamıştır.



çiz. 3a

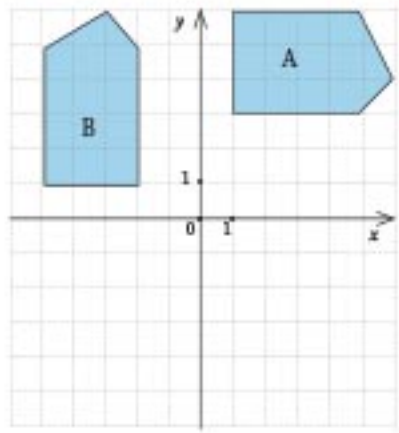


çiz. 3b

Martin, merkezi $(-4, -1)$ noktası olan ve saat yönünde 90° açılı bir döndürme uygularsa, DEF üçgenini hemen görüntü olarak elde edeceğini fark etmiştir (Çizim 3b). Martin, bir dönüşüm uygulamıştır.
Yani Mariya iki dönüşüm, Martin ise bir dönüşüm uygulamıştır. Onun yöntemi daha basittir.

Alıştırma 1

Asıl şekil A'dan görüntü B'nin elde edildiği dönüşüm hareketlerini - kombinasyonunu bul (Çizim 4).

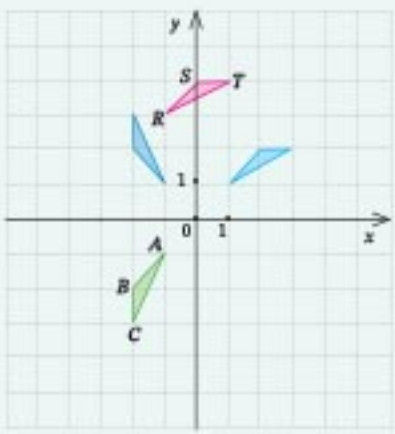


çiz. 4

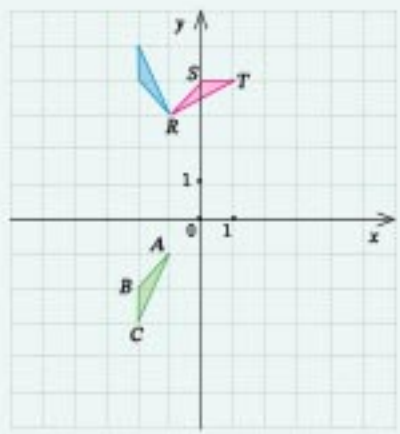
Örnek 2

Öğretmen; Pavel, Stefaniya ve Petar'a, köşeleri $A(-1, -1)$, $B(-2, -2)$ ve $C(-2, -3)$ olan asıl şekil ABC üçgeninden, köşeleri $R(-1, 3)$, $S(0, 4)$ ve $T(1, 4)$ olan görüntü RST üçgeninin elde edildiği öteleme, döndürme ve eksenel simetri kombinasyonunu bulma görevi vermiştir.

Pavel, Stefaniya ve Petar aşağıdaki çözümleri vermiştir. Üçü de iki üçgenin ters yönlü olduğunu fark etmiştir. Bu, kombinasyonda eksenel simetri bulunmasının gerekli olduğu anlamına gelir. Pavel önce x eksenine göre eksenel simetri uygulamıştır (Çizim 5a), sonra koordinat başlangıcı merkezli, saat yönünde 90° açılı döndürme uygulamış ve en sonunda 2 birim sola ve 2 birim yukarı öteleme uygulamıştır. O, üç dönüşüm uygulamıştır.



çiz. 5a



çiz. 5b



çiz. 5c

Stefaniya önce $y = 1$ doğrusuna göre eksenel simetri uygulamıştır (Çizim 5b).

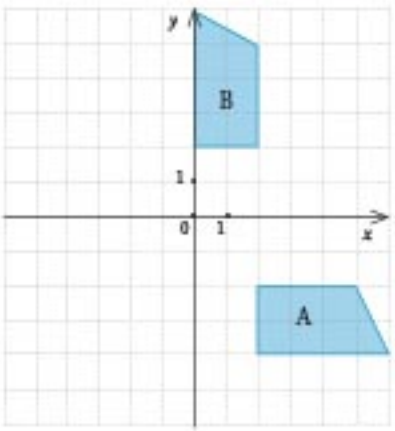
Sonra, merkezi R noktası olan ve saat yönünde 90° açılı bir döndürme uygularsa, RST üçgenini hemen görüntü olarak elde edeceğini fark etmiştir. O, iki dönüşüm uygulamıştır.
Petar önce $y = x$ doğrusuna göre eksenel simetri uygulamıştır (Çizim 5c). Sonra, merkezi $(-1, 1)$ noktası olan ve 180° açılı bir döndürme uygularsa, RST üçgenini hemen görüntü olarak elde edeceğini fark etmiştir. O, iki dönüşüm uygulamıştır.
Yani Pavel üç dönüşüm, Stefaniya ve Petar ise ikişer dönüşüm uygulamıştır. Stefaniya ve Petar'ın belirlediği kombinasyon, Pavel'in kombinasyonundan daha basittir.

Alıştırma 2

Önceki örnekteki soruyu, kendi dördüncü seçeneğini inceleyerek çöz. Dönüşüm sayını Pavel, Stefaniya ve Petar'ın dönüşüm sayılarıyla karşılaştır.

Alıştırma 3

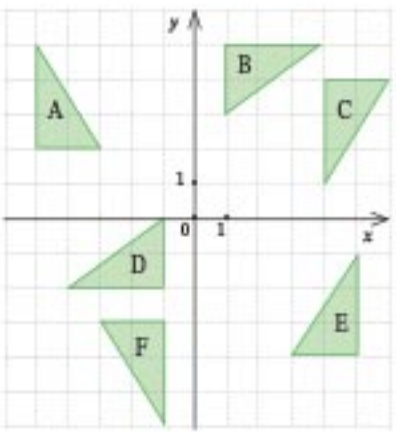
Asıl şekil olan A dörtgeninden, görüntü olan B dörtgeninin elde edildiği dönüşüm kombinasyonunu bul (Çizim 6).



çiz. 6

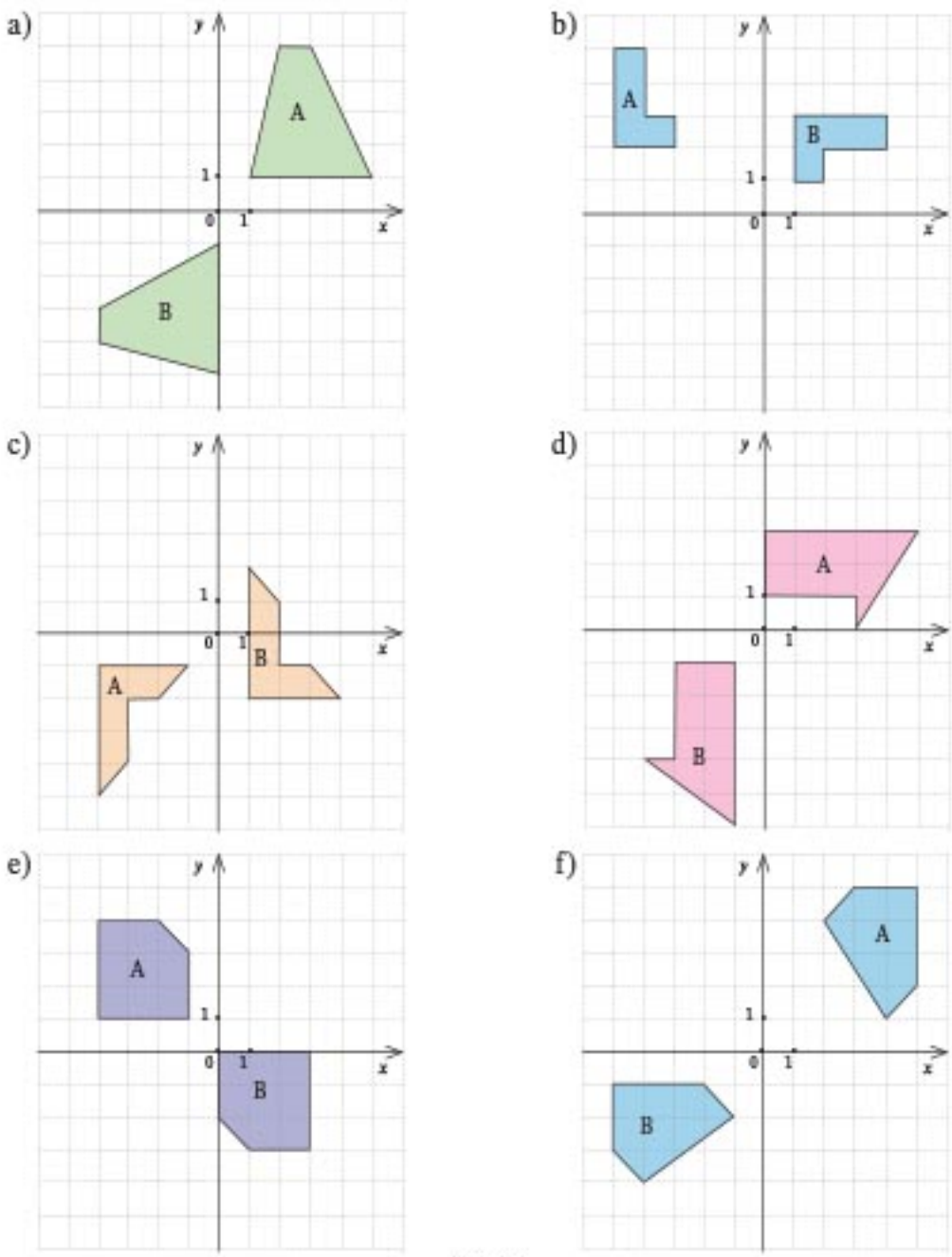
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Asıl şeklin koordinatları $A(3,2)$, $B(4,2)$, $C(5,1)$ ve görüntünün koordinatları $M(3,4)$, $N(3,5)$, $P(4,6)$ olacak şekilde olası öteleme, döndürme ve eksenel simetri kombinasyonlarını bul.
2. Köşeleri $A(3,2)$, $B(3,3)$, $C(4,3)$, $D(4,2)$ ve $M(5,0)$, $N(4,0)$, $P(4,1)$, $Q(5,1)$ noktalarında olan $ABCD$ ve $MNPQ$ kareleri verilmiştir. $ABCD$'nin asıl şekil, $MNPQ$'nun ise onun görüntüsü olduğu en çok üç dönüşümden oluşan bir kombinasyon bul.
3. Şekli dönüştüren olası öteleme, döndürme ve eksenel simetri kombinasyonunu bul:
   a) A'dan B'ye, b) D'den A'ya, c) F'den C'ye,
   d) E'den D'ye, e) B'den F'ye (Çizim 7).



çiz. 7

4. A şeklini *B* şekline dönüştüren olası öteleme, döndürme ve eksenel simetri kombinasyonunu bul (Çizim 8):



çiz. 8

Araştırma

İvan, asıl şekil ABC ve onun görüntüsü $A_1B_1C_1$ ile belirlenen herhangi bir hareketin, en çok üç eksenel simetri kombinasyonu olarak gösterilip gösterilemeyeceğini kontrol etmek istiyor. O, şu şekilde düşünür: Birinci eksenel simetri ile A noktası A_1 noktasıyla çakışacaktır. Sonra bir sonraki eksenel simetri ile, gerekirse ikinci nokta (B) B_1 ile çakışacak, bu sırada A_1 noktası yerinde kalacaktır. Son olarak, üçüncü eksenel simetri gerekirse, üçüncü nokta (C) C_1 ile çakışacak, A_1 ve B_1 noktaları ise yerlerinde kalacaktır. İki eş üçgen seç ve İvan'ın haklı olup olmadığını kontrol et.

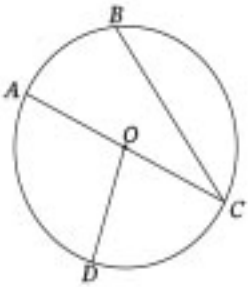
TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

1. Kenarları paralel olan iki açıdan biri 67°'dir. Diğer açı kaç derecedir, eğer:
   a) kenarları aynı yönlü ise, b) kenarları zıt yönlü ise,
   c) bir kenar çifti aynı yönlü, diğer kenar çifti zıt yönlü ise?

2. Kenarları birbirine dik olan α ve β açılarını bul, eğer:
   a) $\alpha = 118° + \beta$, b) $\alpha = 5\beta$.

3. Çizim 1'e göre bütün:
   a) daire dilimlerini, b) daire parçalarını adlandır.

4. Aynı çember yayı üzerinde bulunan ve merkez açısı aşağıdakilerden olan çevre açıyı bul:
   a) 79°, b) 234°.



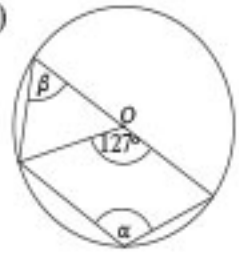
çiz. 1

5. Çizim 2'deki bilinmeyen α ve β açılarını bul: Çizim 2

a)



b)



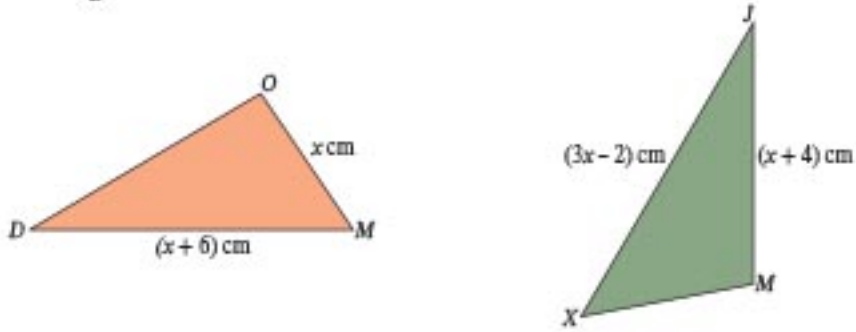
çiz. 2

6. Hipotenüsü $c = 4{,}8$ cm ve açısı $\alpha = 30°$ verilen ABC dik üçgenini çiz.

7. Yan kenar uzunluğu $b = 5{,}4$ cm ve taban açısı $\alpha = 65°$ verilen ABC ikizkenar üçgenini çiz.

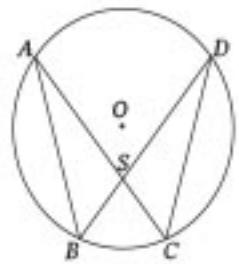
8. Ağırlık merkezinin üçgenin bir kenarına uzaklığı 1,5 cm olan ABC eşkenar üçgenini çiz.

9. $\Delta DMO \cong \Delta JXM$ olduğu bilinmektedir. Çizim 3'teki verilere göre üçgenlerin her bir kenarının uzunluğunu bul.



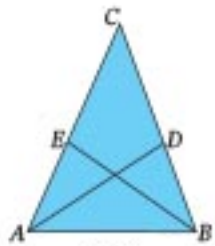
çiz. 3

10. $\overline{AB} = \overline{CD}$, verildiğine göre,
    $\Delta ABS \cong \Delta DCS$ olduğunu açıkla (Çizim 4).



çiz. 4

11. AD ve BE doğru parçaları, ABC ikizkenar üçgeninin tabanındaki açıların açıortayları üzerinde yer almaktadır (Çizim 5).
Verilenleri açıkla: a) $\Delta ABD \cong \Delta BAE$, b) $\overline{DC} = \overline{EC}$.

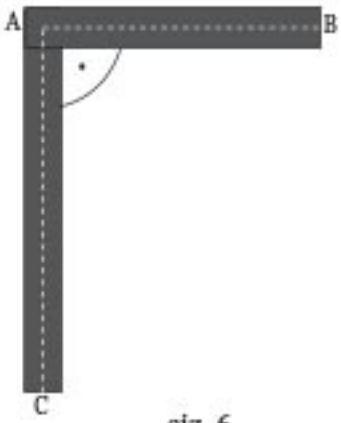


çiz. 5

12. Dik üçgenin dik kenarları aşağıdaki gibi verilmişse hipotenüsünü hesapla:
a) $a = 9$ cm ve $b = 12$ cm, b) $a = 7$ cm ve $b = 24$ cm.

13. Hipotenüsü ve ikinci dik kenarı aşağıdaki uzunluklarda olan dik üçgenin bir dik kenarını hesapla:
a) $c = 25$ cm ve $b = 15$ cm, b) $c = 37$ cm ve $a = 35$ cm.

14. A, B ve C olmak üzere üç kavşak şu şekilde bağlanmıştır: A'dan B'ye uzunluğu 230 m olan düz bir yol gider. A'dan C'ye uzunluğu 325 m olan düz bir yol gider ve BAC açısı diktir (Çizim 6). Bu iki kavşak arasında doğrudan bir yol yapılırsa B'den C'ye yolculuk kaç metre kısalır?



çiz. 6

15. Bir dik açının bölgesinde M noktası yer almaktadır. Bu noktanın açının kenarlarına uzaklıkları 2,4 cm ve 0,7 cm'dir. M noktasının dik açının köşesine uzaklığını hesapla.

16. B şehri, A şehrinin 56 km doğusunda bulunmaktadır. C şehri, A şehrinin 73 km güneyinde bulunmaktadır. B ve C şehirleri arasındaki uzaklığı bul.

17. İkizkenar yamuğun tabanları $a = 85$ cm ve $b = 43$ cm, yan kenarının uzunluğu 35 cm'dir. Yamuğun yüksekliğini hesapla.

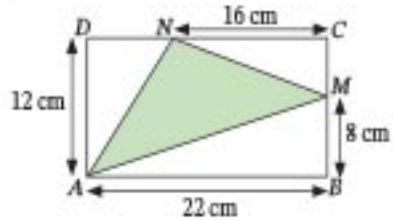
18. Kenarı ve bir köşegeni verilen eşkenar dörtgenin d_2 köşegenini hesapla:
a) $a = 55$ cm ve $d_1 = 66$ cm, b) $a = 45$ cm ve $d_1 = 72$ cm.

19. Kenarı $a = 3$ cm olan karenin çevrel çemberin yarıçap uzunluğunu belirle.

20. $ABCD$ dikdörtgeninin içine çizilmiş AMN üçgeninin çevresini hesapla (Çizim 7).

21. Köşegeni $d = 6$ cm ve köşegenleri arasındaki açı 140° olan dikdörtgen çiz.

22. Köşegeni $d_1 = 7$ cm, kenarı $a = 5$ cm ve aralarındaki açı 30° olan paralelkenarı çiz.



çiz. 7

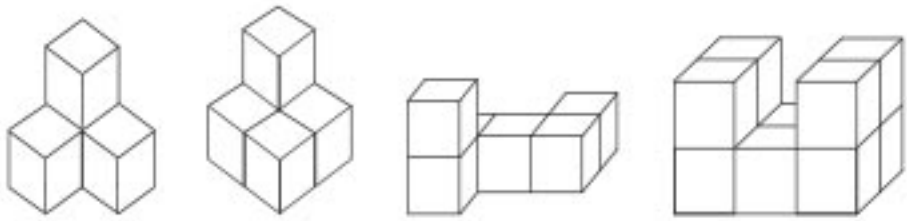
23. Tabanları 38 cm ve 24 cm olan, yüksekliği ile yan kenarı arasında 45° açı bulunan ikizkenar yamuğun yan kenarını bul.

24. Yamuğun orta tabanı 10,5 cm, tabanlardan biri 7,2 cm'dir. Diğer tabanı hesapla.

25. Deltoidin iç açılarından biri 47°'dir ve eşit açıların toplamı 236°'dir. Deltoidin açılarını hesapla.

26. Aşağıda verilen geometrik cisimlerin taban ayrıtı ve yan ayrıtı sayılarını bulunuz:
a) Ondokuzgen prizmada, b) Onyedigen piramitte.

27. Çizim 8'deki 3B şekli izometrik kâğıda çiz.



çiz. 8

28. Köşeleri A(0, 3), *B*(4, 0) ve C(3, 4) olan *ABC* üçgeni verilmiştir.

a) *ABC* üçgeninin x eksenine göre eksenel simetri altındaki görüntüsünü bul ve *MNP* ile göster.

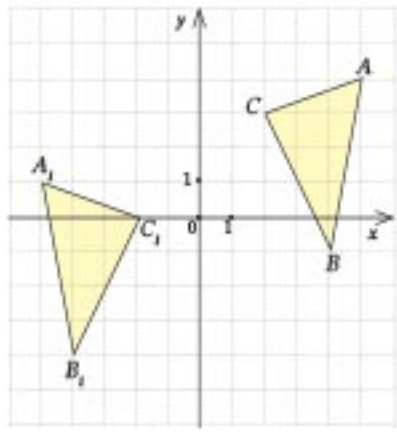
b) *MNP* üçgenine 5 birim sola ve 3 birim yukarı öteleme uygula.

c) Dönüşümleri ters sırayla uygula. Aynı görüntüyü elde ettin mi? Ne sonuç çıkarıyorsun?

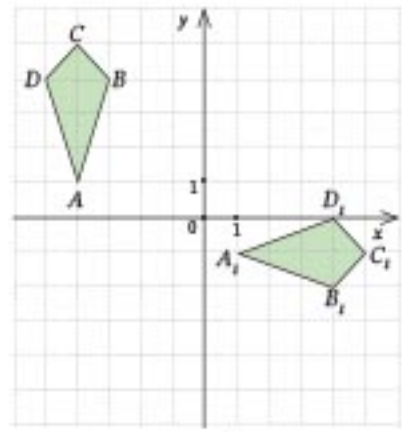
29. Aşağıdaki dönüşümleri açıkla:

a) asıl şekil olan *ABC* üçgeninden, görüntü olan $A_1B_1C_1$ üçgeni elde edilir (Çizim 9a),

b) asıl şekil olan *ABCD* dörtgeninden, görüntü olan $A_1B_1C_1D_1$ dörtgeni elde edilir (Çizim 9b).



çiz. 9a



çiz. 9b

Konu 3:

CEBİR

Öğrenme Sonuçları:

Bu konuyu öğrenirken şunları yapabileceksin:

- Tam rasyonel cebirsel ifadelerle ilgili problemleri çözmeyi.
- İlişki ve fonksiyon kavramlarını günlük yaşam bağlamında kullanmayı.
- Doğrusal bir fonksiyonun grafiğini yorumlamaya yönelik problemleri çözmeyi.

1. MONOM

Monom. Monomun Standart Biçimi

Etkinlik

a) Sabit terim nedir, değişken nedir? Cebirsel ifade nedir?
b) Verilen ifadelerin katsayılarını ve değişkenleri bul: $3x^2, xy^3, -4a^3b^2, y$.

Katsayısı rasyonel sayı olan ve değişkenlerden oluşan; çarpma ile negatif olmayan tam sayı kuvvet alma işlemlerini içeren ifadelere **monom (tekterimli)** denir.

Katsayıların rasyonel sayılar olduğunu ve değişkenlerin rasyonel sayılar kümesinde değerler aldığını kabul edeceğiz.

Örnek 1

a) Bütün sabitler monomdur.
b) Örneğin $-x, y, \frac{4}{7}a^2b, 3x^2, xy^3, -4a^3b^2$ ifadeleri birer monomdur.
c) Örneğin $x^2 + 1, \frac{2}{y}, \frac{3x-2}{5}$ ifadeleri monom değildir, çünkü toplama, çıkarma ve bir değişkene bölme işlemlerinden en az birini içerirler.
d) $\frac{y^2}{15}$ ifadesi monomdur, çünkü $\frac{1}{15}y^2$ çarpımı olarak yazılabilir.

Alıştırma 1

Aşağıdaki ifadelerden hangileri monomdur:

a) $\frac{5}{6}$, b) $8x$, c) $3x + 2$, d) $\frac{x}{5}$, e) $\frac{5}{x}$, f) $\frac{2x+1}{3}$, g) $-7xy^3z^5$, h) $\frac{2x^4y^2z}{5}$?

Örnek 2

$5x^3y^2zy$ monomunun x, y ve z olmak üzere üç değişkeni vardır. Çarpmanın değişme özelliğini ve tabanları aynı olan kuvvetleri çarpma kuralını uygulayarak yy çarpımını y^2 biçiminde yazabiliriz. Benzer şekilde, $5 \cdot 2 = 10$ çarpımı elde edilir. O hâlde, $5x^3y^2zy$ monomu $10x^3y^2z$ monomuna eşittir. $10x^3y^2z$ monomunu daha sonraki bir işlemle daha az çarpanlı olarak yazamayız.
Bu monomun **standart biçimde** yazıldığını söyleriz. Yani:

$5x^3y2zy = 10x^3y^2z$.

Tekterimliyi (monomu) **standart biçime** dönüştürürken:

- çarpanların yerlerini çarpmanın değişme özelliğini kullanarak değiştiririz;
- sabit terimleri çarpar, aynı değişkeni içeren çarpanları ise aynı tabanlı kuvvetlerin çarpılması kuralını kullanarak kuvvet biçiminde yazarız;
- elde edilen tekterimli, verilen tekterimliye eşittir.

Tekterimlileri standart biçimde yazarken, önce sabit terimi, daha sonra değişkenlerden oluşan çarpanları yazmayı kabul edeceğiz.

Örnek 3

Tekterimliyi standart biçime dönüştürünüz: a) $5x^5yxy^2$, b) $2x^3yx^4y(-4xy)$, c) $-xyx^3y^3xy$.

a) $5x^5yxy^2 = 5x^6y^3$, b) $2x^3yx^4y(-4xy) = -8x^8y^3$, c) $-xyx^3y^3xy = -x^5y^5$.

Alıştırma 2

Tekterimliyi standart biçime dönüştürünüz:

a) $8ab^23ab$, b) x^3yxxy^2, c) $-x^2y^34x^3y^3(-6xy)$, d) $2aab3abb4ab^2$.

Standart biçimde yazılan tekterimlide, değişkenlerle çarpılan sabit terime **tekterimlinin - monomun katsayısı** denir. Monomda yer alan değişkenlerin çarpımına ise **monomun değişken kısmı** denir.

Örnek 4

Aşağıdaki monomun katsayısını ve değişken kısmını bulunuz:

a) $6ab^3c^2$, b) $-xy^3$, c) xy^2z^3, d) $-\frac{3x^2y}{4}$.

a) $6ab^3c^2$ tekterimlisinin katsayısı 6, değişken kısmı ise ab^3c^2'dir.
b) $-xy^3 = (-1) \cdot xy^3$ olduğundan, tekterimlinin katsayısı -1, değişken kısmı ise xy^3'tür.
c) $xy^2z^3 = 1 \cdot xy^2z^3$ olduğundan, tekterimlinin katsayısı 1, değişken kısmı ise xy^2z^3'tür.
d) $-\frac{3x^2y}{4}$ tekterimlisinde katsayı $-\frac{3}{4}$, değişken kısmı ise x^2y'dir.

Alıştırma 3

Tabloyu defterinize çiziniz ve doldurunuz:

Tekterimli	$2,5\,a^5b^2$	y^3	$-xyz$	$\frac{x^3y^5}{3}$	$-12x^2$	y^3
Katsayı						
Değişken kısmı						

Monomun Derecesi

Etkinlik

Monomlarda değişkenin kuvveti kaçtır? a) $5a$, b) $\frac{1}{3}x^2$?

Tek değişkenli monomlarda, değişkenin kuvveti monomun derecesidir. Örneğin, $-2x^3$ monomu üçüncü dereceden, $7a^4$ monomu ise dördüncü derecedendir.
İki veya daha fazla değişkenli monomlarda, her bir değişkene göre ayrı ayrı monom derecesi bulunduğu gibi, **tüm değişkenlere göre monom derecesi** de vardır.
Buna göre, $-3xy^2$ monomunda x değişkeni birinci dereceden, y değişkeni ikinci derecedendir. Bu nedenle monomun tüm değişkenlere göre derecesi $1 + 2 = 3$'tür.

Monomdaki değişkenlerin kuvvetlerinin toplamına **monomun derecesi** denir.

Örnek 5

Verilen monomların derecesini bulunuz: a) $2a^2b^3c^4$, b) $5xy^2z$, c) $-xyz$.

a) Değişkenlerin kuvvetleri toplamı $2 + 3 + 4 = 9$ olduğundan, monomun derecesi 9'dur.
b) $5xy^2z$ monomunun derecesi $1 + 2 + 1 = 4$'tür.
c) x, y ve z değişkenlerinin her biri birinci dereceden olduğundan, $-xyz$ monomu üçüncü derecedendir.

Alıştırma 4

Aşağıdaki monomların derecesini bulunuz:
a) $2xy^3z^2$, b) $5x4y$, c) x^3z^5, d) $3x^3z^3$.

Benzer Monomlar

Etkinlik

$-3xy^2$, $3x^2$, $5xy^2$, $-3x$ ve $5x^2y^2$ monomlarından hangilerinin değişken kısmı aynıdır?

Örnek 6

$3(-2)x^4yy^2$ ve $(5^2 - 2^2)xyx^3y^2$ monomlarını standart biçime dönüştür.
Bu monomların değişken kısmı aynı mıdır?

Monomları standart biçime dönüştürelim: $3(-2)x^4yy^2 = -6x^4y^3$ ve $(5^2 - 2^2)xyx^3y^2 = 21x^4y^3$
$-6x^4y^3$ ve $21x^4y^3$ monomlarının değişken kısmı aynıdır. Bu monomlar yalnızca katsayıları bakımından farklıdır. Bu tür monomlara benzer monomlar denir.

Değişken kısmı aynı olan monomlara **benzer monomlar** denir.

Alıştırma 5

Aşağıdaki monom çiftlerinden hangileri benzerdir?
a) $-2x$ ve $2x^2$, b) $4xy$ ve $-3xy$, c) -5 ve 5, d) $7a^4b^3aba$ ve ab^3a^5?

Karşıt Monomlar

Etkinlik

$-2x^3$ ve $2x^2$ monomları verilmiştir.
a) Bu monomlar benzer midir? b) Bu monomların katsayıları nasıl sayılardır?

Örnek 7

$-6x^5y$ ve $6x^5y$ monomlarının değişken kısmı aynıdır. Bu nedenle benzer monomlardır. Katsayıları olan -6 ve 6 ise birbirine zıt sayılardır. Bu nedenle bu monomlara karşıt monomlar denir.

Benzer olup katsayıları birbirine zıt olan iki monoma **karşıt monomlar** denir.

Örnek 8

Aşağıdaki monomların karşıt monomlarını bul:
a) $-4xy^3$, b) $-6a^4b^6$, c) $7{,}5x^2y^3$, d) $-\frac{2}{3}x^9y^7z$.

a) $-4xy^3$ monomunun karşıtı $4xy^3$'tür. b) $6a^4b^6$, c) $-7{,}5x^2y^3$, d) $\frac{2}{3}x^9y^7z$.

Alıştırma 6

Verilen monomların karşıt monomlarını bul: a) $-4xy^3$, b) xy, c) -6, d) $7{,}5x^2y^3$.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri monomdur:
   a) 10, b) $2x$, c) $5x+1$, d) $\frac{x^2}{2}$, e) $\frac{1}{x^3}$, f) $\frac{x-1}{4}$, g) $-3xy^3z^4xy^2$, h) $\frac{x^4y^2z}{7x^2y}$?
2. Monomu standart biçime dönüştür:
   a) x^5y^3xy, b) $3ab(-2a^3b)$, c) $-5xy^2x^2y^3(-6xy)$, d) $ab2abb4a^2$.
3. Tabloyu defterine geçir ve doldur:

Monom	$3ab$	$-5x^3y^3$	$x^5y^2z^4$	$\frac{x^3y^4}{9}$	$\frac{-x}{8}$	$-xy^5$
Katsayı						
Değişken kısmı						
Monomun derecesi						

4. Aşağıdaki monom çiftlerinden hangileri benzerdir:
a) $3x$ ve $3x^2$, b) $5x^2y$ ve $-3x^2y$, c) 1 ve 5, d) a^3b ve ab^3?

5. Aşağıdaki monomlara benzer ikişer monom yaz: a) $4x^4$, b) $5xy$, c) 7, d) a^2b^3.

6. Aşağıdaki monomun karşıt monomunu bul: a) $-x^3$, b) $6x^2y^4$, c) $-3{,}7$, d) $15y^3$.

7. Aşağıdaki monomun derecesini bul: a) a^3b, b) $4x^2y^3z$.

8. Aşağıda istenen monomları yazınız:
a) Derecesi 7 olan üç benzer monom b) Derecesi 5 olan iki zıt işaretli tekterimli.

9. a) Her biri için x kutu, her kutuda x paket ve her pakette y keçeli kalem bulunan 4 kırtasiye için alınan keçeli kalem sayısını gösteren ifadeyi yaz.
b) Elde edilen ifadeyi standart biçime dönüştür.

10. Bir arıcının, her birinde x tane arı kovanı bulunan 3 arılığı vardır. Her kovanda y tane çerçeve, her çerçevede ise y^3 tane arı bulunmaktadır.
a) Arıcının sahip olduğu toplam arı sayısını gösteren cebirsel ifadeyi yaz.
b) Elde edilen tekterimliyi standart biçime getir.
c) Tekterimlinin katsayısını ve değişken kısmını belirle.

Araştırma

1. Sayısal bir ifade olduğunda sabit terimleri ve değişkenleri tanımladık. Şu soruya cevap vermeye çalış: Geometride sabit terimler ve değişkenler ne olur?
Bir *ABC* üçgeni, bir *a* doğrusu ve bir *M* noktası ÇİZ. Çizdiğin şekiller sabit terimlerdir. Örneğin, *M* noktası sabit terimdir; çünkü düzlemde tam olarak belirlenmiştir. Bunları YAZ: *XyZ* üçgeni, c doğrusu, S noktası. Bu şekiller, düzlemde verilmeden değişken midir? Neden?
2. a) Eşkenar üçgenin çevre uzunluğunu hangi ifadeyle hesaplarız? Bu ifade monom mudur? Monomun katsayısı nedir, değişken kısmı nedir?
b) Ölçme ve geometride kullandığımız, örnekte verilenden daha yüksek dereceli monomlara örnekler ver. Bunlarla ne hesaplarız?

2. MONOMLARDA (TEK TERİMLİLERDE) TOPLAMA VE ÇIKARMA

Monomların Toplanması

Etkinlik

Öğrenciler bitki büyümesi üzerine bir deney yapmaktadır. Bir bitkinin ilk haftadaki büyümesi 3x, ikinci haftadaki büyümesi ise $5x$ ifadesiyle gösterilmektedir.
Bitkinin iki haftada toplam ne kadar büyüdüğünü gösteren ifadeyi yaz.

Hatırlayalım ki, benzer monomlar cebirsel toplamda katsayıları toplanarak sadeleştirilir, değişkenler ise aynı kalır. Örneğin,

$7x + 5x = (7 + 5)x = 12x.$

İki benzer monomun toplamı, katsayısı terimlerin katsayılarının toplamına eşit, değişken kısmı ise terimlerin değişken kısmıyla aynı olan bir monomdur.

Örnek 1

Benzer monomların toplamını bul: a) $5y^3$ ve y^3, b) $2x^4y$ ve $-2x^4y$,

a) $5y^3 + y^3 = (5 + 1)y^3 = 6y^3$ b) $2x^4y + (-2x^4y) = (2 + (-2))x^4y = 0 \cdot x^4y = 0$

Dikkat ediniz ki, birbirinin zıttı olan iki monomun toplamı sıfırdır.
Benzer monomların toplanmasında değişme (komütatif) ve birleşme (assosiatif) özellikleri geçerlidir. Bu nedenle monomları istediğimiz sırayla toplayabilir ve istediğimiz şekilde gruplayabiliriz. Bu aynı zamanda birkaç benzer monomun toplamından da söz edebileceğimiz anlamına gelir.

Örnek 2

Benzer monomların toplamını hesapla: a) $3x^3yz^4$, x^3yz^4 ve $7x^3yz^4$, b) $\frac{1}{2}ab$, $2\frac{1}{2}ab$ ve $7ab$.

a) $3x^3yz^4 + x^3yz^4 + 7x^3yz^4 = (3 + 1 + 7)x^3yz^4 = 11x^3yz^4$,

b) $\frac{1}{2}ab + 2\frac{1}{2}ab + 7ab = \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 7\right)ab = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{14}{2}\right)ab = 10ab$.

Alıştırma 1

Benzer monomların toplamını bulun: a) $2x^3$ ve $3x^3$, b) $3x^2y$ ve $-5x^2y$, c) $-xy^3z^4$, $7xy^3z^4$, ve $0{,}5\,xy^3z^4$.

Örnek 3

Bir kurşun kalemin fiyatı x^2 denardır, silginin fiyatı ise bunun iki katıdır. Marina 5 kurşun kalem ve 1 silgi satın almıştır.
a) Silgi ve kurşun kalemlerin toplam fiyatını gösteren cebirsel ifadeyi yaz.
b) Elde edilen ifadeyi sadeleştir.

a) 5 kurşun kalemin fiyatı $5x^2$, silginin fiyatı ise $2x^2$ olduğundan, toplam fiyatı gösteren ifade $5x^2 + 2x^2$ olur.
b) Elde edilen ifade iki benzer monomun toplamıdır. Bu nedenle: $5x^2 + 2x^2 = (5 + 2)x^2 = 7x^2$

Örnek 4

$5x^2$ ve $3y$ monomlarının toplamını bul.

$5x^2$ ve $3y$ benzer monomlar değildir. Bu nedenle toplamları cebirsel toplam olarak yazılır: $5x^2 + 3y$

Örnek 5

Monomların toplamını bul:

a) $5a^2b$, $-3ab^2$, $-a^2b^2$, $4ab$, $6a$ ve $2b$, b) $3a^2$, $5a^2b$, $-a^2b$, b, $-3b$ ve 4.

a) Verilen monomların toplamını cebirsel toplam olarak yazarız:

$5a^2b + (-3ab^2) + (-a^2b^2) + 4ab + 6a + 2b =$

$= 5a^2b - 3ab^2 - a^2b^2 + 4ab + 6a + 2b.$

b) $3a^2 + 5a^2b + (-a^2b) + b + (-3b) + 4 =$ İstenen toplamı cebirsel toplam olarak yazarız.

$= 3a^2 + \underline{5a^2b} - \underline{a^2b} + \underline{\underline{b}} - \underline{\underline{3b}} + 4 =$ Benzer monomları toplarız.

$= 3a^2 + 4a^2b - 2b + 4$

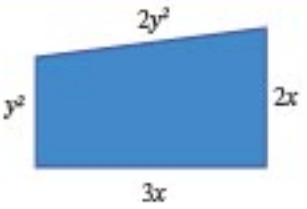
Alıştırma 2

Monomların toplamını bul:

a) a^2 ve $-3a$, b) $2a^2b$, ab^2, b, $-a^2b$ ve $-6ab^2$, c) $4x^3y^2$, $5x^2y$, xy, $-5x^2y$ ve $4x^3y^2$.

Alıştırma 3

Çizim 2'deki yamuğun çevresini bul.



çiz. 2

Monomların Çıkarılması

Etkinlik

Ana'nın boyu 3x ifadesiyle, babasının boyu ise $5x$ ifadesiyle verilmiştir. Babasının Ana'dan ne kadar uzun olduğunu gösteren ifadeyi yaz.

Örnek 6

$5a^2$ monomu ile a^2 monomunun farkını bul.

Verilen monomların benzer olduğuna dikkat edelim. Dağılma özelliğini uygulayarak elde ederiz:

$5a^2 - a^2 = (5 - 1)\,a^2 = 4a^2.$

İki benzer monomun farkı; katsayısı eksilen ve çıkan monomların katsayılarının farkına, değişken kısmı ise bu monomların değişken kısmına eşit olan bir monomdur.

Buna göre, iki benzer monomun farkı onlara benzer bir monomdur.

Örnek 7

Verilen monomların farkını bul: a) $-6x^3 - 2x^3$, b) $2x^2y - (-5x^2y)$.

a) $-6x^3 - 2x^3 = (-6 - 2)x^3 = -8x^3$, b) $2x^2y - (-5x^2y) = (2-(-5))x^2y = 7x^2y$.

Alıştırma 4

Verilen monomların farkını bul:
a) $-5x^2$ monomu ile $-5x^2$ monomu b) $2xy$ monomu ile $-2xy$ monomu

Örnek 8

$2x^3y$ monomu ile $5x^2$ monomunun farkını bul.

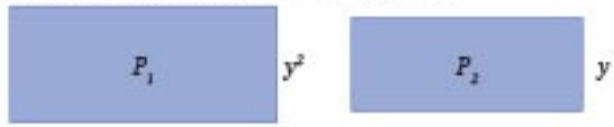
Verilen monomlar benzer değildir. İstenen fark, cebirsel toplam olarak yazılır:
$2x^3y + (-5x^2) = 2x^3y - 5x^2$.

Alıştırma 5

Aşağıda verilen monomların farkını bul:
a) $-4a^2b$ monomu ile $5ab$ monomu b) $2x^2y$ monomu ile $-2x^2y$ monomu

Örnek 9

Çizim 1'deki dikdörtgenlerin alanları arasındaki farkı bul.



çiz. 1

Verilen dikdörtgenlerin alanları $P_1 = 5xy^2$ ve $P_2 = 2xy \cdot y = 2xy^2$ dir. Alanları arasındaki fark:
$P_1 - P_2 = 5xy^2 - 2xy^2 = (5 - 2)xy^2 = 3xy^2$.

Örnek 10

Okulda ağaç dikme etkinliği düzenlenmiştir. Sekizinci sınıf öğrencileri farklı sıralara fidan dikmektedir. Ana birinci sıraya $3x$ fidan, ikinci sıraya ise $5x$ fidan dikmiştir. Boyan üçüncü sıraya $9x$ fidan dikmiş, ancak alanın yetersiz olması nedeniyle $2x$ fidanı sökmek zorunda kalmıştır.
a) Ana toplam kaç fidan dikmiştir?
b) Boyan'ın fidanları söktükten sonra kaç fidanı kalmıştır?
c) Sonuçta kim daha fazla fidan dikmiştir ve ne kadar fazla dikmiştir?

a) Ana $3x + 5x = 8x$ fidan dikmiştir.
b) Boyan $9x$ fidan dikmiş, ancak $2x$ fidan söktüğü için: $9x - 2x = 7x$ fidanı kalmıştır.
c) Aralarındaki fark: $8x - 7x = x$. Ana, Boyan'dan x kadar daha fazla fidan dikmiştir.

Alıştırma 6

Birinci gün Yana $2x^2$ lale dikmiştir. İkinci gün 5 lale daha fazla, üçüncü gün ise ikinci günden x^2 lale daha fazla dikmiştir.
a) Yana'nın diktiği toplam lale sayısını gösteren ifadeyi yaz.
b) a maddesinde elde edilen ifadeyi sadeleştir.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Verilen monomların toplamını bul:
   a) y^2 ve $3y^2$, b) $-x^2y$ ve $4x^2y$, c) $-5x^3$ ve $-5z^3$, d) $3abc$ ve $4a^2b^2c^2$.
2. Verilen monom toplamını belirle:
   a) $6xy^2$, xy^2 ve $3xy^2$, b) $5xy$, $-xy$, $-2xy$ ve $4xy$, c) $-3x^2$, $-2x^2$, x^2 ve $-x^2$, d) b^3, $2b^3$, $3b^3$ ve $4b^3$.
3. $-2x^3$ monomundan aşağıdaki monomları çıkar: a) $5x^3$, b) x^3, c) $-2x^3$, d) $-3x^3$.
4. $5x^2y^3$ monomundan aşağıdaki monomları çıkar: a) $3x^2y^3$, b) $7x^2y^3$, c) $-4x^2y^3$, d) $-x^2y^3$.
5. $-4a^2b$ ve $-3a^2b$ monomlarının toplamından $-5a^2b$ monomunu çıkar.
6. $-3xy^2$ ve $2xy^2$ monomlarının toplamından onların farkını çıkar.
7. Verilen ifadeleri sadeleştir:
   a) $8a^2 + 3a^2 + 4a^2 + 3$, b) $2x^2 - y^3 - 4x^2 + 3y^3 - 1$,
   c) $a - 4b^2 + 2a - b^2 + 1$, d) $4x^2 + 2y^2 - 3x^2 + y^2 - x^2 - 2$.
8. Verilen ifadeleri sadeleştir:
   a) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}x^2$, b) $\frac{3}{5}a+\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b$, c) $\frac{2}{3}x+5-\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$.
9. Birinci gün Oleg $2x^3$ metre koşmuştur. İkinci gün x^3 metre daha fazla, üçüncü gün ikinci günden $2x$ metre daha fazla, dördüncü gün ise birinci günden $2x$ metre daha fazla koşmuştur.
   a) Oleg'in dört günde koştuğu toplam metreyi gösteren ifadeyi yaz.
   b) a) maddesinde elde edilen ifadeyi sadeleştir.

3. POLİNOMLAR (ÇOKTERİMLİLER). POLİNOMUN DERECESİ

Polinom. Standart (Normal) Biçimde Polinom

Etkinlik

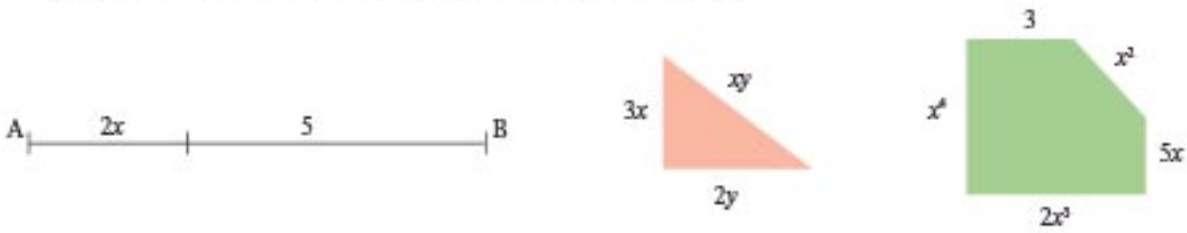
Aşağıdaki ifadeler kaç monomdan oluşmaktadır: a) $7a^2b + 4ab^2$, b) $4x^5 - 2x^3y + y^4$?

Örnek 1

Çizim 1'de verilen bilgilere göre aşağıdakiler için bir ifade yaz:

a) AB doğru parçasının uzunluğu, b) Üçgenin çevresi, c) Beşgenin çevresi.

Elde edilen ifadelerin her biri kaç monomdan oluşmaktadır?



çiz. 1

a) AB doğru parçasının uzunluğu $2x + 5$ ifadesiyle yazılır.
b) Üçgenin çevresi $3x + 2y + xy$ cebirsel toplamıdır.
c) Beşgenin çevresi $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$ ifadesiyle yazılır.
$2x + 5$ ifadesi iki monomun, $3x + 2y + xy$ ifadesi üç monomun, $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$ ifadesi ise beş monomun cebirsel toplamıdır.

- Sonlu sayıda monomun cebirsel toplamından oluşan ifadeye **polinom** denir.
- Polinomu oluşturan monomlara **polinomun terimleri** denir.

Örneğin $x^2 - xy + 1$, $2a + 3$, $y^3 - 2y^2 + y + 4$ ve $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$ ifadeleri birer polinomdur.
$a^7 - 2a^3 + a - 5$ polinomunun terimleri a^7, $-2a^3$, a ve -5 monomlarıdır.

Örnek 2

Aşağıdaki ifadelerden hangileri polinomdur?

$3x^6 - x + 5$, $\frac{3}{5b}$, $a + 1$, $\frac{x+2}{y}$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$, $\frac{1}{x} + 3$, $8a^2b$

Polinom olan ifadeler şunlardır: $3x^6 - x + 5$, $a + 1$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$ ve $8a^2b$.
$\frac{3}{5b}$, $\frac{x+2}{y}$ ve $\frac{1}{x} + 3$, ifadeleri polinom değildir; çünkü değişkene bölme içerirler.

Etkinlik

Aşağıdaki monomları standart (normal) biçime getir ve katsayılarını bul:

a) $5x^2y^3xy^2$, b) $-3a^3ab^24aab^2$.

Örnek 3

$2x^3 + 3xx^2 - 4$ polinomunu normal biçime getir.

Önce polinomdaki her monomun normal biçimde olup olmadığını kontrol etmeliyiz.
$3xx^2$ monomu normal biçimde değildir.

$2x^3 + 3xx^2 - 4 = 2x^3 + 3x^3 - 4$ yazarız.

Elde edilen polinom benzer monomlar içerir. Bunları toplayabiliriz:

$2x^3 + 3x^3 - 4 = 5x^3 - 4$

Daha fazla sadeleştirilemeyen bir polinom elde ettik. Buna göre normal biçime getirilmiş polinom $5x^3 - 4$ binomudur.

- Bir polinom benzer terimler içermiyorsa ve bütün terimleri normal biçimdeyse **normal biçimdedir**.
- Normal biçimdeki polinomu oluşturan monomların katsayılarına **polinomun katsayıları** denir.

$5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ polinomu normal biçimdedir. Katsayıları 5, 6, -2 ve 4'tür.

Alıştırma 1

Aşağıdaki polinomlardan hangileri normal biçimdedir?

a) $x^3 - (xy)^2 + 4$, b) $2xx^2 - 3x + x + 5$, c) $5xy + 6x + 1$, d) $3a + 4b + 5$?

Örnek 4

Verilen polinomları normal biçime getir:

a) $4xy + 5x - xy + x + 1$, b) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$.

c) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$

a) $4\underline{xy} + 5\underline{x} - \underline{xy} + \underline{x} + 1$ — Birbirine benzer monomların altını çizeriz.

$= (4 - 1)xy + (5 + 1)x + 1 =$ — Benzer monomları toplarız.

$= 3xy + 6x + 1$

b) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$

$= ab - \underline{b} + \underline{2a} + \underline{3b} + a + 4$

$= ab + 2b + 3a + 4$

c) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$

$= \underline{\underline{3x^3}} - \underline{7x} + \underline{6x} + \underline{\underline{x^2}} + \underline{\underline{x^3}} + \underline{x} + \underline{\underline{3x^2}}$

$= 4x^3 + 4x^2$

Alıştırma 2

Verilen polinomları normal biçime getir:

a) $5xy + 6x - 3xy + 1$, b) $2a + 5b - 3 - b + 3a + 6b + 4$, c) $x^3 - (3x)^2 + x - 8$,

d) $3xx^3 - 2x + 7x + x^2y^2 + 1$, e) $xy + 3xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y^2$.

Etkinlik

Verilen polinomlar kaç terimlidir? a) $xy^3 + 2xy$, b) $3b + 4$, c) $x^3 + 2x + 1$?

İki terimli polinoma iki terimli polinom ya da **binom** denir.

Tanıma göre her monom bir polinomdur. Her sabit sayı bir monom olduğundan, sabit sayıların da polinom olduğu sonucuna varabiliriz.
Verilen bir polinomu normal biçime getirdikten sonra, terim sayısına göre polinomun monom, binom ya da çok terimli polinom olduğunu ayırt ederiz.

Örnek 5

$5xx^2 - 3x + x, \frac{x}{5} - \frac{x}{5}, 5a^2b^2 + 2a^2b^2, 2x - 5x + 4x, -4x^3 + 7$ ve $7x^2y$ polinomlarından hangileri:
a) monomdur, b) binomdur?

$-4x^3 + 7$ ve $7x^2y$ polinomları normal biçimdedir.
$5xx^2 - 3x + x, \frac{x}{5} - \frac{x}{5}, 5a^2b^2 + 2a^2b^2, 2x - 5x + 4x$ polinomlarını da normal biçimde yazalım:

$5xx^2 - 3x + x = 5x^3 - 3x + x = 5x^3 - 2x$,

$\frac{x}{5} - \frac{x}{5} = 0 \cdot x = 0$,

$5a^2b^2 + 2a^2b^2 = 7a^2b^2$,

$2x - 5x + 4x = x$

a) $0, x, 7a^2b^2$ ve $7x^2y$ polinomları monomdur.
b) $5x^3 - 2x$ ve $-4x^3 + 7$ polinomları binomdur.

Alıştırma 3

$-6xy + 5xy, 2xx + 5, x^4 + 2xx^3 + x^2 + 5xx$ ve $x^2 + 3x^2$ polinomlarından hangileri:
a) monomdur, b) binomdur?

Polinomun Derecesi

Monomlarda olduğu gibi, polinomlar için de polinomun derecesi tanımlanabilir.

Örnek 6

Polinomların derecesini bul: a) $5x^2y + 6xy + 1$, b) $3xy^2 + 2xy^2 - (3xy) + 2xyx^2y^2$.

Bir polinomun derecesini bulabilmek için önce polinomun normal biçime getirilmiş olması gerekir.
a) Bu durumda polinom zaten normal biçimdedir.
$5x^2y$ monomunun derecesi $2 + 1 = 3$'tür. Bu, polinomdaki monomlar arasında en büyük derecedir. Bu nedenle $5x^2y + 6xy + 1$ polinomunun derecesi 3'tür.
b) Önce polinomu normal biçime getirelim:
$3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2xyx^2y^2 = 3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2x^3y^3 = 5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$.Polinomdaki üç monom arasında $2x^3y^3$ monomu en yüksek dereceye sahiptir.
Derecesi $3 + 3 = 6$'dır.
Sonuç olarak, $5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$ polinomunun derecesi 6'dır.

Normal biçimdeki bir **polinomun derecesi**, polinomu oluşturan monomların dereceleri arasındaki en büyük derecedir.

Alıştırma 4

Aşağıdaki polinomun derecesini bul:

a) $2xy + x + 3$, b) $a + 5b + 4$, c) $x^3 - x^2 + 5x - 8$,

d) $xx^2 - x^3 + 7x + xy$, e) $xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y$, f) $2x^2y^3 + xy^2z - 3xy^2z + xxyy^2$.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. $2x^3 - 8$, $3x + 7x + 1$, $4xy^2 - xy + x^2y - xy$, $2y^2 - yy$, $ab - 3a + 4b + 5ab$, $9x + x$, $2(xy)^2 + 3x^2y^2$

İfadelerden hangileri: a) monomdur, b) binomdur?

2. $\frac{5}{6}a^2$, $\frac{2}{5}a$, $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{4}{9}a^3$ ve $-\frac{3}{4}a$ monomları kullanarak her birinden üçer tane yaz:

a) derecesi 3 olan binomlar, b) derecesi 2 olan polinomlar, c) derecesi 3 olan polinomlar.

3. Polinomların derecesini bul:

a) $x + 5$, b) $ab + 1$, c) $x^3 + x - 1$, d) $xy^3 + x + xy$, e) $x^5y - y^5 + x^2y^2$,

f) $ab - 3a^2b + aab + 4ab$, g) $2x^2 + y^3 + xy^2z - 3$, h) 23.

4. Aşağıdaki derecelere sahip bir polinom yaz: a) 7, b) 2, c) 1.

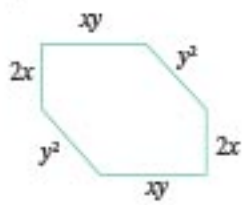
5. Polinomları normal biçimde yaz:

a) $a + 5b - 7 - a + 2a + 6b + 4$, b) $xy + 5x - 4xy + 2$, c) $2x^3 - 3x^2 + xxx - x^2$,

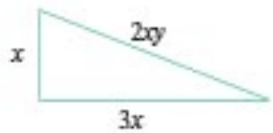
d) $3x^3 - 2x + 7x^2 + x^3 + 5x + 2x^2 + 1$, e) $xyx + 3xy^2 + 4xxy - 3xyy + 2xy$.

6. Şeklin çevresi için bir ifade yaz ve normal biçime getir (Çizim 2):

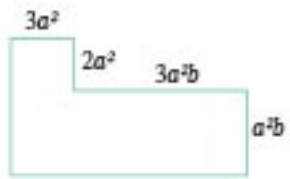
a)



b)



c)



d)

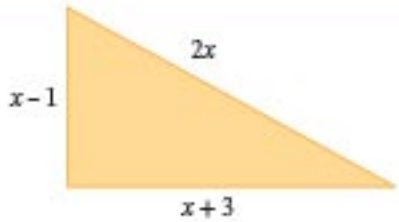


çiz. 2

4. POLİNOMLARDA (ÇOK TERİMLİLERDE) TOPLAMA VE ÇIKARMA

Etkinlik

Çizim 1'deki üçgenin çevresi için bir ifade yaz ve sadeleştir.



çiz. 1

Örnek 1

Aşağıdakilerin toplamını bul:
a) $2x^2$ monomu ile $2x^3 + 3x^2 + x + 4$ polinomu,
b) $3x^2 + x^2y + x + 4$ ve $5x^2y + 3xy + 2$ polinomları.

a) $2x^2 + (2x^3 + 3x^2 + x + 4)$ — Parantezleri kaldırırız.
$= 2x^2 + 2x^3 + 3x^2 + x + 4$ — Benzer monomları toplarız.
$= 2x^3 + 5x^2 + x + 4$ — Polinomun terimlerini derecelerine göre sıralarız.

b) $(3x^2 + x^2y + x + 4) + (5x^2y + 3xy + 2)$
$= 3x^2 + x^2y + x + 4 + 5x^2y + 3xy + 2$
$= 3x^2 + \underline{x^2y} + x + \underline{\underline{4}} + \underline{5x^2y} + 3xy + \underline{\underline{2}}$
$= 3x^2 + 6x^2y + x + 3xy + 6$

Polinomlarda toplama işlemi yapılırken birinci polinoma diğer polinomun terimleri sırasıyla eklenir; ardından elde edilen ifadede benzer terimler (monomlar) toplanarak ifade sadeleştirilir.

Alıştırma 1

Polinomların toplamını bul:
a) $4x^2 - 5x + 3$ ve $5x^2 - x + 1$,
b) $3x^3 + 5x^2 + 2x + 4$ ve $x^3 - 3x^2 + x$,
c) $4x^2 + 5x^2y + y + 2$ ve $5x^2y + 3y + 5$,
d) $x^2y + 2x^3y + xy + 4x$ ve $5x^2y + 3x - 2xy$.

Alıştırma 2

Bir tarla $(x^2 + 2xy)$ kg buğday, diğer tarla ise $(3x^2 - xy + 4y)$ kg buğday vermektedir.
a) Toplam hasadı gösteren ifadeyi oluştur.
b) Elde edilen polinomu normal biçime getir.

Örnek 2

$x^3 - 3x^2 + 1$ polinomundan $2x^2$ monomunu çıkar.

$(x^3 - 3x^2 + 1) - 2x^2$	Parantezleri kaldırırız.
$= x^3 - 3x^2 + 1 - 2x^2$	Benzer monomları birleştiririz.
$= x^3 - 5x^2 + 1$	Polinomun terimlerini derecelerine göre sıralarız.

Örnek 3

$2x^3 + x^2 + 2x + 1$ polinomundan $x^3 - 3x^2 + 3x$ polinomunu çıkar.

$(2x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x)$	Parantezleri kaldırırız. Parantezin önündeki eksi (−)
$= 2x^3 + x^2 + 2x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x$	işareti, polinomdaki bütün terimlerin işaretlerini
$= \underline{2x^3} + \underline{x^2} + \underline{2x} + 1 - \underline{x^3} + \underline{3x^2} - \underline{3x}$	tersine çevirir. Benzer monomları birleştiririz.
$= x^3 + 4x^2 - x + 1$	Polinomun terimlerini derecelerine göre sıralarız.

Polinomlar, eksilen polinoma, çıkan polinomun terimleri ters işaretleriyle sırayla eklenerek çıkarılır. Daha sonra elde edilen polinomdaki benzer monomlar birleştirilir.

Çözülen örneklerden, verilen polinomların önce parantez içine yazıldığını, daha sonra parantezlerin kaldırıldığını fark edebilirsin. Polinomların toplanması ve çıkarılması kurallarına göre, parantezleri kaldırırken aşağıdaki kurallar uygulanır:

- **Parantezin önünde artı (+) işareti varsa**, parantez kaldırılır ve parantez içindeki terimlerin işaretleri değişmez.
- **Parantezin önünde eksi (−) işareti varsa**, parantez ve eksi işareti kaldırılır; parantez içindeki bütün terimlerin işaretleri tersine çevrilir.

Alıştırma 3

$x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ polinomundan aşağıdakileri çıkar:
a) $5x^3$ monomu, b) $-3x^2 + 2$ binomu, c) $2x^3 + x^2 + x + 1$ polinomu.

Alıştırma 4

Farkları hesapla:
a) $(3x^2 + 2xy - 8y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$, b) $(6x^2 - 5xy + 4y^2) - (2x^2 - 3y^2)$.

Örnek 4

Biyoloji laboratuvarında öğrenciler, iki farklı bitki türünün gübre miktarına bağlı olarak büyüme miktarını araştırmaktadır. Birinci bitkinin büyüme miktarı $2x^2 + 3x + 4$, ikinci bitkinin büyüme miktarı ise $x^2 + 5x + 2$ polinomu ile ifade edilmektedir.
Birkaç gün sonra araştırmacılar, her bitkinin büyüme miktarı $2x$ birim artıran ek bir gübre uygularlar.
a) Gübre eklendikten sonra her bitkinin yeni büyüme miktarı ne olur?
b) Gübre eklendikten sonra iki bitkinin toplam büyüme miktarı ne olur?
c) Gübre eklendikten sonra birinci bitkinin büyüme miktarı, ikinci bitkinin büyüme miktarından ne kadar fazladır?

a) Birinci bitkinin yeni büyüme miktarı:
$(2x^2+3x+4)+2x=2x^2+\underline{3x}+4+\underline{2x}=2x^2+\ 5x+4.$
İkinci bitkinin yeni büyüme miktarı:
$(x^2+5x+2)+2x=x^2+\underline{5x}+2+\underline{2x}=x^2+7x+2\,.$

b) Toplam büyüme miktarı, iki polinomun toplanmasıyla elde edilir:
$(2x^2+5x+4)+(x^2+7x+2)=\underline{2x^2}+\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{\underline{4}}}+\underline{x^2}+\underline{\underline{7x}}+\underline{\underline{\underline{2}}}=3x^2+12x+6.$

c) Büyüme miktarlarını karşılaştırmak için polinomlar çıkarılır:
$(2x^2+5x+4)-(x^2+7x+2)=\underline{2x^2}+\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{\underline{4}}}-\underline{x^2}-\underline{\underline{7x}}-\underline{\underline{\underline{2}}}=x^2-2x+2\,.$
Birinci bitkinin büyüme miktarı, ikinci bitkinin büyüme miktarından $x^2 - 2x + 2$ kadar fazladır.

Alıştırma 5

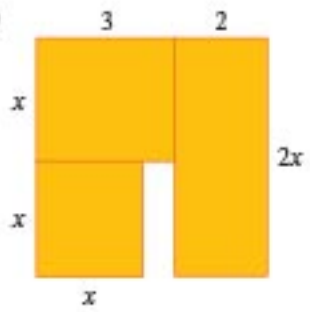
Öğrenciler okul bahçesinde çiçek tarhları hazırlamaktadır. Birinci tarhı Mariya'nın grubu, ikinci tarhı ise Petar'ın grubu düzenlemektedir.
Birinci tarha dikilen çiçek sayısı $2x^2 + 3x + 5$ polinomu ile, ikinci tarha dikilen çiçek sayısı ise $x^2 + 4x + 2$ polinomu ile verilmiştir (x, tarhın uzunluğunu göstermektedir).
a) İki grup birlikte toplam kaç çiçek dikmiştir?
b) Birinci tarhta ikinci tarha göre kaç çiçek daha fazladır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Polinomları topla:
   a) $-2x^2 + 3x - 5$ ve $3x^2 + 4x + 2$, b) $7x^3 + 2x + 6$ ve $3x^3 + 5x^2 - 5$, c) $x^2 + x - 1$ ve $3x^3 + 2x^2 - 3$.
2. Toplamı bul: $(x^4 + 4x^2y - 5xy - 2x + 7) + (2y^3 - 4x^2y + 3xy + y - 6)$.
3. Farkı belirle: $(2x^2 + 3xy - 5y - 2x + 4) - (2y^3 - 4xy + 2y - 3)$.
4. $9x^3 + 10x^2 - 5x + 7$ polinomu ile $x + 2$ ve $x^3 + 9$ binomlarının farkını topla.
5. P polinomunu hesapla:
   a) $5a^2 + 2a - 3 + P = 9 - 6a + 2a^2$, b) $5b^2 + b + 15 - P = 15 + 3b + 7b^2$.

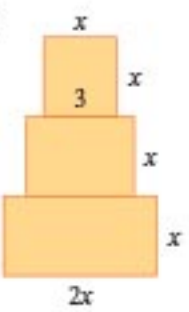
6. Çizim 2 ve Çizim 3'teki şeklin alanını ifade eden polinomu normal biçimde yaz.

a)



çiz. 2

b)



çiz. 3

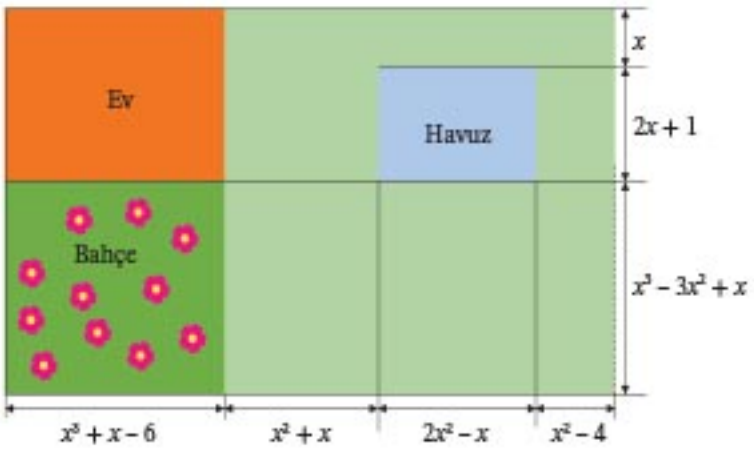
7. Bir otomobil yarışı sırasında, x saniye sonra birinci otomobil $20x^2 + x + 50$ metre, ikinci otomobil $15x^2 + x + 30$ metre, üçüncü otomobil ise $10x^2 + x + 20$ metre yol almıştır. Aşağıdaki otomobiller arasındaki uzaklık kaç metredir?

a) birinci ve ikinci otomobil, b) ikinci ve üçüncü otomobil,

c) birinci ve üçüncü otomobil?

8. Çizim 4'te ev, bahçe ve havuz bulunan bir avlu gösterilmiştir. Aşağıdakilerin çevresini ifade eden polinomu normal biçimde yaz:

a) havuzun, b) evin, c) tüm avlunun.



çiz. 4

Araştırma

$A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2 - 4$ ve $C = -2x^3 + 4$ polinomları verilmiştir.

a) A, B, C, $A + B$, $A + C$ polinomlarının derecesini bul. Ne fark ediyorsun?

b) Örneğe göre, toplanan polinomların dereceleri ile toplam polinomunun derecesi arasında nasıl bir ilişki vardır?

c) Toplanan polinomların dereceleri ile toplam polinomunun derecesi arasındaki ilişki için genel bir sonuç çıkar.

5. POLİNOMLARDA ÇARPMA

Monomların Çarpılması

Etkinlik

1. $x^3 \cdot x \cdot x^2$ çarpımını hesapla.
2. Marko bir laboratuvarda çalışmaktadır. Kimyasal çözelti içeren şişelerden oluşan bir paket hazırlaması gerekmektedir. Her şişede $2x^2y$ ifadesiyle verilen miktarda çözelti bulunacaktır. Paket aşağıdaki sayıda şişe içeriyorsa, Marko'nun hazırlaması gereken toplam çözelti miktarı nedir?
   a) 16 şişe, b) x şişe.

Örnek 1

$-4x^2y^3$ ve $5x^3yz$ monomlarının çarpımını bulun.

Çarpmanın değişme ve birleşme özelliklerini kullanarak elde ederiz:
$-4x^2y^3 \cdot 5x^3yz = (-4 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x^3) \cdot (y^3 \cdot y) \cdot z = -20x^5y^4z$
$-20x^5y^4z$ monomu, $-4x^2y^3$ ve $5x^3yz$ monomlarının çarpımıdır.

İki monomun çarpımı; katsayısı çarpanların katsayılarının çarpımına, değişken kısmı ise çarpanların değişken kısımlarının çarpımına eşit olan bir monomdur.

Monomların çarpılmasında değişme ve birleşme özellikleri geçerlidir. Bu nedenle birden fazla monomun çarpımından da söz edilebilir.

Örnek 2

Monomların çarpımını hesapla: a) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4$, b) $-a^2bc \cdot 5ab^3c$, c) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2$.

a) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4 = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot a^2 \cdot a^4 = \frac{2}{3}a^6$,
b) $-a^2bc \cdot 5ab^3c = -1 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^3 \cdot c \cdot c = -5a^3b^4c^2$,
c) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2 = 2 \cdot (-5) \cdot 1 \cdot x \cdot x^3 \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z^2 = -10x^4y^2z^3$.

Alıştırma 1

Monomların çarpımını hesapla:
a) $3x^2 \cdot 4x^4$, b) $-2a^3b \cdot (-ab^2c)$, c) $6x^2y \cdot (-4xyz) \cdot \frac{1}{3}y^2z$.

Örnek 3

Bir fizikçi, bir makinenin ürettiği enerjiyi hesaplamaktadır. Enerji, kuvvete ve yola bağlıdır. Bunlar şu cebirsel ifadelerle verilmiştir: $F = 3/2x^2y^3$ ve $s = 4/3x^3y$.
$E = F \cdot s$ formülü geçerli olduğuna göre, makinenin ürettiği toplam enerji E kaçtır?

Makinenin ürettiği toplam enerji E için verilen formüle göre işlem yaparız.

$E = F \cdot s = \frac{3}{2}x^2y^3 \cdot \frac{4}{3}x^3y = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^2y^3 \cdot x^3y = 2x^5y^4.$

Buna göre makine, $2x^5y^4$ monomu ile ifade edilen enerji üretir.

Alıştırma 2

Mirsad, $3xy$ saat boyunca saatte $12x^2y$ kilometre sabit hızla gitmiştir. Hız v, zaman t ve yol s için $s = v \cdot t$ formülü geçerli olduğuna göre, aldığı yolu bul.

Polinomun Monomla Çarpılması

Etkinlik

Çarpmanın toplama ve çıkarma üzerine dağılma özelliği yardımıyla ifadeleri sadeleştir:
a) $2 \cdot (3x + 4)$, b) $(3x + 4) \cdot 2$.

Örnek 4

Çarpma işlemini yap:
a) $-3x \cdot (2x + 1)$, b) $(2a + b - 1) \cdot (-a^2)$, c) $4x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3)$, d) $(5x - 3y^3) \cdot x^3y^2$.

a) $-3x \cdot (2x + 1)$ — Monomu polinomun her terimiyle çarparız.
$= -3x \cdot 2x + (-3x) \cdot 1$ — Elde edilen çarpımları toplarız.
$= -6x^2 - 3x$, — Polinomu normal biçime getiririz.

b) $(2a + b - 1) \cdot (-a^2) = 2a \cdot (-a^2) + b \cdot (-a^2) - 1 \cdot (-a^2) = -2a^3 - a^2b + a^2$,

c) $4x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3) = 4x^3 \cdot x^2 + 4x^3 \cdot 2x + 4x^3 \cdot 3 = 4x^5 + 8x^4 + 12x^3$,

d) $(5x - 3y^3) \cdot x^3y^2 = 5x \cdot x^3y^2 - 3y^3 \cdot x^3y^2 = 5x^4y^2 - 3x^3y^5$.

Bir polinom, bir monomla çarpılırken polinomun her terimi monomla çarpılır ve elde edilen çarpımlar toplanır.

Alıştırma 3

Çarpma işlemini yap:
a) $(3x + 2y) \cdot 5$, b) $3a \cdot (a + 1)$, c) $(2x^2 + x - 4) \cdot 3x$, d) $x^2y \cdot (xy + 2x - 4y^2)$.

Örnek 5

Bir tekstil fabrikasında, makinenin normal koşullarda ürettiği kumaşın uzunluğu $x^3 + 2x^2 - x$ ifadesiyle hesaplanır. Ortam sıcaklığı arttığında makine $\frac{3}{2}x^2$ kat daha fazla kumaş üretir. Makine, artan sıcaklıkta toplam ne kadar kumaş üretecektir?

Kumaşın toplam uzunluğu, polinom ile monomun çarpılmasıyla elde edilir.

$$(x^3+2x^2-x)\cdot\frac{3}{2}x^2 = x^3\cdot\frac{3}{2}x^2+2x^2\cdot\frac{3}{2}x^2+(-x)\cdot\frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5+3x^4-\frac{3}{2}x^3$$

Artan sıcaklıkta makine toplam $\frac{3}{2}x^5+3x^4-\frac{3}{2}x^3$ uzunluğunda kumaş üretecektir.

Alıştırma 4

Bahçıvan, okul bahçesine farklı türlerde bitkiler dikmek istemektedir. Bir ağacın fiyatı $4x^2y + 3xy^2 - 5$ denar, bir çalının fiyatı $2x^2y - xy^2 + 4$ denar ve bir çiçeğin fiyatı $5xy^2 - 3x^2y + 2$ denardır. Bahçıvan 3 ağaç, 4 çalı ve 5 çiçek satın almıştır.

a) Her bitki türünün toplam fiyatını gösteren ifadeyi yaz.
b) Tüm bitkilerin toplam fiyatını gösteren ifadeyi yaz.
c) b) maddesindeki polinomu normal biçimde yaz.
d) Her monomun derecesini ve polinomun derecesini belirle.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Monomların çarpımını bul:
   a) $5x^3 \cdot 2x^4$, b) $-\frac{1}{4}a^2b \cdot (-2a^3b^2)$, c) $9xy^2 \cdot (-2x^3yz^2) \cdot \frac{1}{6}yz$.
2. Çarpma işlemini yap:
   a) $4 \cdot (5x - y)$, b) $-7 \cdot (2x - 3y)$, c) $(x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \cdot 2x$, d) $-xy^2 \cdot (5x^2 + 2xy - 4y^2)$.
3. $-3a^2b^3$ ve $2a^2b^3$ monomlarının toplamını $-4ab$ monomuyla çarp.
4. $-xy^2$ ve $3xy^2$ monomlarının farkını, toplamlarıyla çarp.
5. Dikdörtgenin alanını ifade eden monomu normal biçimde yaz (Çizim 1):

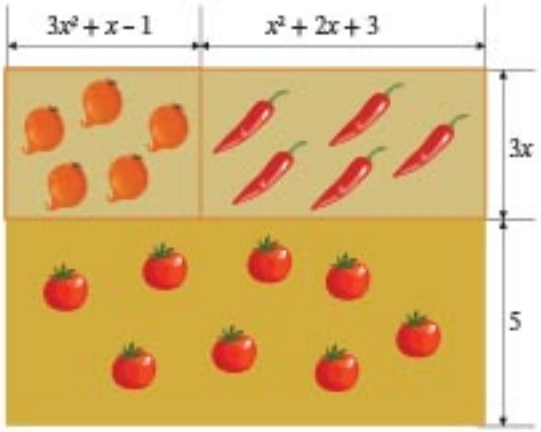


çiz. 1

6. Mia'nın $4(x^2 + x + 1)$ kitabı vardır. Lina'nın $5(2x^2 + 3)$ kitabı vardır. Mia ve Lina'nın toplam kaç kitabı vardır?
7. İgor, Sara ve Nina posta pulu toplamaktadır. İgor'un $4x(x - 4)$ posta pulu vardır. Sara'nın $2x(8 - x)$ posta pulu, Nina'nın ise $8(7 + 2x)$ posta pulu vardır. Çocukların toplam kaç posta pulu vardır?

8. Mara nine bahçesine domates, biber ve soğan dikmiştir. Çizim 2'deki ölçü ifadelerine göre, aşağıdakilerin alanını ifade eden polinomu normal biçimde yaz:

a) soğan ekili bölümün,
b) domates ekili bölümün,
c) biber ekili bölümün,
d) tüm bahçenin.



çiz. 2

Araştırma

$A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2$ ve $C = -2x^3 + 4$ polinomları verilmiştir.

a) A, B, C, $A \cdot B$ ve $B \cdot C$ polinomlarının derecesini bul. Ne fark ettin?

b) Örneğe göre, çarpan polinomların dereceleri ile çarpım polinomunun derecesi arasında nasıl bir ilişki vardır?

c) Çarpan polinomların dereceleri ile çarpım polinomunun derecesi arasındaki ilişki için genel bir sonuç çıkar.

6. POLİNOMUN MONOMA BÖLÜNMESİ

Monomların Bölünmesi

Etkinlik

$x^7 : x^3$ üslerini böl.

Örnek 1

$12x^5y^4z^2$ monomunu $4x^2yz$ monomuna böl.

Bölme işlemi $12x^5y^4z^2 : 4x^2yz$ şeklinde yazılır. Bölünenin her çarpanı bölenin karşılık gelen çarpanına bölünür ve elde edilen sonuçlar çarpılarak bölüm bulunur.

$$12x^5y^4z^2 : 4x^2yz = (12 : 4) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^4 : y) \cdot (z^2 : z) = 3x^3y^3z.$$

Monom, monoma bölünürken bölünenin katsayısı bölenin katsayısına bölünür; bölünenin değişken kısmındaki değişkenlerin üsleri, bölenin değişken kısmındaki karşılık gelen değişkenlerin üslerine bölünür. Daha sonra elde edilen bölümler çarpım olarak yazılır.

Örnek 2

Monomların bölümünü hesapla: a) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4$, b) $-20a^3bc^2 : 4abc$, c) $-14x^3y^3 : (-7x^2y)$.

a) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4 = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) \cdot (a^7 : a^4) = (\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}) \cdot (a^7 : a^4) = \frac{5}{6}a^3$,

b) $-20a^3bc^2 : 4abc = (-20 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b : b) \cdot (c^2 : c) = -5a^2c$,

c) $-14x^3y^3 : (-7x^2y) = (-14 : (-7)) \cdot (x^3 : x^2) \cdot (y^3 : y) = 2xy^2$.

Örnek 3

$8a^2 : 4ax = \frac{8a^2}{4ax} = \frac{2a}{x}$ monom değildir; çünkü değişkene bölme vardır. Bu, bir monomun monoma bölümünün monom olmayan bir ifade de olabileceği anlamına gelir.

Alıştırma 1

Monomların bölümünü hesapla:

a) $\frac{2}{9}a^5b^3 : \frac{1}{6}a^2b$, b) $-18a^4b^3c^2 : 6a^2b^2c$, c) $-9x^2y : (-15x^2y)$.

Örnek 4

Bir mühendis, kütlenin hacme bölünmesiyle elde edilen bir malzemenin yoğunluğunu incelemektedir. Malzemenin kütlesi ve hacmi $m = \frac{9}{4}x^3y^3$ ve $V = \frac{3}{2}x^2y$ formülleriyle verilmiştir. $\rho = \frac{m}{V}$ formülü geçerli olduğuna göre, malzemenin yoğunluğu ρ kaçtır?

$\frac{9}{4}x^3y^3$ monomunu $\frac{3}{2}x^2y$ monomuna bölersek, şunu elde ederiz:

$\rho = \frac{9}{4}x^3y^3 : \frac{3}{2}x^2y = (\frac{9}{4} : \frac{3}{2}) \cdot (x^3y^3 : x^2y) = (\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}) \cdot (x^3 : x^2) \cdot (y^3 : y) = \frac{3}{2}x^3y^2$.

Malzemenin yoğunluğu $\rho = 3/2x^3y^2$ olur.

Polinomun Monoma Bölünmesi

Etkinlik

Bölmenin toplama ve çıkarma üzerine sağdan dağılma özelliğini kullanarak $(6x + 4) : 2$ ifadesini sadeleştir.

Örnek 5

Bölme işlemini yap:

a) $(18x + 12y) : 6$,
b) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3)$,
c) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$,
d) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y$.

Bölmenin toplama ve çıkarma üzerine sağdan dağılma özelliğini uygulayarak elde ederiz:

a) $(18x + 12y) : 6$ — Polinomun her terimini monoma böleriz.
$= 18x : 6 + 12y : 6$ — Elde edilen bölümleri toplarız.
$= 3x + 2y$, — Polinomu normal biçime getiririz.

b) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3) = 3x^5 : (-x^3) + x^4 : (-x^3) - 4x^3 : (-x^3) = -3x^2 - x + 4$,

c) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$
$= -9a^3b^2 : (-3a^2b^2) - 6a^2b^3 : (-3a^2b^2) + 15a^3b^3 : (-3a^2b^2)$
$= 3a + 2b - 5ab$

d) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y = 8x^3y : 2x^3y + 6x^2y : 2x^3y = 4 + \frac{3}{x}$.

Elde ettiğimiz ifadede $\frac{3}{x}$ terimi bir monom değildir. Bu nedenle, bir polinomun monoma bölümü, polinom olmayan bir ifade de olabilir.

Bir polinom, monoma bölünürken polinomun her terimi verilen monoma bölünür ve elde edilen bölümler toplanır.

Alıştırma 2

Bölme işlemini yap:

a) $(14x + 21) : 7$,
b) $(27x^3y^4 - 36x^2y^3) : 9xy^3$,
c) $(4x^6 - x^4 + x^2) : (-2x^2)$,
d) $(10x^3y^3 - 5x^2y^2 + 9x^3y^2) : (-15x^2y^2)$.

Örnek 6

Bir çiftçi, sulama yapılacak alanı eşit parçalara ayırmaktadır. Tüm alan için gerekli toplam su miktarı $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$ polinomu ile ifade edilmektedir.
Su, alanın her bir parçasına eşit olarak dağıtılacaktır. Her bir parça ise $\frac{3}{2}x^2y$ monomu ile temsil edilmektedir. Her bir parçaya ne kadar su düşecektir?

$\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$ polinomunu $\frac{3}{2}x^2y$ monomuna böleriz.

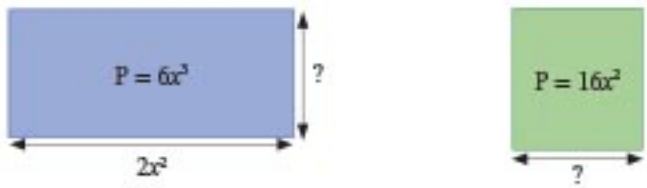
$(\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y) : \frac{3}{2}x^2y = \frac{9}{2}x^5y^3 : \frac{3}{2}x^2y + 3x^4y^2 : \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{4}x^3y : \frac{3}{2}x^2y$

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{5-2}y^{3-1} + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{4-2}y^{2-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} x^{3-2}y^{1-1} = 3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x$.

Buna göre, alanın her bir parçası $3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x$ polinomu ile ifade edilen miktarda su alacaktır.

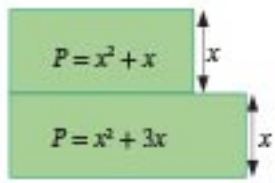
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Monomların bölümünü hesapla:
   a) $-8x^4y^3 : (-20x^2y)$, b) $\frac{3}{5}a^5b : \frac{3}{10}a^3b$, c) $\frac{3}{7}a^4b^3c^2 : (-\frac{5}{14}abc)$.
2. Bölme işlemini yap:
   a) $(32a - 24b) : (-8)$, b) $(9x^2y + 12x^4y^2) : 3x^3y$,
   c) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : x^3$, d) $(14a^4 - 7a^3 + 24a^2) : (-21a^2)$.
3. $6a^4b^3$ ve $9a^4b^3$ monomlarının toplamını $-5ab^2$ monomuna böl.
4. $8xy^2$ ve $6xy^2$ monomlarının farkını, toplamlarına böl.
5. Çizim 1'deki:
   a) dikdörtgenin, b) karenin kenarını ifade eden monomu normal biçimde yaz.

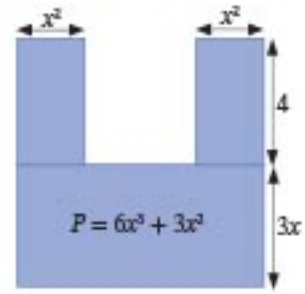


çiz. 1

6. Çizim 2 ve Çizim 3'teki şekillerin her birinin çevresini ifade eden polinomu normal biçimde yaz.



çiz. 2



çiz. 3

7. TAM RASYONEL İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ

Etkinlik

İfadeleri sadeleştir. a) $2c(a + 1)$ b) $3a(b - c) - 5$
Sadeleştirdikten sonra elde ettiğin ifadelerin neyi ifade ettiğini söyle.

Sabitler ve değişkenlerin; toplama, çıkarma, çarpma ve üssü negatif olmayan tam sayı olan kuvvet alma işlemleriyle oluşturulduğu ifadelere **tam rasyonel ifadeler** denir.

Tanıma göre tam rasyonel ifadelerde **değişkene bölme işlemi bulunmaz.**
Tam rasyonel bir ifade sadeleştirildiğinde (belirtilen işlemler yapılıp parantezler açıldığında) bir polinoma dönüşür. Buna göre **her polinom** aynı zamanda bir **tam rasyonel ifadedir.**

Örneğin $-3x^2 + 2x + 5$, $(a+1)(a-2)+4$, $\frac{3c^2-2}{6}$, ifadeler tam rasyonel ifadelerdir:
Polinomlarda (ve monomlarda) olduğu gibi, tam rasyonel ifadelerde de sabitlerin rasyonel sayılar, değişkenlerin ise rasyonel sayılar kümesinden değerler aldığı kabul edilir.
Bu nedenle tam rasyonel ifadelerin sadeleştirilmesinde, rasyonel sayılarda olduğu gibi işlem önceliği kuralları ve parantezleri açma kuralları uygulanır.
Bundan sonra "ifade" sözcüğüyle "tam rasyonel ifade" kastedilecektir.

Örnek 1

Verilen ifadeyi sadeleştir: $-(4ab + 6a - 7b) + (-ab - 2a + 3b) - (-ab + 2a + 3b)$.

$-(4ab + 6a - 7b) + (-ab - 2a + 3b) - (-ab + 2a + 3b)$	Parantezleri aç.
$= -4ab - 6a + 7b - ab - 2a + 3b + ab - 2a - 3b$	Benzer monomları birleştir.
$= \underline{-4ab} - \underline{\underline{6a}} + \underline{\underline{7b}} - \underline{ab} - \underline{\underline{2a}} + \underline{\underline{3b}} + \underline{ab} - \underline{\underline{2a}} - \underline{\underline{3b}}$	Elde edilen polinomun terimlerini
$= -4ab - 10a + 7b.$	uygun sıraya diz.

Alıştırma 1

Verilen ifadeyi sadeleştir:
a) $10x - 6y + (3x - 5y) - (-4y - 2x)$,
b) $-(-a^2b + 3ab^2) - (7a^2 - ab^2 + 2b + 2a^2b)$.

Örnek 2

Verilen ifadeyi sadeleştir: $-5y(x^3 - y) - x^3(2 - y)$.

$-5y(x^3 - y) - x^3(2 - y)$	Parantezleri dağılma özelliğini kullanarak aç.
$= -5yx^3 + 5y^2 - 2x^3 + x^3y$	
$= \underline{-5yx^3} + 5y^2 - 2x^3 + \underline{x^3y}$	Benzer monomları birleştir.
$= -4yx^3 + 5y^2 - 2x^3.$	

Alıştırma 2

Verilen ifadeyi sadeleştir:
a) $9y - 2(3x + 5y) + 4x - xy$,
b) $(x^2 - 0{,}4x^2y) \cdot 5x - 0{,}5y \cdot (y^2 - 6x^2y)$.

Örnek 3

Verilen ifadeyi sadeleştir:
$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$.

$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$
$= 2a + 3a^2 - 3a - 4a^2 + 5b^2$
$= \underline{2a} + \underline{\underline{3a^2}} - \underline{3a} - \underline{\underline{4a^2}} + 5b^2$
$= -a^2 - a + 5b^2$

Alıştırma 3

Verilen ifadeyi sadeleştir:
a) $(4x^2y + x^2y^2 + 6xy^2) : 2 + x(xy - y^2)$, b) $(3a^2 + 6a - 9b) : 3 + (-28b) : (-4) + 2a$.

Örnek 4

Verilen ifadeyi sadeleştir:
$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\}$

$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\}$	Küçük parantezleri çarpma işlemiyle açıyoruz.
$= 8a - \{8ab + 6b^2 - [\, 2a - 15ab - 3a^2\,] - 4b^2\}$	Orta parantezleri açıyoruz.
$= 8a - \{8ab + 6b^2 - 2a + 15ab + 3a^2 - 4b^2\}$	Büyük parantezleri açıyoruz.
$= 8a - 8ab - 6b^2 + 2a - 15ab - 3a^2 + 4b^2$	Benzer monomları gruplandırıyoruz.
$= \underline{8a} - \underline{\underline{8ab}} - \underline{\underline{6b^2}} + \underline{2a} - \underline{\underline{15ab}} - 3a^2 + \underline{\underline{4b^2}}$	Polinomu sadeleştiriyoruz.
$= -3a^2 + 10a - 23ab - 2b^2$	

Alıştırma 4

Verilen ifadeyi sadeleştir:
a) $-\{9x - [\, 4y \cdot (6 - x) - x \cdot (2 + 3y)\,] + (x - 3) \cdot 8y\}$, b) $0{,}2xy - \{0{,}3y^2 + [0{,}5y + 0{,}2y \cdot (3x - 5y)]\}$.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Verilen ifadeleri sadeleştir:
   a) $a + b - 3 - a + 2a + 5b + 4$, b) $(3x^2 - 8) - (7x + 2) - (-x^2 - 6) - 2x + 5$.
2. Polinomlar verilmiştir. $A = x^2 - 3x + 1$, $B = 5x^2 + 2x - 3$ ve $C = 4x^2 + 3x$.
   Polinomları bul: a) $A + B + C$, b) $C - A$, c) $B - A - C$, d) $A - B$.
3. Verilen ifadeleri sadeleştir: a) $4a\,(a + b - 2)$, b) $-3a^2\,(5 - b) - 4b\,(2a^2 - 1) - 3(b - a^2)$.
4. Verilen ifadeleri sadeleştir:
   a) $2x^2 + x\,(4x - 1)$, b) $2x^3\,(3x^2 - 1) - 4x(x^2 + 1)$,
   c) $5xy^2 + 3y(x + xy - y) - 4xy$, d) $2x(x - y^2) + 7y + 4(x^2 + y) - 3xy$.

5. Verilen ifadeleri sadeleştir:
a) $5x^2 + (9x^4 - 6x^3 + 3x^2) : (-3) + 2x^3$, b) $(y^2 - 4y) \cdot (-y) + 8y^3 : (-2)$.

6. Verilen ifadeleri sadeleştir:
a) $2x^2 + x(x^2 - 3x + 1) + (5x^3 + 4x^2) : (-2) + 5$, b) $x(x + 3) + 2(x^2 + 2x + 1) - (x - 1) \cdot x$.

7. Verilen ifadeleri sadeleştir:
a) $3x(4x^2y - xy + 1) - x(xy + 2)$, b) $(3y^2 - 6x^2y + 12xy) : 3 + y(4x - 2y)$,
c) $2x(x^2y - 2xy + 1) + 2y \cdot (3x^3 - 5y) - x^2y$.

8. Verilen ifadeleri sadeleştir:
a) $6x^2 + 3x(5x - 2)$, b) $2x(3x^2 - 1) - 4(x + 1)$,
c) $6xy^2 + 5y(x + xy - 2y) - 7xy$, d) $2x(3x - y) + 9y + 7(x^2 + y) - 5xy$,
e) $-3x(x^2 - 2y + 1) - 5y(-x + 4)$, f) $2x(x + 5y) + y(5x - 7y) - x^2(x - 3)$,
g) $2a(b - 4) - b(2a - 3) + ab(5a - 1)$.

9. Verilen ifadeleri sadeleştir:
a) $\{x^2 - [4x - x \cdot (2x + 3)] + (3x - 2) \cdot x\}$, b) $0{,}3y^2 - \{0{,}5xy^2 + [0{,}8y + (3x - 4) \cdot 0{,}5y^2]\}$.

8. TAM RASYONEL İFADELERDE VE FORMÜLLERDE DEĞİŞKENLERİN YERİNE TAM SAYI DEĞERLERİNİN YAZILMASI

Etkinlik

Kenar uzunlukları $a = 3$ cm ve $b = 2$ cm olan bir dikdörtgenin çevresini, $L = 2(a + b)$ formülünü kullanarak nasıl hesaplayacağını açıkla.

Tam rasyonel bir ifadede bulunan değişkenlerin yerine sayılar yazıldığında, ifade sayısal bir ifadeye dönüşür ve bu ifadenin değeri hesaplanabilir.

Örnek 1

$2x + 5$, ıa $x = 3$ ifadesinin sayısal değerini hesapla.

$2x + 5$
$= 2 \cdot 3 + 5$ — x değişkeninin yerine verilen 3 değeri yazılır.
$= 11$ — Elde edilen sayısal ifadenin değeri hesaplanır.

Örnek 2

$x = 3$ ve $y = -4$ için $2x^2 + 3y - 1$ ifadesinin sayısal değerini hesapla.

x ve y değişkenlerinin yerine sırasıyla verilen değerleri yazıyoruz.

$2x^2 + 3y - 1 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-4) - 1 = 18 - 12 - 1 = 5.$

$x = 3$ ve $y = -4$ için ifadenin sayısal değeri 5'tir.

Örnek 3

Eğer $x = -1, y = 3$ ve $z = -2$ ise, ifadenin değerini hesapla:

a) $3x^4 + y^2 + 5z^3$, b) $4(5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$.

a) $3x^4 + y^2 + 5z^3$

$= 3 \cdot (-1)^4 + 3^2 + 5 \cdot (-2)^3$

$= 3 + 9 - 40$

$= -28$

b) $4 \cdot (5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$

$= 4 \cdot (5 \cdot (-1)^3 - \frac{3^2}{3} - (-2))$

$= 4 \cdot (-5 - 3 + 2)$

$= 4 \cdot (-6)$

$= -24$

Kodu tara ve ödevleri çöz.

Alıştırma 1

Eğer $x = 2, y = -3, z = 4$ ise, ifadenin değerini hesapla:

a) $4x^2 + y^3 - 3z$, b) $5x - 2y - 3z$, c) $x^4 : (-2x^2) - y^3 + 2z^2$, d) $\frac{3x^2 + 2y}{6} - \frac{z^2}{8}$.

Hatırlayalım, **formül (bağıntı)**, birkaç değişken arasındaki ilişkiyi ifade eden ve bunlardan birini hesaplamamızı sağlayan gösterimdir.
Formülde yerine koyma, formüldeki değişkenlerin yerine, değişkenler için verilen değerlerin yazılması işlemidir.

Örnek 4

Tabanı $a = 3$ cm, eş kenarları $b = 5$ cm olan ikizkenar üçgenin çevresi L'yi, $L = a + 2b$ formülünü kullanarak hesapla.

$L = a + 2b$

$L = 3 + 2 \cdot 5$ Formülde, kenarlar için verilen değerleri yerine yazıyoruz.

$L = 13$ cm Elde edilen sayısal ifadenin sayısal değerini hesaplıyoruz.

Alıştırma 2

Bir otomobilin aldığı yol, s = v · t formülü ile hesaplanır. Burada v hızdır (km/h), t ise süredir (saat). Aşağıdaki durumlarda otomobil ne kadar yol alır?
a) $v = 60$ km/h ve $t = 2$ h, b) $v = 80$ km/h ve $t = 3$ h?

Örnek 5

Çevresi $L = 46$ cm olan bir dikdörtgende, $b = 5$ cm ise, a kenarının değerini bul.

Dikdörtgenin çevre formülü $L = 2(a + b)$'de bilinen $L = 46$ cm ve $b = 5$ cm değerlerini yerine yazıyor ve bir bilinmeyenli denklemi çözüyoruz:

$46 = 2(a + 5)$
$23 = a + 5$
$a = 18$ cm

Örnek 6

$v = u + at$ formülünde, $v = 35$, $a = -2$ ve $t = 14$ ise, u değerini hesapla.

Formülde değişkenlerin yerine verilen değerleri yazdığımızda
$v = u + at$
$35 = u + (-2) \cdot 14$
$35 = u - 28$
$u = 35 + 28$
$u = 63$ elde ederiz.

Bazı durumlarda, verilen bir formülde yerine koyma yaptığımızda çözmemiz gereken bir denklem elde ettiğimizi görüyoruz.

Alıştırma 3

$y = 5x - 2$ formülü verilmiştir. Aşağıdaki durumlarda x değerini bul:
a) $y = 18$, b) $y = 33$, c) $y = 0$.

Örnek 7

Bir grubun sinema bileti ücreti $C = 120a + 80b + 20c$ formülü ile hesaplanır.
Burada a yetişkin sayısı, b çocuk sayısı ve c özel indirimli kişi sayısıdır.
a) Grupta 10 yetişkin, 4 çocuk ve 2 özel indirimli kişi varsa, biletlerin ücretini hesapla.
b) Eğer grubun biletler için 1580 dinarı varsa ve içeriye 4 çocuk ile 3 özel indirimli kişi girecekse, kaç yetişkin bileti satın alınabilir?

a) Formülde değişkenlerin yerine verilen değerleri yazdığımızda

$C = 120a + 80b + 20c = 120 \cdot 10 + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 1560$ denar elde ederiz.

b) Formülde ücretin ve kişi sayısının yerine verilen değerleri yazdığımızda,

$C = 120a + 80b + 20c$ denklemi elde ederiz

$120a + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 1580$

$120a + 320 + 60 = 1580$

$120a = 1580 - 380$

$120a = 1200$

$a = 10$

10 yetişkin bileti satın alınabilecektir.

Alıştırma 4

Kiro usta, daire boyama ücreti için $C = 100x + 80y + 250$ formülüne göre ücret alır. Burada x boyanması gereken alan, y kullanması gereken boya miktarıdır (kilogram cinsinden) ve 250 dinar onun geliş masrafıdır.

a) Alanı 85 m² olan bir dairenin boyanması için 5 kg boya gerekiyorsa, ödenmesi gereken ücreti hesapla.

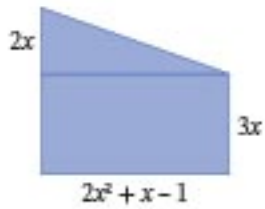
b) Boyan, alanı 40 m² olan kendi dairesi için ustaya 6740 dinar ödemiştir. Usta, Boyan'ın dairesi için kaç kilogram boya harcamıştır?

Alıştırma 5

Çizim 1 ve Çizim 2'deki biçimlerin her biri için alan formülünü yaz, sadeleştir, ardından $x = 3$ cm ise alanı hesapla.



çiz. 1



çiz. 2

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Eğer $x = -6$ ise, verilen ifadelerinin değerini hesapla: a) $2x^2 + 5$, b) $-3(x^2 - 4)$.
2. Eğer $x = -2, y = 4$ ise, verilen ifadelerinin değerini hesapla: a) $x^3 - y + 5$, b) $2x^2 - y^2 + 3$.
3. Eğer $x = 4, y = 1, z = -2$ ise, verilen ifadelerinin değerini hesapla: a) $x^2 - 5y + z^4$, b) $4(x + y) - z^2$.
4. Eğer $x = 3, y = -1, z = 2$ ise, verilen ifadelerinin değerini hesapla:
   a) $4(2x^2 - y^2) + 2(z^3 + 1)$, b) $3(x^3 + 2) - 2yz$.
5. Eğer $x = -3$ ve $y = 2$ ise, verilen ifadelerinin değerini hesapla:
   a) $4(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$, b) $2(xy^2 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

6. Eğer $a = -2$ ve $b = 4$ ise, verilen ifadelerinin değerini hesapla:

a) $-(ab-3)+2a-(-4a^3+2b-5)$, b) $2b-(3ab-9)-(-2a^2+b^2-1)$.

7. $v = u + at$ formülünden $u = -5$, $a = 3$ ve $v = 4$ ise, t değerini hesapla.

8. $y = -2x + 7$ formülünden x değerini bul: a) $y = 3$, b) $y = -3$.

9. $z = xy + 2$ formülünden y değerini bul: a) $z = 26$ ve $x = 3$, b) $z = -40$ ve $x = 6$.

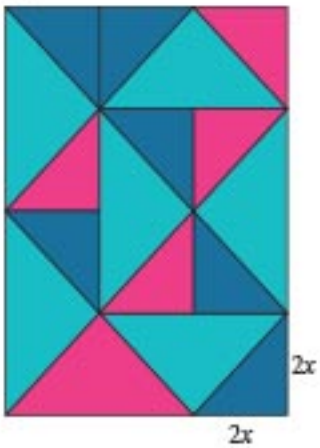
10. Bir smoothienin toplam kütlesi M'nin dekagram cinsinden formülü $M = 2x^2y + 3xy + 4z$'dir. Burada x muz sayısı, y elma sayısı ve z portakal sayısıdır.

a) 3 muz, 2 elma ve 5 portakaldan yapılan smoothienin kütlesi M'yi hesapla.

b) Yovana, 2 muz ve 5 portakal koyarsa ve toplam 62 dekagram smoothie elde etmek isterse, kaç elma koymalıdır?

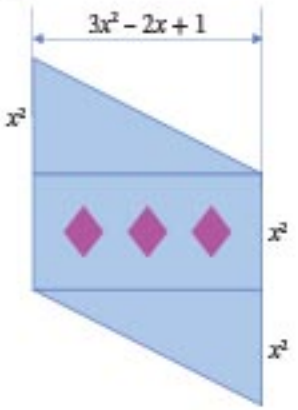
11. Halının alan formülünü yaz, sadeleştir, ardından $x = 2$ dm ise alanı hesapla. (Çizim 3 ve Çizim 4)

a)



çiz. 3

b)



çiz. 4

Araştırma

$4x^2$ ifadesi verilmiştir.

a) $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ için ifadenin değerini hesapla.

b) Tabloyu defterine geçir ve doldur:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
İfadenin değeri							

c) x'in hangi değeri için ifade en küçük değere sahiptir?

d) Tablonun hangi bölümünde değerler azalır, hangi bölümünde artar?

e) $x = -3$ ve $x = 3$, $x = -2$ ve $x = 2$, $x = -1$ ve $x = 1$ için değerleri fark et.
Elde edilen sayılarda herhangi bir "simetri" var mı? Kendi sözlerinle açıkla.

f) İfadenin değerinin nasıl değiştiğini açıkla;
- x, -3'ten 0'a kadar arttığında,
- x, 0'dan 3'e kadar arttığında, artıyor mu, azalıyor mu?

9. DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEMLER KURMA VE ÇÖZME

Doğrusal Denklem

Etkinlik

Denklemleri incele: $3x-7=2$, $-\frac{1}{3}a+2=0$ ve $2(y-1)=4$.

a) Her bir denklemde kaç bilinmeyen vardır?
b) Değişken kaçıncı derecedendir?
c) Denklemin katsayıları nasıl sayılardır?

- a, b rasyonel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax+b=c$ biçimindeki denkleme bir bilinmeyenli doğrusal denklem denir.
- Bir bilinmeyenli lineer denklemin **çözümü**, denklemi doğru bir sayısal eşitliğe dönüştüren her rasyonel sayıdır.

Bir bilinmeyenli doğrusal denklem biçimine indirgenebilen her denklemi, bir bilinmeyenli doğrusal denklem olarak kabul edeceğiz.
Bunun yanında, bir bilinmeyenli doğrusal denklem yerine doğrusal denklem ya da sadece denklem diyeceğiz.
Örneğin, $2x-4=7$, $-3(z+1)=z+1$, $-\frac{1}{3}x-4=3x$ vb. denklemler lineer denklemlerdir.
Denklem çözme işleminde, değişkenler ve sabit terimler için sembollerin kullanıldığı bir model uygulayacağız. Semboller; renklerine ve şekillerine göre aşağıdaki tabloda verilen değere sahip olan dikdörtgenler ve karelerdir.

Sembol				
Değer	x	$-x$	1	-1

Denklemi, = işaretinin aynı tarafında bulunan sembolleri toplayarak oluşturuyoruz.

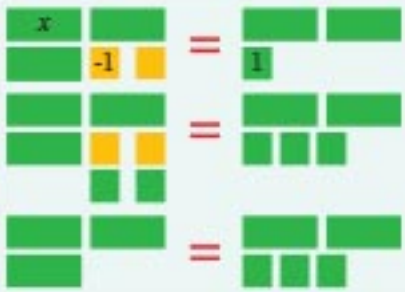
Örnek 1

Çizim 1'deki modele göre denklemi kur ve çöz.



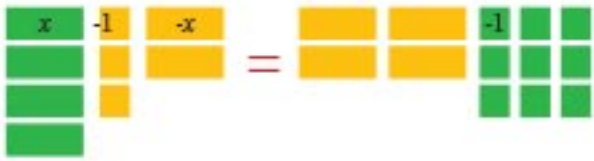
çiz. 1

Modele göre denklemin her iki tarafını da uygun sembolleri toplayarak yazıyoruz.

	/+  Her iki tarafa iki yeşil kare ekleyerek sol taraftaki sarı kareleri yok ediyoruz.	$3x-2=2x+1$ $3x-2=2x+1\ /+2$ $3x-2+2=2x+1+2$ $3x=2x+3$
	/+  Her iki tarafa iki sarı dikdörtgen ekleyerek sağ taraftaki yeşil dikdörtgenleri yok ediyoruz.	$3x=2x+3\ /-2x$ $3x-2x=2x+3-2x$
	x için çözümü elde ediyoruz.	$x=3$

Alıştırma 1

Çizim 2'deki modele göre denklemi kur ve çöz.



çiz. 2

Doğrusal Denklemlerin Cebirsel Yöntemle Çözümü

Verilen modele göre denklem çözme işleminden, denklem çözmeye ilişkin aşağıdaki kuralları mutlaka fark etmişsindir:

- Verilen bir denklemin sol ve sağ tarafına aynı sayı veya aynı ifade eklenir ya da çıkarılırsa, verilen denklemle aynı çözüme sahip bir denklem elde edilir.
- Denklemin sol ve sağ tarafı 0'dan farklı aynı bir sayıyla çarpılır ya da bölünürse, verilen denklemle aynı çözüme sahip bir denklem elde edilir.

Bu özelliklerin, toplama işleminin değişme ve birleşme özellikleri ile çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliklerinin uygulanmasıyla doğrusal denklemlerin çözümü için **cebirsel bir yöntem** elde edilir.

Kodu tara ve denklemleri çöz.

Örnek 2

Denklemleri çöz: a) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$, b) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1$, c) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2$.

a) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ Denklemin her iki tarafını EKOK(3, 6) = 6 ile çarpıyoruz,

$2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}/\cdot 6$ paydalardan kurtulmak için.

$12x+1=4/-1$ Bir tarafta yalnızca x'li terimin kalması için denklemin her iki tarafından 1 çıkarıyoruz.

$12x=3/:12$ Çözümü elde etmek için her iki tarafı 12'ye bölüyoruz.

$x=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Çözümün Kontrol Edilmesi (Kontrol) $2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

b) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1/\cdot 18$ Denklemin her iki tarafını EKOK(2, 9) = 18 ile çarpıyoruz.

$18\cdot\frac{x}{2}-18\cdot\frac{2x}{9}=18\cdot 1$

$9x-4x=18$ Benzer terimleri birleştiriyoruz.

$5x=18/:5$ Her iki tarafı 5'e bölüyoruz.

$x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$

Kontrol: $\frac{3\frac{3}{5}}{2}-\frac{2\cdot 3\frac{3}{5}}{9}=1$.

c) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2/\cdot 12$ Denklemin her iki tarafını EKOK(4, 6) = 12 ile çarpıyoruz.

$\frac{3x}{4}\cdot 12+1\cdot 12=\frac{5x}{6}\cdot 12-2\cdot 12$

$3\cdot 3x+12=2\cdot 5x-24$

$9x+12=10x-24/-10x$ Sağ taraftaki x'li terimi yok etmek için denklemin her iki tarafından 10x çıkarıyoruz.

$-x+12=-24/-12$

$-x=-36/:(-1)$

$x=36$

Kontrol: $\frac{3\cdot 36}{4}+1=\frac{5\cdot 36}{6}-2$.

Alıştırma 2

Denklemleri çöz: a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$, b) $\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{8x}{5}+1\frac{1}{4}$.

Örnek 3

Denklemleri çöz: a) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$, b) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$.

a) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$ Parantezlerden kurtuluyoruz.

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20}$ EKOK(5, 2, 4, 20) = 20

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20} / \cdot 20$

$4x-30=-35+3x / -3x$

$x-30=-35 / +30$

$x=-5$

Kontrol: $\frac{-5}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3(-5)}{20}$.

b) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$

$1{,}2x+4{,}5=-2{,}4x+4{,}5 / -4{,}5$

$1{,}2x=-2{,}4x / +2{,}4x$

$3{,}6x=0 / : 3{,}6$

$x=0$

Kontrol:

$1{,}2 \cdot 0+4{,}5=-3 \cdot (0{,}8 \cdot 0-1{,}5)$.

Alıştırma 3

Denklemi çöz: a) $\frac{x}{2}-(0{,}15+\frac{x}{3})=0{,}25$, b) $2{,}3x-3(0{,}7x+0{,}5)=-4{,}5$.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çizim 3'teki modele göre denklemi kur ve çöz.



çiz. 3

2. alıştırmadan 9. alıştırmaya kadar olan denklemleri çöz.

2. a) $2x-\frac{x}{2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$, b) $x-\frac{2}{3}=\frac{x}{6}+\frac{1}{2}$, c) $\frac{3x-1}{9}=\frac{1}{6}+6$.

3. a) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{2}=x-\frac{1}{10}$, b) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-5=2$, c) $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{x}{4}-\frac{x}{8}$.

4. a) $\frac{2x}{3}-3{,}5=\frac{x}{6}+\frac{2}{3}$, b) $0{,}4(x-1)+0{,}6-\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$, c) $x-\frac{1}{3}(x+2)-0{,}5=-\frac{x}{6}+5$.

5. a) $\frac{x-1}{4}=-\frac{x}{3}$, b) $\frac{2x}{3}+1=2x+\frac{1}{3}$.

6. a) $0{,}8x-2{,}4=0{,}6(x+1)$, b) $2{,}5(3x+1)=0{,}5(2x+3)$.

7. a) $\frac{x-4}{3}+\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$, b) $\frac{x+1}{5}+\frac{x}{10}=\frac{x}{2}+\frac{1}{5}$, c) $\frac{2x}{3}-9=\frac{4x}{9}-7$, d) $\frac{3x-1}{10}=\frac{x+1}{2}$.

8. a) $\frac{5}{18}(x-1)+\frac{1}{4}=-\frac{x}{2}$, b) $4(x-\frac{1}{4})-3(\frac{1}{3}+x)=2x-7$.

9. a) $\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}-1{,}5x-\frac{3}{8}=\frac{11}{12}$, b) $\frac{4}{3}-0{,}75 \cdot (2x-5)=\frac{5}{6}x$.

Araştırma

Öğrenciler Ana, Boris ve Erdal rasyonel katsayılı doğrusal denklemler çözmüşlerdir. Her biri çözümde farklı bir yerde hata yapmıştır. Hataları bul ve denklemleri doğru çöz.

Ana	Boris	Erdal
$\frac{1}{2}x+5=\frac{3}{4}x+2$	$\frac{2}{3}(x-3)=\frac{1}{2}x+1$	$\frac{3}{4}x-2=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x=2-5$	$\frac{2}{3}x-3=\frac{1}{2}x+1$	$12\cdot\frac{3}{4}x-2=12\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}x=-3$	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x=1+3$	$9x-2=4x+\frac{1}{2}$
$x=-12$	$\frac{1}{6}x=4$	$9x-4x=\frac{1}{2}+2$
	$x=24$	$5x=\frac{5}{2}$
		$x=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

10. BİR BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI

Verilen Sözel Bir Problem İçin Denklem Kurma ve Çözme

Doğrusal denklemler; bilinmeyenlerin, verilen terim veya sayılarla ilişkilendirilmesi yoluyla sözel problemlerin çözülmesini sağlar.

Etkinlik

Bir sayı, başka bir sayıdan 7 fazladır. İki sayının toplamı 31'dir.

a) Küçük sayı kaçtır?

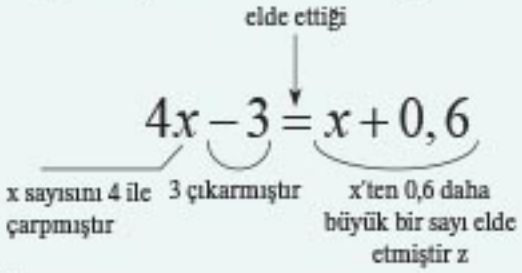
b) İki sayı arasındaki fark kaçtır?

c) Sayıların toplamından 7 sayısı çıkarılırsa ne elde edilir? Cevabını gerekçelendir.

Örnek 1

Eva bir sayı tutmuştur. Bu sayıyı 4 ile çarpmış, ardından 3 çıkarmış ve böylece tuttuğu sayıdan 0,6 daha büyük bir sayı elde etmiştir. Eva'nın tuttuğu sayı kaçtır?

Eva'nın tuttuğu sayıyı x ile gösterelim.
Problemin koşullarına göre doğrusal denklemi kuruyoruz:



Denklemi çözüyoruz:

$4x - 3 = x + 0,6$

$4x - 3 = x + 0,6 \;/\; -x$

$3x - 3 = 0,6 \;/\; +3$

$3x = 3,6 \;/\; :3$

$x = 1,2$

Kontrol: $4 \cdot 1,2 - 3 = 1,2 + 0,6.$

Eva 1,2 sayısını tutmuştur.

Alıştırma 1

Kalemin fiyatı, silginin fiyatının $\frac{2}{5}$'idir.
Kalem ve silgi birlikte 40 dinardır.
Silgi kaç denardır, kalem kaç denardır?

Kodu tara ve ifadeleri kur.

Örnek 2

Üç günlük gezinin birinci gününde Nina, yanında getirdiği paranın $\frac{1}{4}$'ünü harcamıştır. İkinci gün 200 denar harcamış, böylece üçüncü gün için başlangıçtaki miktarın $\frac{2}{3}$'ü kalmıştır. Nina geziye kaç para götürmüştür?

Nina'nın geziye götürdüğü miktarı x ile gösterelim.
Problemin koşullarına göre:

- birinci gün $\frac{1}{4}x$ denar harcamıştır
- ikinci gün 200 denar harcamıştır
- üçüncü gün $\frac{2}{3}x$ denar kalmıştır.

Bunların toplamı Nina'nın yanında götürdüğü başlangıç miktarıdır, bu yüzden denklemi çözüyoruz:

$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x$

$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x \;/\; \cdot 12$

$3x + 2400 + 8x = 12x$
$11x + 2400 = 12x \,/ -12x$
$11x - 12x + 2400 = 12x - 12x$
$-x + 2400 = 0 \,/ -2400$
$-x + 2400 - 2400 = 0 - 2400$
$-x = -2400 \,/ \cdot (-1)$
$x = 2400$ Kontrol: $\frac{1}{4} \cdot 2400 + 200 + \frac{2}{3} \cdot 2400 = 2400$

Nina geziye 2400 dinar götürmüştür.

Alıştırma 2

Darya, defterler için sahip olduğu paranın $\frac{3}{7}$'sini, kalemler için paranın $\frac{5}{14}$'ünü ve resim defteri için 150 denar harcamıştır. Darya'nın kaç parası vardı?

Örnek 3

Alma ve Nela alışverişe eşit miktarda para ile çıkmışlardır. Alma 400 denar harcayıp Nela'ya 400 denar ödünç verdikten sonra, Alma'nın kalan parasının $\frac{3}{4}$'ü, Nela'nın son durumdaki parasının $\frac{1}{2}$'sine eşit olmuştur. Buna göre başlangıçta her birinin kaç parası vardı?

Kızların her birinin başlangıçta sahip olduğu miktarı x ile gösterelim.
Harcanan 400 ve ödünç verilen 400 denardan sonra:
Alma'nın $x - 800$ denarı vardı.
Nela'nın $x + 400$ denarı vardı.
O anda, problemin koşuluna göre, her birinin sahip olduğu para için şu denklem geçerlidir:

$\frac{3}{4} \cdot (x - 800) = \frac{1}{2} \cdot (x + 400).$

Elde edilen denklemi çözüyoruz:

$\frac{3}{4}(x - 800) = \frac{1}{2}(x + 400) \,/ \cdot 4$
$3(x - 800) = 2(x + 400)$
$3x - 2400 = 2x + 800$
$3x - 2x = 2400 + 800$
$x = 3200$ Kontrol: $\frac{3}{4} \cdot (3200 - 800) = \frac{1}{2} \cdot (3200 + 400)$

Alma ve Nela alışverişe çıktıklarında her birinin 3200 dinarı vardı.

Alıştırma 3

Viktor ve Martin'in başlangıçta eşit miktarda parası vardı. Viktor, Martin'e 600 denar verdikten sonra, Viktor'un kalan parasının $\frac{2}{3}$'üne, Martin'in son durumdaki parasının $\frac{1}{2}$'sine eşit olmuştur. Buna göre başlangıçta her birinin kaç parası vardı?

Verilen Bir Denkleme Uygun Sözel Problem Kurma

Örnek 4

Verilen denkleme uygun bir sözel problem kur: a) $2x + 35 = 49$, b) $x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x$.
Denklemi çöz ve çözümü kurduğun problemin bağlamında açıkla.

Verilen bir denkleme uygun birden fazla sözel problem kurulabilir.

a) Verilen denkleme uygun sözel problem şu şekilde olabilir:
Tea, kız kardeşinin yaşının iki katı yaşındadır ve 49 yaşında olan annesinden 35 yaş küçüktür. Tea'nın kız kardeşi kaç yaşındadır?

Problemin koşuluna göre tam olarak verilen $2x + 35 = 49$ denklemine ulaşıyoruz.
Denklemi çözüyoruz:

$2x + 35 = 49$
$2x = 49 - 35$
$2x = 14$
$x = 7$ Kontrol: $2 \cdot 7 + 35 = 49$

Gerçekten bir çocuğun yaşını ifade edebilecek bir sayı elde ettik. Bu, problemi doğru kurduğumuz anlamına gelir.

b) Verilen denklemde, bilinmeyen x'in bir bütün olduğunu ve bu bütünden $\frac{1}{5}x$, $\frac{1}{3}x$ ve 110 sayısı çıkarıldıktan sonra başlangıçtaki bütünün $\frac{1}{10}$'unun kaldığını görüyoruz.
x sayısının bir miktar para olduğunu varsayabilir ve aşağıdaki sözel problemi kurabiliriz:

Dime, yanında bulunan paranın $\frac{1}{5}$'ini defterlere, $\frac{1}{3}$'ünü kalemlere ve 110 dinarını keçeli kalemlere harcamış, geriye parasının 1/10'u kalmıştır. Dime'nin kaç parası vardı?

Problemin koşuluna göre tam olarak verilen denkleme ulaşıyoruz

$$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x.$$

Denklemi çözüyoruz:

$$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x \;/\cdot 30$$
$30x - 6x - 10x - 3300 = 3x$
$11x = 3300$
$x = 300$ Kontrol: $300-\frac{1}{5}\cdot 300-\frac{1}{3}\cdot 300-110=\frac{1}{10}\cdot 300$

Gerçekten bir para miktarını ifade edebilecek bir sonuç elde ettik. Bu da uygun bir problem kurduğumuz anlamına gelir.

Alıştırma 4

$x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x-60=\frac{2}{5}x$ denklemine uygun bir sözel problem kur.
Denklemi çöz ve bulduğun çözümü kurduğun problemin bağlamına göre yorumla.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. x sayısının yarısının, üçte birinin ve dörtte birinin toplamı, sayının kendisinden 2 fazladır. x sayısını bul.

2. Goçe ve Mile bahçede çalışmışlardır. Goçe, Mile'nin çalıştığı sürenin $\frac{3}{4}$'ü kadar çalışmıştır. Toplam 7 saat çalıştılarsa, her biri kaçar saat çalışmıştır?

3. 8-A sınıfında, 8-B sınıfından bir öğrenci fazla vardır. Bir gün 8-A'da öğrencilerin $\frac{1}{5}$'i, 8-B'de ise öğrencilerin $\frac{1}{6}$'sı yoktur ve o gün iki sınıfta da eşit sayıda öğrenci vardır. 8-B'de kaç öğrenci öğrenim görmektedir?

4. Bir okulda öğrencilerin $\frac{7}{8}$'i İngilizce, kalanları ise Almanca öğrenmektedir. İngilizce öğrenenler, Almanca öğrenenlerden 420 öğrenci fazladır. Okulda toplam kaç öğrenci vardır?

5. 8-A sınıfındaki her öğrenci tam olarak bir kulübe üyedir. Öğrencilerin $\frac{1}{6}$'sı biyoloji kulübüne, $\frac{2}{5}$'i edebiyat kulübüne, 3 öğrenci ise matematik kulübüne üyedir. 8-A sınıfında kaç öğrenci vardır?

6. α açısının dörtte biri ile α'dan 60° büyük olan açının üçte birinin toplamı 62°'dir. α açısını bul.

7. α açısının üçte biri, α'dan üç kat büyük olan açıdan 44° küçüktür. α açısını bul.

8. Lena ve Petar'ın yaşları toplamı 117'dir. Lena'nın yaşı, Petar'ın yaşının $\frac{4}{5}$'idir. Petar kaç yaşındadır?

9. Oğlun yaşı, annenin yaşının dörtte biridir; kızın yaşı ise oğlun yaşının yarısıdır. Anne ve kızın yaşları toplamı 54'tür. İki çocuk kaç yaşındadır?

10. Bir gösterinin yapılması için spor salonuna bazı sınıflardan sandalyeler taşınmıştır. Taşınan sandalyelerin $\frac{1}{5}$'i kimya sınıfından, $\frac{1}{6}$'sı fizik sınıfından, $\frac{2}{15}$'i tarih sınıfından ve 20 sandalye matematik sınıfındandır. Spor salonuna toplam kaç sandalye taşınmıştır?

11. a) Orhan'ın 4000 dinarı vardı. 5 paket süt aldıktan sonra 720 denarı kalmıştır. Bir paket süt kaç denardır?
    b) Atlet, antrenmanda 3850 metre koşmuştur; bu, 9 tur ve 250 metredir. Bir turun uzunluğu kaç metredir?

12. Denklemlere uygun sözel problem kur:
    a) $2500 - 3x = 550$, b) $3x + 56 = 177$.

Araştırma

Bir sayı tut, onu iki katına çıkar, 2 ekle, sonucu 2'ye böl ve 1 çıkar. Tuttuğun sayıyı elde ettin. Bir denklem yardımıyla neden her zaman tuttuğun sayıyı elde ettiğini açıkla.

11. SAYI VE ŞEKİL DİZİLERİ (ÖRÜNTÜLERİ)

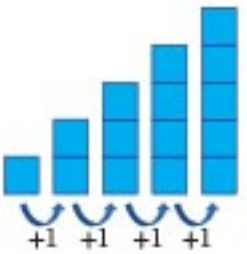
Etkinlik

Aşağıdaki dizinin bir sonraki teriminde kaç kare vardır?
Bir sonraki terimi hangi kurala göre belirliyorsun?
İlk on terimi sayı dizisi olarak yaz. 

Her **dizi**, belirli bir kurala göre sıralanmış nesnelerden oluşur.
Dizinin nesnelerine dizinin **terimleri** denir.

Örnek 1

Çizim 1'deki adımları inceleyelim. Her bir sonraki adımda oluşan dikdörtgenin, bir önceki adımdaki dikdörtgenden bir kare daha fazla içerdiğini fark ederiz.
Bu örüntüde bir sonraki terimi belirleme kuralı "1 ekle" şeklindedir.



çiz. 1

Örnek 2

"Her bir sonraki terim, kendisinden önce gelen iki terimin toplamına eşittir." ifadesiyle verilen sayı dizisini inceleyelim. Bu ifadeyle dizi tamamen belirlenmiş olur mu?

Cevap hayırdır; çünkü örüntünün birinci ve ikinci terimini bilmemiz gerekir. Üçüncü terim, birinci ve ikinci terimin toplamıdır; dördüncü terim, ikinci ve üçüncü terimin toplamıdır vb. Bu durumda dizi, örneğin "Birinci terim birdir, ikinci terim birdir ve her bir sonraki terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamıdır." cümlesiyle tamamen belirlenmiş olur. Belirlenen dizi 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... şeklindedir. Birinci terim 1, ikinci terim 1'dir ve bir sonraki terimi belirleme kuralı "her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamıdır şeklindedir.

Bir dizinin **bir sonraki terimini belirleme kuralı**, her bir sonraki terimin dizinin önceki terimlerinden elde edilme yöntemidir.

Bir dizi, **ilk birkaç terimi ve bir sonraki terimi belirleme kuralı** ile tamamen belirlenir.

Örnek 3

İlk terimi 4 olan ve bir sonraki terimi belirleme kuralı "5 ekle" olan dizinin ilk 6 terimini yaz.

Dizinin ilk 6 terimi şunlardır: $4, 4+5=9, 9+5=14, 14+5=19, 19+5=24, 24+5=29$.

Örnek 4

2, 6, 10, 14, 18, ... dizisi verilmiştir.
a) Dizinin her bir sonraki teriminin elde edilme kuralını bul.
b) Dizinin sonraki üç terimini yaz.

a) Her bir sonraki terimin, önceki terimden 4 fazla olduğunu fark ederiz. Buna göre, bir sonraki terimi belirleme kuralı "4 ekle" dir.



b) Dizinin sonraki üç terimi şunlardır: $18 + 4 = 22$, $22 + 4 = 26$, $26 + 4 = 30$.

Örnek 5

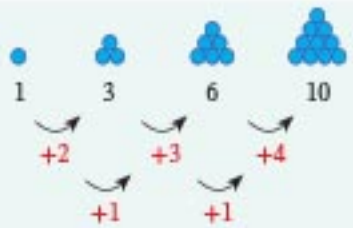
Dairelerden oluşan bir şekil dizisinin ilk 4 terimi verilmiştir (Çizim 2). Bir sonraki terimi belirleme kuralını bul ve dizideki bir sonraki şeklin daire sayısını belirle.



çiz. 2

Dizinin ilk 4 terimi 1, 3, 6 ve 10'dur (Çizim 3).
Bir sonraki terimi belirleme kuralı şöyle olacaktır:
"Önceki iki terim arasındaki farka 1 ekle."
Bu kurala göre, bir sonraki şekilde

$10 + (10 - 6 + 1) = 10 + 5 = 15$ daire bulunacaktır.



çiz. 3

Alıştırma 1

3, 9, 15, 21, ... dizisi verilmiştir.
a) Bir sonraki terimi belirleme kuralını bul.
b) Dizinin sonraki 3 terimini yaz.
c) Dizinin onuncu terimini yaz.

Kodu tara ve dizileri belirle.

Bir sonraki terimi belirleme kuralı ile, bir dizinin sıra numarası büyük olan terimlerini bulmak çoğu zaman zordur. Bu nedenle diziler, çoğu kez terimin sıra numarasına bağlılığı ile verilir. Bu bağlılık cebirsel bir ifadeyle gösterilir.

Dizinin herhangi bir teriminin adım numarasını (sıra numarasını) ile ilişkisini veren cebirsel ifadeye **dizinin genel terim kuralı (genel kuralı)** denir.

Genel terim biliniyorsa, verilen dizinin herhangi bir terimi kolayca bulunabilir.

Örnek 6

Genel terimi 2n + 3 olan dizi verilmiştir. Buna göre aşağıda istenenleri bul:
a) ilk 5 terimi, b) sıra numarası 100 ve 300 olan terimleri.

a) Dizinin genel terimi olan 2n + 3 ifadesinde ilk beş terimin sıra numaraları olan 1, 2, 3, 4 ve 5'i yerine yazarsak şunları elde ederiz:
$2 \cdot 1 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 + 3 = 7$, $2 \cdot 3 + 3 = 9$, $2 \cdot 4 + 3 = 11$, $2 \cdot 5 + 3 = 13$.
Buna göre, dizinin ilk 5 terimi: 5, 7, 9, 11 ve 13'tür.

b) Dizideki yüzüncü ve üç yüzüncü terimi belirlemek için genel terim ifadesi 2n + 3'te $n = 100$ ve $n = 300$ yazarız. Böylece şunları elde ederiz:
$2n + 3 = 2 \cdot 100 + 3 = 203$, $2n + 3 = 2 \cdot 300 + 3 = 603$.
Buna göre, yüzüncü terim 203, üç yüzüncü terim ise 603'tür.

Alıştırma 2

Genel terimi 4n − 1 olan dizi verilmiştir. Buna göre aşağıda istenenleri bul:
a) ilk 3 terimi, b) sıra numarası 50 ve 200 olan terimleri.

Bir dizinin genel terimi biliniyorsa, bir sayının o dizinin terimi olup olmadığını kontrol edebiliriz.

Örnek 7

Genel terimi 3n + 4 olan dizi verilmiştir. Verilenler sayı dizinin bir terimi olabilir mi?
a) 30, b) 49

a) Bu soruyu cevaplamak için $3n + 4 = 30$ denklemini çözmemiz gerekir.
$3n = 26$, yani $n = 26 : 3$ elde ederiz. Denklemin çözümü doğal sayı değildir.
30 sayısı dizinin bir terimi değildir.

b) Benzer şekilde, $3n + 4 = 49$, $3n = 45$, $n = 15$ denklemini çözeriz. Denklemin çözümü 15 doğal sayısıdır. 49 sayısı dizinin 15'inci terimidir.

Alıştırma 3

Genel terimi 3n + 5 olan dizi verilmiştir. Verilenler sayı dizinin bir terimi olabilir mi?
a) 53, b) 68

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çizim 4'teki dizide bir sonraki şekilde kaç küçük eşkenar üçgen vardır?



çiz. 4

2. Çizim 5'teki şekil dizisinin bir sonraki terimini belirleme kuralını bul. Sonra tabloyu defterine çiz ve doldur.



çiz. 5

Şeklin sıra numarası	birinci	ikinci	üçüncü	dördüncü	beşinci	altıncı
Şekildeki yıldız sayısı						

3. Dizinin ilk terimi 100'dür. Dizinin her bir sonraki terimi, bir sonraki terimi belirleme kuralı olan "2'ye böl" kuralına göre elde edilir. Dizinin beşinci terimini bul.
4. Dizilerin bir sonraki terimini belirleme kuralını bul:
   a) 1, 2, 4, 8, 16,..., b) 600, 300, 150, 75,..., c) 12, 26, 40, 54,...,
   d) 89, 86, 83, 80,...., e) 243, 81, 27, 9,... .
5. 3, 8, 13, 18,..... dizisi için:
   a) bir sonraki terimi belirleme kuralını bul,
   b) dizinin sonraki 3 terimini yaz.
6. Dizilerin bilinmeyen a, b, c ve d terimlerini bul ve bir sonraki terimi belirleme için olası kuralı yaz:
   a) $a, b, 5, 7, c, d$,...., b) a, b,10, 18, c,..., c) a, 24, 18, b, c, d,..., d) a, b, 0, −8, c, d,... .
7. Genel terimi 3n − 1 olan dizi verilmiştir. Dizi ile ilgili aşağıda istenenleri bul:
   a) ilk 3 terimi, b) sıra numarası 54 ve 125 olan terimleri.
8. 35, 23, −15, 77, 98 sayıları, genel terimi 4n + 7 olan bir sayı dizisinin terimleri olabilir mi?
9. Bir kitapçıda satılan okuma kitaplarında indirim uygulanmıştır. Birinci gün 6, ikinci gün 11, üçüncü gün 16 okuma kitabı satılarak bu şekilde devam etmiştir. Her sonraki gün, bir önceki günden 5 okuma kitabı daha fazla satıldığına göre sekizinci gün kaç okuma kitabı satılmıştır?
10. Zoki, 55 kütüğü en üst sırada 1 kütük olacak ve onun altındaki her sırada 1 kütük daha fazla olacak şekilde dizmek istiyor. En alt sırada kaç kütük olacaktır?

12. BİR DİZİNİN GENEL TERİMİNİ BULMA (BELİRLEME)

Bir dizinin genel terimini biliyorsak, verilen bir dizinin herhangi bir terimini, dizideki konumundan bağımsız olarak kolayca bulabiliriz. Bu nedenle, dizinin genel terimini belirlemek için bir yol bulmamız gerekir.

Etkinlik

Genel terimi verilen dizilerin ilk 3 terimini yaz: a) $n + 1$, b) 3n − 2,

Örnek 1

İlk terimi 2 olan ve bir sonraki terim kuralı "3 ekle" olan dizinin genel terimini bul.

Tablo oluştururuz. Tablonun birinci satırına terimlerin sıra numaralarını, ikinci satırına ise dizinin karşılık gelen 2, 5, 8, 11, 14, 17 terimlerini yazarız.
Üçüncü satıra, dizinin terimleri arasındaki fark ile terimin sıra numarası n'nin çarpımı olan 3n'yi yazarız.

Sıra numarası n	1	2	3	4	5	6
terim	2	5	8	11	14	17
3n	3	6	9	12	15	18

Şimdi, dizinin terimlerini elde etmek için 3n çarpımını 1 azaltmamız gerektiğini fark ederiz.
Buna göre, bu dizinin genel terimi 3n – 1'dir.

Önceki örnekteki dizinin arttığını fark ederiz.
Dizi azaldığında genel terimi nasıl belirleyeceğimizi görelim.

Örnek 2

İlk terimi 2 olan ve bir sonraki terim kuralı "3 çıkar" olan dizinin genel terimini bul.

Tablo oluştururuz. Birinci satıra yine terimlerin sıra numaralarını, ikinci satıra ise dizinin karşılık gelen 2, −1, −4, −7, −10,... terimlerini yazarız.
Bir sonraki terimi belirleme kuralı "3 çıkar" olduğundan, üçüncü satır −3 farkı ile sıra numarası n'nin çarpımı olacaktır.

Sıra numarası n	1	2	3	4	5	6
terim	2	−1	−4	−7	−10	−13
−3n	−3	−6	−9	−12	−15	−18

Dizinin terimlerini elde etmek için −3n çarpımını 5 artırmamız gerektiğini fark ederiz.
Buna göre, bu dizinin genel terimi −3n + 5'tir.

Kodu tara ve dizilerin nasıl oluşturulduğunu incele.



Örnek 3

Belediye, okula giden yolun kenarına ağaç dikme projesi başlatmıştır. Birinci gün 3 ağaç dikmişlerdir. Her sonraki gün, önceki günden 3 ağaç daha fazla dikmişlerdir.
a) Üçüncü, dördüncü ve beşinci gün kaç ağaç dikeceklerdir?
b) Dizinin genel terimini bul.
c) 10 gün sonra toplam kaç ağaç dikilmiş olacaktır?
d) Etkinlik devam ederse, kaçıncı günde 96 ağaç dikilecektir?

a) Birinci gün: 3 ağaç; İkinci gün: 3 + 3 = 6 ağaç; Üçüncü gün: 6 + 3 = 9 ağaç;
Dördüncü gün: 9 + 3 = 12 ağaç; Beşinci gün: 12 + 3 = 15 ağaç.

b) Elde edilen dizi: 3, 6, 9, 12, 15, ...

Sıra numarası n	1	2	3	4	5	6
terim	3	6	9	12	15	18
3n	3	6	9	12	15	18

Tabloya göre dizinin genel teriminin 3n olduğunu görürüz.

c) Onuncu gün $3 \cdot 10 = 30$ ağaç dikilecektir.

10 gün sonra $30 + 27 + 24 + 21 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 165$ ağaç dikilmiş olacaktır.

d) 3, 6, 9,... dizisindeki 96 numarasının kaçıncı terim olduğunu arıyoruz.

Denklemi şu şekilde çözeriz:

$3n = 96$, $n = 32$.

Dizinin otuz ikinci terimi 96 sayısıdır.

Alıştırma 1

Trayçe, 30 cm boyunda bir yılbaşı ağacı satın almıştır. Yılbaşı ağacı haftada 2 cm büyümektedir.

a) 1 ay sonra yılbaşı ağacının boyu kaç olacaktır?

b) n hafta sonra yılbaşı ağacının boyunu veren dizinin terimini bul.

c) 8 ay sonra yılbaşı ağacının boyu kaç olacaktır?

d) Kaç hafta sonra yılbaşı ağacının boyu 230 cm olacaktır?

Örnek 4

Çizim 1'deki modelle (şemayla) belirtilen sayı dizisinin genel terimini bul.



çiz. 1

Şemalardaki toplam daire sayısından 5, 8, 11,.. sayı dizisini oluşturabiliriz.

Sıra numarası ile beyaz ve mavi daire sayısı arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

1 (sıra numarası) · 3 (beyaz daireler) + 2 (mavi daireler) = 5,

2 (sıra numarası) · 3 (beyaz daireler) + 2 (mavi daireler) = 8,

3 (sıra numarası) · 3 (beyaz daireler) + 2 (mavi daireler) = 11.

Dizinin her teriminde beyaz dairelerin sayısı 3 · sıra numarasıdır ve her terimde ek olarak 2 mavi daire daha vardır.

Dizinin genel terimi 3n + 2 olacaktır.

Alıştırma 2

Çizim 2'deki modelle (şemayla) belirtilen sayı dizisinin genel terimini bul.



çiz. 2

İki ya da daha fazla durumun aynı anda fakat farklı kurallara göre ilerlediği durumlar vardır. Bu gibi durumlarda, terimleri birden fazla sayı örüntüsünün ortak elemanlarından oluşan yeni örüntüleri (dizileri) incelememiz gerekir.

Örnek 5

Dairelerden oluşan bir dizi verilmiştir (Çizim 3).



çiz. 3

a) Dizinin yüzüncü teriminde toplam kaç daire vardır?

b) Dizinin yüzüncü teriminde kaç kırmızı daire vardır?

c) 20 kırmızı daire bulunan terimde kaç yeşil daire vardır?

a) 3, 6, 9,... dizisinin genel terimi 3n'dir. Yüzüncü terim $3 \cdot 100 = 300$ olacaktır.

b) Kırmızı dairelerden oluşan dizinin genel terimi $n + 1$'dir. Yüzüncü terim $100 + 1 = 101$'dir.

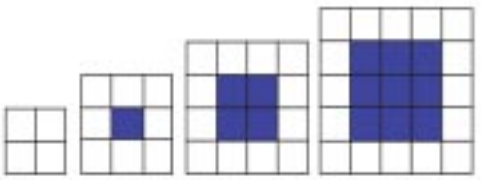
c) $n + 1 = 20$ eşitliğinden $n = 19$ elde ederiz. Yani 19'uncu terimde 20 kırmızı daire olacaktır. O hâlde daire sayısı $3 \cdot 19 = 57$'ye eşittir; yani 19'uncu terimde toplam 57 daire vardır. Bunların 20'si kırmızı olduğuna göre, yeşil daire sayısı 37 olacaktır.

Alıştırma 3

Çizim 4'te şekillerden oluşan dizi verilmiştir.

a) Tabloyu defterine çiz ve doldur:

mavi kare sayısı				
beyaz kare sayısı				



çiz. 4

b) Dizinin onuncu teriminde toplam kaç kare vardır?

c) 36 mavi kare bulunan dizi teriminde kaç beyaz kare vardır?

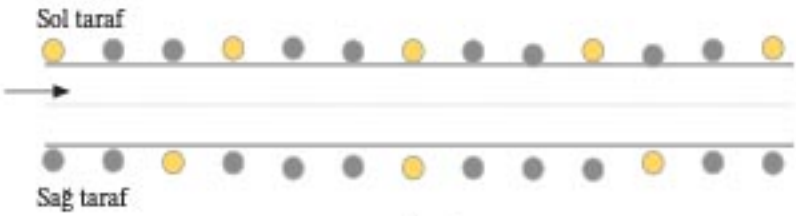
Örnek 6

Bir otoyolda, yolun sol ve sağ tarafındaki lambalar sürekli yanmamaktadır. Bunlar belirli kurallara göre yanar ve söner. Çizim 5'te sarı dairelerle yanan lambalar, gri dairelerle ise sönük lambalar gösterilmiştir.

a) Otoyolun sol tarafındaki her bir sonraki lambanın ve sağ tarafındaki her bir sonraki lambanın hangi kurala göre yandığını keşfet.

b) Sol taraftaki 94. konumdaki lamba yanıyor mu?

c) Hangi konumlarda lambalar iki tarafta aynı anda yanmaktadır? Aynı anda yandıkları genel kuralı bul.



çiz. 5

a) Sol tarafta 1, 4, 7, 10,.... konumlarındaki lambalar yanmaktadır.
Bu, birinci lambanın yandığı ve bir sonraki yanan lamba kuralının "3 konum ekle" olduğu anlamına gelir.
Sağ tarafta 3, 7, 11, 15,... konumlarındaki lambalar yanmaktadır.
Bu da ilk yanan lambanın 3. konumda olduğunu ve her bir sonraki lambanın "4 konum ekle" kuralına göre yandığını gösterir.

b) 94'ün 1, 4, 7, 10,.... dizisinin bir terimi olup olmadığını kontrol edeceğiz. Dizinin genel terimi $3n - 2$'dir.
Denklemi çözerek $3n - 2 = 94$, $3n = 96$, $n = 32$, 94'ün sıradaki otuz ikinci yanan lamba olduğunu elde ederiz.

c) Solda ve sağda yanan lambaların dizileri şunlardır:

1, 4, 7, 10,13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34,...

3, 7, 11, 15,19, 23, 27, 31, 35,...

İki dizide de hangi konumların yer aldığını fark ederiz. Buna göre, aynı konumda yanan lambaların dizisi

7, 19, 31,....

7, 19, 31,... dizisinin genel terimi $12n - 5$'tir.

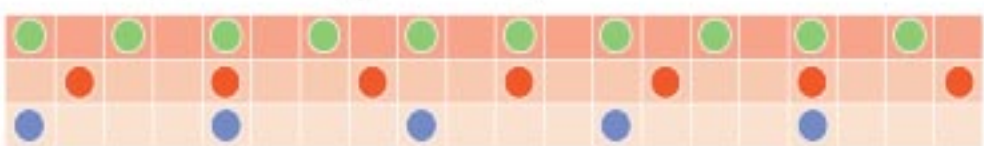
Alıştırma 4

Bir yeşil, bir kırmızı ve bir mavi olmak üzere üç farklı renkteki yılbaşı lambası şeridi birleştirilmiştir. Çizim 6'da, belirli bir anda eş zamanlı olarak yanan üç renkteki lambalar modellenmiştir. Boş bırakılan alanlar ise o anda sönük olan lambaları temsil etmektedir.

a) Üç lamba şeridinin her birinde, ardışık yanan lambaların hangi kurala göre ilerlediğini (örüntü kuralını) belirle.

b) Bir sonraki adımda hangi konumda (adım numarasında) yalnızca kırmızı lamba yanacaktır?

c) Üç lambanın aynı anda yandığı adımların oluşturduğu sayı örüntüsünü yazınız ve bu örüntünün genel terimini (genel kuralını) bul.



çiz. 6

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Dizinin genel terimini belirle:
   a) 34, 30, 26,..., b) 25, 20, 15, 10,..., c) 8, 15, 22, 29,..., d) 4, 6, 8, 10,....

2. Dizinin ilk terimi 15'tir ve bir sonraki terim kuralı "5 ekle"dir.
   a) İlk 6 terimini yaz. b) Dizinin genel terimini bul.
   c) 225'inci terimi bul.

3. Çizim 7'deki şema ile gösterilen dizinin genel terimini bul.



çiz. 7

4. Çizim 8'deki dizinin genel terimini bul.



çiz. 8

5. Bir spor salonunun bir bölümünde sandalyeler sıralar hâlinde dizilecektir. Birinci sırada 3 sandalye olacak, her sonraki sırada ise önceki sıradan 3 sandalye fazla olacaktır.
   a) Beşinci sırada kaç sandalye olacaktır? b) Onuncu sırada kaç sandalye olacaktır?
   c) n'inci sıradaki sandalye sayısını yaz.

6. Futbol stadyumundaki tribünlerden birinin birinci sırasında 56 taraftar vardır. İkinci sırada 59 taraftar, üçüncü sırada 62 taraftar vardır, vb. Onuncu sırada kaç taraftar vardır?

7. Öğrenciler okul bahçesinde çiçek dikme etkinliği yapmaktadır. Birinci gün 8 çiçek dikmişlerdir. Her sonraki gün, önceki günden 5 çiçek daha fazla dikmektedirler.
   a) Üçüncü, dördüncü ve beşinci gün kaç çiçek dikeceklerdir?
   b) n'inci günde kaç çiçek dikeceklerdir?
   c) 15 gün sonra toplam kaç çiçek dikilmiş olacaktır?
   d) Etkinlik devam ederse, kaçıncı günde 83 çiçek dikilecektir?

8. Kuzey Kutbu'ndaki bir buz tepesi 105 m yüksekliğindeydi. Buzların erimesi nedeniyle tepe her ay 3 m kaybetmektedir.
   a) 10 ay sonra tepenin yüksekliği kaç olacaktır?
   b) Kaç ay sonra tepe tamamen eriyecektir?

9. a) Çizim 9'daki şekil dizisinin bir sonraki terim kuralını bul ve dizideki bir sonraki şekildeki toplam daire sayısını belirle.



çiz. 9

b) Tabloyu defterine çiz ve doldur:

Kırmızı daire sayısı					
Mavi daire sayısı					

c) 10 kırmızı daire bulunan dizi teriminde kaç mavi daire vardır?

d) Ellinci terimde toplam kaç daire vardır?

10. Bir sokaktaki tüm sokak lambaları her akşam yanmamaktadır (Çizim 10). Yanan lambalar, sokağın sol ve sağ tarafı için özel kurallara göre yanmaktadır.

a) Sokağın sol tarafındaki her bir sonraki lambanın ve sağ tarafındaki her bir sonraki lambanın hangi kurala göre yandığını keşfet.

b) Sol taraftaki 35. konumdaki lamba yanıyor mu?

c) Hangi konumlarda lambalar iki tarafta aynı anda yanmaktadır? Aynı anda yandıkları genel kuralı bul.

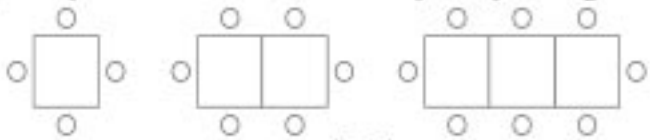


çiz. 10

11. Bir masanın etrafına 4 sandalye yerleştirilebilir. Çizim 11'de, daha fazla kişinin oturabilmesi için masaların nasıl birleştirildiği gösterilmiştir.

a) Birleştirilmiş 15 masaya kaç kişi oturabilir?

b) 40 kişinin birlikte oturabilmesi için kaç masa gerekir?



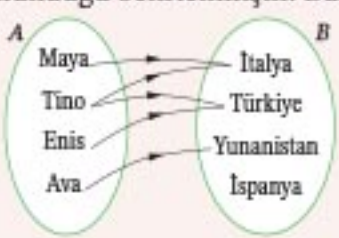
çiz. 11

13. FONKSİYON

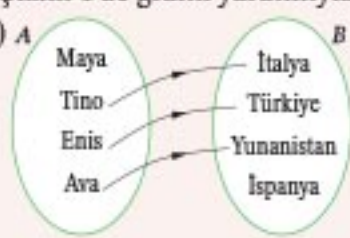
Fonksiyon Kavramı

Etkinlik

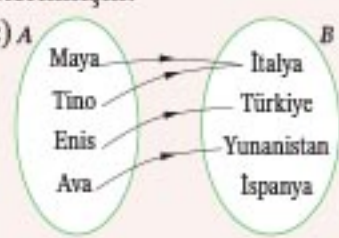
A = {Maya, Tino, Enis, Ava} öğrenci kümesinden B = {İtalya, İspanya, Yunanistan, Türkiye} ülke kümesine tanımlanan R_1, R_2 ve R_3 bağıntılarıyla, hangi öğrencinin hangi ülkede bulunduğu belirlenmiştir. Bunlar Çizim 1'de grafik yardımıyla gösterilmiştir.

a) 

Bağıntı R_1

b) 

Bağıntı R_2

c) 

Bağıntı R_3

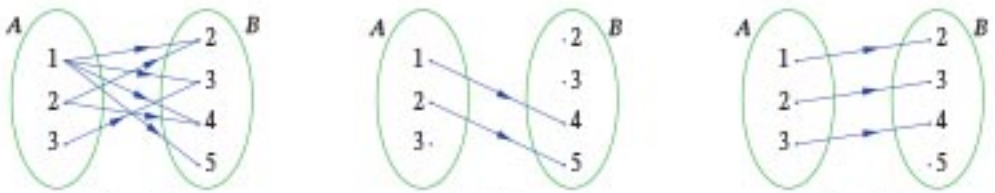
çiz. 1

Bağıntının grafiğine göre:
a) R_1 için, herhangi bir öğrencinin birden fazla ülkeyi ziyaret edip etmediğini belirle,
b) R_2 için, hiçbir ülkeyi ziyaret etmemiş bir öğrencinin olup olmadığını belirle,
c) R_3 için, öğrencilerin her birinin herhangi bir ülkeyi ziyaret edip etmediğini belirle.

A kümesinden B kümesine, belirli bir kurala göre her $x \in A$ elemanına B kümesinden tam olarak bir $y \in B$ elemanı karşılık getiren bağıntıya, A kümesinden B kümesine **fonksiyon** denir.
A kümesine fonksiyonun **tanım** kümesi, B kümesine ise **değer** kümesi denir.
$f: A \to B$ şeklinde yazar ve f, A'dan B'ye bir fonksiyondur diye okuruz.

Örnek 1

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinden $B = \{2, 3, 4, 5\}$ kümesine aşağıdaki bağıntılar verilmiştir:
R_1: "... ...'in bölenidir", R_2: "... ...'den 3 eksiktir", R_3: "... ... 'den 1 eksiktir".
Bunlar Çizim 2'de grafik yardımıyla gösterilmiştir. Bu bağıntılardan hangisi fonksiyondur?



Bağıntı R_1 | Bağıntı R_2 | Bağıntı R_3

çiz. 2

R_1 bağıntısında, A kümesinde (1 elemanı) B kümesinden iki farklı elemanla bağıntılı olan(eşleşen) bir eleman vardır (kendisinden iki ok çıkan bir eleman vardır).
R_2 bağıntısında, A kümesinde (3 elemanı) B kümesinden hiçbir elemanla bağıntılı olmayan bir eleman vardır (kendisinden ok çıkmayan bir eleman vardır).
R_3 bağıntısında, A kümesindeki her elemana B kümesinden tam olarak bir eleman karşılık gelmektedir (her elemandan tam olarak bir ok çıkmaktadır). Bu nedenle R_3 bağıntısı, A kümesinden B kümesine bir fonksiyondur.

Alıştırma 1

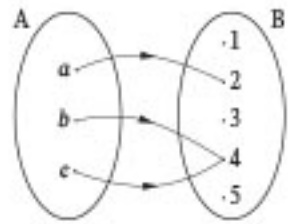
$M = \{1, 3, 5\}$ ve $N = \{2, 4, 6\}$ kümeleri verilmiş olsun. M ve N kümelerinin elemanları arasındaki bağıntıyı grafikle göster:
a) " ... ... 'den 2 kat küçüktür", b) " ... ... 'nın öncülüdür", c) " ... ...bölenidir".
Bağıntılardan hangisi fonksiyondur? Cevabı gerekçelendir.

$f: A \to B$ fonksiyonunda $x \in A$ elemanına $y \in B$ elemanı karşılık geliyorsa 'e **bağımsız değişken** (veya 'nin **ters görüntüsü / ön görüntüsü**), y'ye ise x'in f altındaki **görüntüsü** denir. Bu durum $y = f(x)$ şeklinde gösterilir.

A kümesinin herhangi bir elemanını göstermek için kullandığımız x sembolüne **bağımsız değişken**, y veya $f(x)$ sembolüne ise **bağımlı değişken** ya da x'e karşılık gelen **fonksiyonun değeri** denir.

Örnek 2

Çizim 3'te verilen $f: A \to B$ fonksiyonu için aşağıdakileri bul:
a) B kümesindeki 2 elemanının ön görüntüsünü,
b) A kümesindeki b elemanının görüntüsünü.



çiz. 3

a) B kümesindeki 2 elemanının ön görüntüsü, A kümesindeki a elemanıdır.
b) A kümesindeki b elemanının görüntüsü, B kümesindeki 4 elemanıdır ve f(b) = 4 yazılır.

$A = \{2, 4\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6\}$ olsun. A kümesinden B kümesine "... ... nın öncülüdür" kuralına göre f **fonksiyonu** tanımlanmıştır. $f: A \to B$ fonksiyonunun eşleme kuralını

$f(x) = x + 1$ veya $y = x + 1$, burada $x \in A$, şeklinde yazabiliriz.

Formüle göre, bağımsız değişkenin değerlerine karşılık gelen fonksiyon değerlerini hesaplayabiliriz:

$x = 2$ için $f(2) = 2 + 1 = 3$, $x = 4$ için $f(4) = 4 + 1 = 5$ elde ederiz.

Bağımsız değişken x'in değerleri ile bunlara karşılık gelen $f(x)$ fonksiyonunun değerleri bir **tabloda** gösterilebilir.

x	2	4
$f(x)$	3	5

Birinci satıra bağımsız değişken x'in bütün değerlerini, ikinci satıra ise bunlara karşılık gelen $f(x)$ fonksiyonunun değerlerini yazarız.

Kodu tara ve fonksiyonları incele.

Örnek 3

$f(x) = 3x - 1$ fonksiyonu verilmiştir.
a) Tabloyu defterine çiz ve doldur.
b) Fonksiyonun tanım kümesini ve değer kümesini bul.

x	5		9	
$f(x)$		20		32

a) Fonksiyonun değerini, fonksiyon formülünde yerine yazarak buluruz:
$x = 5$ için $f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$,
$x = 9$ için $f(9) = 3 \cdot 9 - 1 = 26$ elde ederiz.

Bağımlı değişkenin verilen değerine karşılık gelen bağımsız değişkenin değerini, fonksiyon formülünde yerine yazarak buluruz:

$20 = 3x - 1$, $21 = 3x$, $x = 7$

$32 = 3x - 1$, $33 = 3x$, $x = 11$.

Böylece aşağıdaki tabloyu elde ederiz:

x	5	7	9	11
$f(x)$	14	20	26	32

b) Tablodan, tanım kümesinin {5, 7, 9, 11} kümesi olduğunu görürüz.
Değer kümesi, 14, 20, 26 ve 32 değerlerini içeren herhangi bir kümedir.

Alıştırma 2

$f(x) = 2(x - 1)$ fonksiyonu verilmiştir.

a) Tabloyu defterine çiz ve doldur. b) Fonksiyonun tanım kümesini ve değer kümesini bul.

x			14	
$f(x)$	12	10		30

Gerçek Durumlarda Fonksiyonlar

Fonksiyonlar; fen bilimlerinde, teknik alanlarda ve günlük yaşamda geniş bir kullanım alanına sahiptir. Değişkenler arasındaki ilişkiyi anlamamızı ve meydana gelen değişimleri öngörmemizi sağlar.

Örnek 4

Bir laboratuvarda biyolog, bir bakteri kolonisinin çoğalmasını izler ve sonuçları tabloya yazar. İzlemenin başlangıcında 9 000 bakteri vardı.

a) Geçen gün sayısı x'e bağlı olarak bakteri sayısı y'yi ifade eden fonksiyonu (matematiksel modeli) yaz.

b) Yedi gün sonra kaç bakteri olacaktır?

Gün	Birinci	Birinci	İkinci	İkinci
Ölçüm zamanı	10:00	22:00	10:00	22:00
Bakteri sayısı	9000	15000	21000	27000

a) Tablodan, 24 saat içinde 12 000 yeni bakterinin oluştuğu sonucuna varırız; çünkü
$21000 - 9000 = 12000$ ve $27000 - 15000 = 12000$.
Aranan fonksiyon $y = 12000x + 9000$'dir.

b) Yedi gün sonra $y = 12000 \cdot 7 + 9000 = 93000$ bakteri olacaktır.

Alıştırma 3

Bir kuş rezervinde araştırmacılar ve gönüllüler şimdiye kadar 3500 kuşu halkalamıştır. Her ay 300 yeni kuşu halkalamaya devam etmeyi planlıyorlar.

a) Geçen ay sayısı x'e bağlı olarak halkalanmış kuş sayısı y'yi ifade eden fonksiyonu yaz.

b) 1 yıl sonra rezervde kaç halkalanmış kuş olacaktır?

Örnek 5

Yovan'ın otomobili, aldığı her kilometre yol için 0,08 l yakıt tüketmektedir.

a) Alınan yol x'e (kilometre cinsinden) bağlı olarak tüketilen yakıt y'yi (litre cinsinden) ifade eden fonksiyonu yaz.

b) Yolculuk sırasında Yovan'ın araç dururken ayrıca 1,4 l yakıt tükettiği biliniyorsa, alınan yol x'e (kilometre cinsinden) bağlı olarak tüketilen yakıt y'yi (litre cinsinden) ifade eden fonksiyonu yaz.

c) Yol 620 km uzunluğundaysa, Yovan kaç litre yakıt tüketmiştir?

a) Aranan fonksiyon $y = 0{,}08x$'tir.

b) Fonksiyon $y = 0{,}08x + 1{,}4$'tür.

c) Yovan $y = 0{,}08 \cdot 620 + 1{,}4 = 51$ l yakıt tüketmiştir.

Alıştırma 4

Bir maddenin kütlesinin hacme bağlılığı $m = \rho V$ formülüyle verilmiştir. Burada ρ maddenin yoğunluğudur. Sütün yoğunluğu 1,03 kg/l'dir. Aşağıdakilerin kütlesi kaçtır:

a) hacmi 0,5 l olan ambalajda paketlenmiş süt,

b) şişenin kütlesi 0,1 kg ise, 1 l süt bulunan şişe?

Örnek 6

Seramik bardak üreten küçük bir şirket, üretilen ve satılan bardak sayısına bağlı olarak toplam kârının ne kadar olacağını belirlemek istiyor. Şirketin sabit giderleri (elektrik, kira, taşıma) aylık 12000 denardır. Her bardak için malzeme ve işçilik gideri 80 denardır. Bir bardağın satış fiyatı 150 denardır.

a) Üretilen bardak sayısı x'e bağlı olarak kâr y'yi ifade eden fonksiyonu yaz.

b) Şirket 300 bardak satarsa, şirketin kârını hesapla.

c) Şirketin ne kâr ne de zarar etmesi için kaç bardak satması gerekir?

d) Bu fonksiyonun, üretim ve satış planlamasında şirketlere nasıl yardımcı olabileceğini açıkla.

a) Şirketin geliri 150x'tir (fiyat ile miktarın çarpımı). Toplam giderler 12000 + 80x'tir. Kâr, gelirler ile giderler arasındaki farktır:

$y = 150x - (12000 + 80x) = 70x - 12000.$

b) Şirket 300 bardak satarsa, kâr

$y = 70 \cdot 300 - 12000 = 21000 - 12000 = 9000$ denar olur.

c) Ne kâr ne de zarar şu durumda olur:

$y = 0, 0 = 70x - 12000, x = 12000 : 70 \approx 171{,}4.$

Buna göre şirketin zarar etmemesi için en az 172 fincan satması gerekir.

d) Bu fonksiyon, işletme sahiplerinin herhangi bir üretim miktarı için kârı ya da zararı öngörmelerini, bir bardağın fiyatını planlamalarını ve üretimi artırmanın ya da giderleri azaltmanın gerekli olup olmadığına karar vermelerini sağlar.

Alıştırma 5

Baskılı pamuklu tişört üreten küçük bir şirket, üretilen ve satılan tişört sayısına bağlı olarak toplam kârının ne kadar olacağını belirlemek istiyor. Şirketin sabit giderleri (iş yeri kirası, elektrik, internet, makinelerin bakımı) aylık 15 000 denardır. Her tişört için malzeme, boya ve işçilik gideri 120 denardır. Bir tişörtün satış fiyatı 260 denardır.

a) Satılan tişört sayısı x'e bağlı olarak kâr y'yi ifade eden fonksiyonu yaz.

b) Bir ayda 250 tişört satarlarsa şirketin kârını hesapla.

c) Şirketin ne kâr ne de zarar etmesi için kaç tişört satması gerekir?

d) Bu matematiksel modelin, üretim ve satış planlamasında şirkete nasıl yardımcı olabileceğini açıkla.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümeleri verilmiş olsun. A ve B kümelerinin elemanları arasında şu bağıntı verilmiştir: a) "... ... 'den 5 eksiktir", b) "... ... 'den 3 kat küçüktür". Bu bağıntılardan hangisi fonksiyondur?

2. Bir evde su tüketimi, evde yaşayan kişi sayısına bağlıdır. Her kişinin günde ortalama 60 litre su tükettiği bilinmektedir.
   a) Tabloyu defterine çiz ve doldur. Kişi sayısı su tüketimi (l)

Öğrenci sayısı	1	2	4	6
Su tüketimi (l)				

   b) Kişi sayısı ile su tüketimi arasındaki ilişkiyi ifade eden kuralı yaz.
   c) Bu ilişki bir fonksiyon mudur?
   d) Bu durumda tanım kümesi ve değer kümesi neyi temsil eder?

3. Küçük bir araştırmada öğrenciler gün içinde kaç bardak su içtiklerini yazmışlardır:

Öğrenci	Ana	Boyan	Selma	Arben
içilen su bardağı sayısı	6	8	5	8

   a) Öğrenciler ile içilen su bardağı sayısı arasındaki bu ilişki bir fonksiyon belirtir mi?
   b) Cevabın evet ise tanım kümesini ve değer kümesini yaz.
   Cevap hayır ise, ilişkinin neden fonksiyon belirtmediğini açıkla.

4. $f(x) = 2x + 5$ ve $g(x) = 3(x - 2)$ ise tabloları defterine çiz ve doldur.

x	3	7		
$f(x)$			25	35

x		8		12
$g(x)$	9		24	

5. Mila tatile 15 000 denar götürmüş ve her gün 1200 denar harcamaya karar vermiştir. Gün sayısı x'e bağlı olarak kalan para miktarı y'yi (denar cinsinden) ifade eden fonksiyonu yaz.

6. Şeftali satıcısı, pazardaki tezgâh için günlük 600 denar kira ödemelidir. Şeftalileri kilogramı 90 denardan satacaktır.

a) Satılan şeftali miktarı x'e (kilogram cinsinden) bağlı olarak para miktarı y'yi (denar cinsinden) ifade eden fonksiyonu yaz.

b) Satıcı 150 kilogram şeftali satarsa ne kadar kazanır?

7. Bir gemi şimdiye kadar 250000 km yol almıştır. Yarın, günde 120 km yol alacağı bir gemi yolculuğuna çıkacaktır.

a) Geminin aldığı toplam kilometre sayısı y'nin, yolculukta geçen gün sayısı x'e bağlılığını ifade eden fonksiyonu yaz.

b) 10 gün sonra gemi toplam kaç kilometre yol almış olacaktır?

8. Bir mağazada, 1000 denarın üzerindeki her alışveriş tutarı için %10 indirim uygulanır.

a) Hesap tutarı x'e bağlı olarak toplam fiyat y'yi belirleyen fonksiyonu yaz.

b) Bu fonksiyonun, satıcıların fiyat politikalarını planlamalarına nasıl yardımcı olduğunu açıkla.

9. Kek üreten küçük bir fırın, üretilen ve satılan kek sayısına bağlı olarak toplam kârının ne kadar olacağını belirlemek istiyor. Fırının sabit giderleri (elektrik, kira, maaşlar, su) aylık 9000 denardır. Her kek için malzeme ve işçilik gideri 30 denardır. Bir kekin satış fiyatı 70 denardır.

a) Kâr y'nin, satılan kek sayısı x'e bağlılığını belirleyen matematiksel modeli (fonksiyonu) bul.

b) Fırın 400 kek satarsa fırının kârını hesapla.

c) Fırının ne kâr ne de zarar etmesi için kaç kek satması gerekir?

d) Bu fonksiyonun, üretim ve satış planlamasında fırına nasıl yardımcı olabileceğini açıkla.

14. DOĞRUSAL FONKSİYON. DOĞRUSAL FONKSİYONUN GRAFİĞİ

Doğrusal Fonksiyon

Etkinlik

Sinema bileti 150 denardır.
Bir bilet daha, iki bilet daha ve bu şekilde bilet aldığımızda ödeyeceğimiz tutar ne kadar artar? Toplam tutar her zaman aynı miktarda mı artar? Bu miktar ne kadardır?

k ve n rasyonel sayılar olmak üzere $y = kx + n$ (veya $f(x) = kx + n$) biçimindeki fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.
k sayısına **eğim katsayısı**, n sayısına ise doğrusal fonksiyonun **sabit terimi** denir.

$y = 7x$, $y = 2x - 3$, $y = 1 - 5x$, $y = \frac{1}{2}x - 3$, $y = -\frac{3}{4}x + 2$, $y = x + \frac{3}{7}$ fonksiyonları doğrusal fonksiyonlardır.

Örnek 1

Bir taksi şirketi açılış ücreti olarak 50 denar ve her kilometre için 20 denar almaktadır.
Tabloda, gidilen her kilometreye göre ödenecek ücret verilmiştir.

Mesafe (km)	0	1	2	3
Fiyat (denar)	50	$20 \cdot 1 + 50 = 70$	$20 \cdot 2 + 50 = 90$	$20 \cdot 3 + 50 = 110$

Her gidilen kilometrede 20 denar daha ödediğimizi fark ederiz.
Gidilen mesafe x ile ödenecek ücret y arasındaki ilişki $y = 20x + 50$ doğrusal fonksiyonu ile belirlenir.
Eğim katsayısı $k = 20$'dir ve x 1 arttığında y'nin ne kadar arttığını gösterir.
Sabit terim $n = 50$'dir ve başlangıç değerini, yani $x = 0$ iken y'nin değerini gösterir.

Alıştırma 1

Aşağıdaki fonksiyonların eğimini ve sabit terimini bul:
a) $y = 2x + 3$, b) $y = 5x$, c) $y = 4$, d) $y = x - 2$?

Alıştırma 2

Eğim katsayısı ve sabit terimi verilen doğrusal fonksiyonların formülünü yaz:
a) $k = 3$, $n = -1$, b) $k = 0$, $n = -2$, c) $k = -1$, $n = 0$, d) $k = 0$, $n = 0$.

Doğrusal Fonksiyonun Grafiği

Örnek 2

$y = x + 4$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çiz.

Doğrusal fonksiyonun

$$y = x + 4$$

formülüne göre, x'in birkaç değeri için y'nin değerini hesaplarız. Örneğin:

$x = -3$ için, $y = -3 + 4 = 1$; $x = -2$ için, $y = -2 + 4 = 2$; $x = -1$ için, $y = -1 + 4 = 3$;

$x = 0$ için, $y = 0 + 4 = 4$; $x = 1$ için, $y = 1 + 4 = 5$; $x = 2$ için, $y = 2 + 4 = 6$.

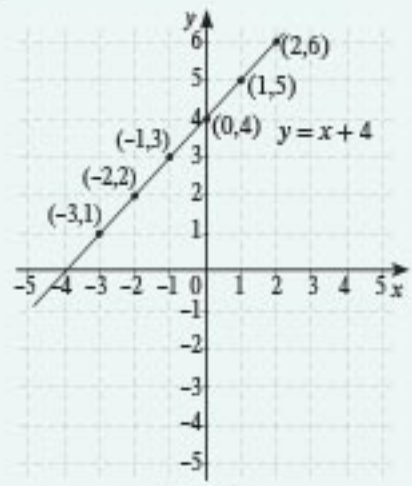
Elde edilen değerleri tabloya yazabiliriz:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	1	2	3	4	5	6

$(-3, 1)$, $(-2, 2)$, $(-1, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 5)$ ve $(2, 6)$, sıralı ikililer $y = x + 4$ doğrusal fonksiyonunun formülünü sağlar. Bunlara **doğrusal fonksiyonun grafiği** üzerindeki noktalar denir.

Elde edilen sıralı ikilileri koordinat sisteminde nokta olarak gösterebiliriz. Bunun için birinci koordinat x ekseni üzerine, ikinci koordinat ise y ekseni üzerine işaretlenir.

Bu noktaları birleştirdiğimizde, $y = x + 4$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini görsel olarak gösteren bir **doğru** elde ederiz (Çizim 1).



çiz. 1

Örnek 3

$y = 2x + 1$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çiz.

Doğrusal fonksiyonun grafiği bir doğru olduğundan, grafiği çizmek için iki nokta yeterlidir (Çizim 2).

Bunun için x'e ait rastgele iki değer yazacağımız bir tablo oluştururuz.

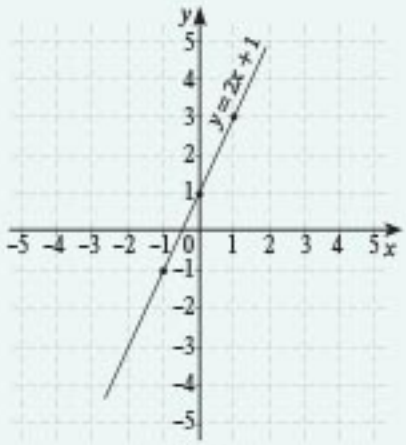
Daha sonra $y = 2x + 1$ doğrusal fonksiyonunun formülünü kullanarak y'nin karşılık gelen değerlerini hesaplarız:

$x = -1$ için, $2 \cdot (-1) + 1 = -1$; ve $x = 0$ için, $2 \cdot 0 + 1 = 1$.

x	-1	0
y	-1	1

Böylece doğrusal fonksiyonun grafiği üzerinde bulunan iki noktayı elde ederiz: $(-1, -1)$ ve

(0, 1). Bu noktaları koordinat sisteminde gösterir, bu noktalardan geçen doğruyu çizer ve doğrunun üzerine fonksiyonun formülünü yazarız. Elde edilen doğru, $y = 2x + 1$ doğrusal fonksiyonunun grafiğidir.



çiz. 2

Alıştırma 3

Verilen fonksiyonların grafiğini çiz:
a) $y = -3x + 2$, b) $y = x - 2$.

Kodu tara ve fonksiyonları çiz.

Aynı Eğim Katsayısına Sahip Doğrusal Fonksiyonlar. Aynı Sabit Terime Sahip Doğrusal Fonksiyonlar

Etkinlik

A bitkisinin boyu 5 cm, *B* bitkisinin boyu ise 3 cm'dir. Her iki bitki de haftada 2 cm hızla büyümektedir.

a) İlk 5 haftada bitkilerin boylarını hesapla.

b) Bitkilerin boyu her hafta nasıl değişmektedir?

c) Bitkilerde ortak olan özellik nedir?

Örnek 4

Güneş doğduktan sonra Üsküp'te sıcaklık 3 °C, Manastır'da ise −1 °C'dir. Her iki şehirde de sıcaklık her saat 2 °C artmaktadır.

a) Her şehir için, zaman ile sıcaklık arasındaki ilişkiyi doğrusal fonksiyonla ifade et. Ne fark ettiğini açıkla.

b) İki doğrusal fonksiyonun grafiğini aynı koordinat sisteminde çiz. Ne fark ettiğini açıkla.

a) Her şehir için, güneş doğduktan sonraki saatleri x, şehirdeki karşılık gelen sıcaklıkları ise y ile gösterelim. Tabloda, güneş doğduktan sonraki birkaç saat için her iki şehirdeki sıcaklık değerleri verilmiştir.

Güneş doğduktan sonraki saat sayısı (x)	Üsküp'teki sıcaklık (y_1)	Manastır'daki sıcaklık (y_2)
0	3 °C	−1 °C
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$ °C	$2 \cdot 1 - 1 = 1$ °C
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$ °C	$2 \cdot 2 - 1 = 3$ °C
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$ °C	$2 \cdot 3 - 1 = 5$ °C

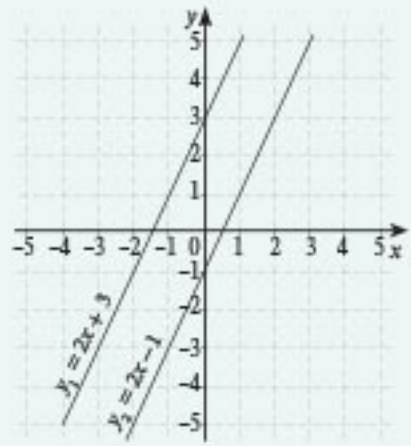
Zaman x ile Üsküp'teki sıcaklık y_1 ve Manastır'daki sıcaklık y_2 arasındaki ilişki aşağıdaki doğrusal fonksiyonlarla ifade edilir:

Üsküp için $y_1 = 2x + 3$, Manastır için $y_2 = 2x - 1$.

Her iki fonksiyonun da **eğim katsayısının aynı** olduğunu, yani 2 olduğunu fark ederiz.

b) Çizim 3'te, $y_1 = 2x + 3$ и $y_2 = 2x - 1$ doğrusal fonksiyonlarının grafikleri aynı koordinat sisteminde çizilmiştir.

Doğrusal fonksiyonların grafiklerinin birbirine **paralel doğrular** olduğunu fark ederiz.



çiz. 3

Eğim **katsayıları aynı** olan doğrusal fonksiyonların grafikleri birbirine **paralel doğrulardır.**

Alıştırma 4

Aynı koordinat sisteminde

$y_1 = -3x + 1$ ve $y_2 = -3x - 3$

doğrusal fonksiyonlarının grafiklerini çiz.

a) Doğrusal fonksiyonların grafiklerinin birbirine göre konumu nasıldır?

b) Doğrusal fonksiyonların eğim katsayılarını karşılaştır.

Etkinlik

Marko ve Adora farklı şekillerde para biriktirmektedir. Marko'nun 100 denarı vardır ve her ay 300 denar biriktirmektedir. Adora'nın da 100 denarı vardır ve her ay 500 denar biriktirmektedir.

a) Marko'nun ve Adora'nın birikim miktarı her ay nasıl değişmektedir?

b) İkisinde ortak olan özellik nedir?

Örnek 5

Ana ve Bekim'in üçer çıkartması vardır. Ana her gün koleksiyonuna 2 yeni çıkartma eklemektedir. Bekim ise her gün arkadaşına 1 çıkartma vermektedir.

a) Her çocuk için, geçen gün sayısı ile çıkartma sayısı arasındaki ilişkiyi doğrusal fonksiyonla ifade et. Ne fark ettiğini açıkla.

b) İki doğrusal fonksiyonun grafiğini aynı koordinat sisteminde çiz. Ne fark ettiğini açıkla.

a) Ana'nın çıkartma sayısı her gün 2 artmaktadır, Bekim'in çıkartma sayısı ise her gün 1 azalmaktadır.

x geçen gün sayısı, *y* ise çıkartma sayısı olsun. Tabloda, birkaç günlük süre boyunca her iki çocuğun çıkartma sayıları verilmiştir.

Geçen gün sayısı (x)	Ana'nın çıkartma sayısı (y_1)	Bekim'in çıkartma sayısı (y_2)
0	3	3
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$	$-1 \cdot 1 + 3 = 2$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	$-1 \cdot 2 + 3 = 1$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$	$-1 \cdot 3 + 3 = 0$

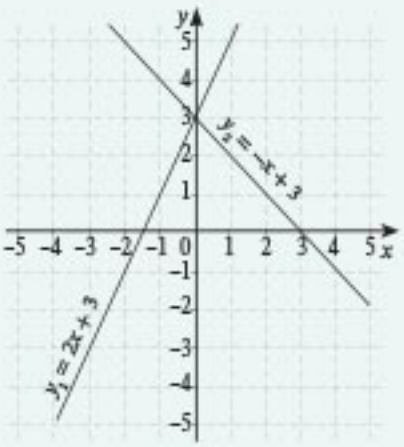
Geçen gün sayısı x ile Ana'nın çıkartma sayısı y_1, yani Bekim'in çıkartma sayısı y_2 arasındaki ilişki aşağıdaki doğrusal fonksiyonlarla belirlenir:

Ana için $y_1 = 2x + 3$, Bekim için $y_2 = -x + 3$.

Her iki fonksiyonun da **sabit teriminin aynı** olduğunu, yani 3 olduğunu fark ederiz.

b) Çizim 4'te $y_1 = 2x + 3$ и $y_2 = -x + 3$ doğrusal fonksiyonlarının grafikleri aynı koordinat sisteminde çizilmiştir.

Doğrusal fonksiyonların grafiklerinin *y* eksenini (0, 3) noktasında kestiğini fark ederiz.



çiz. 4

Sabit terimi n olan doğrusal fonksiyonların grafikleri, *y* eksenini $(0, n)$ noktasında kesen doğrulardır.

Alıştırma 5

Aynı koordinat sisteminde aşağıdaki doğrusal fonksiyonların grafiklerini çiz:

$y_1 = -3x - 1$ ve $y_2 = x - 1$.

a) Doğrusal fonksiyonların grafikleri hangi noktada kesişir?

b) Doğrusal fonksiyonların sabit terimlerini karşılaştır.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Fonksiyonun eğim katsayısı ve sabit terimi hangisidir:
   a) $y = 3x + 4$, b) $y = x$, c) $y = -5$, d) $y = -x - 2$?
2. Eğim katsayısı ve sabit terimi verilen doğrusal fonksiyonun formülünü yaz:
   a) $k = -3,\ n = -4$, b) $k = 0, n = 3$, c) $k = 6, n = 0$, d) $k = 2, n = -5$.
3. Doğrusal fonksiyonun grafiğini çiz:
4. Doğrusal fonksiyonları, birbirine paralel doğrulardan oluşan gruplara ayır:
   $y = 2x + 15$, $y = 5x - 7$, $y = x + 3$, $y = -7x - 2$, $y = 2x$, $y = 5x$,
   $y = -7x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = -7x$, $y = x$, $y = 5x - 1$, $y = 2x - 7$.
5. Grafiği $y = 5x - 6$ doğrusuna paralel olan ve y eksenini $(0, 7)$ noktasında kesen doğrusal fonksiyonu yaz.
6. Grafiği $y = 4x + 3$ doğrusuna paralel olan ve $y = x + 1$ doğrusu ile y ekseni üzerinde kesişen doğrusal fonksiyonu yaz.
7. a'nın hangi değeri için $y = (2a + 3)x + 1$ ve $y = (a - 5)x + 2$ fonksiyonlarının grafikleri paralel doğrular olur?
8. a'nın hangi değeri için $y = (a + 2)x - 2a + 3$ fonksiyonunun grafiği y eksenini $(0, 5)$ noktasında keser?
9. Matey saat 8'de, Andrey ise saat 9'da bisikletle yola çıkar. İkisi de 15 km/h sabit hızla gider.
   a) Matey'in ve Andrey'in hareketini açıklayan doğrusal fonksiyonların formüllerini yaz,
   b) Grafiklerini çiz. Birbirlerine göre konumları nasıldır?
10. Duşko ve David doğum günlerinde 5000'er denar almıştır. Duşko parasını biriktirmeye ve her gün 50 denar daha eklemeye karar vermiştir. David ise her gün parasından 100 denar harcamıştır.
    a) Zaman x'e (gün cinsinden) bağlı olarak para miktarı y'yi (denar cinsinden) ifade eden doğrusal fonksiyonu yaz.
    b) İki fonksiyonun grafiklerinin kesişim noktasının koordinatları nelerdir?

Araştırma

$y = 3x + 2$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinin çizili olduğu aynı koordinat sisteminde, değerler tablosu yapmadan $y = 3x - 1$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini nasıl çizebileceğini düşün ve açıkla.

$y = kx + n$ biçimindeki fonksiyon için sonucu genelleştir.

15. DOĞRUSAL FONKSİYONUN DEĞİŞİMİ

"Değişim" kavramını günlük hayatta zamanın akışı veya bir nehrin akışı gibi durumlarla ilişkilendirebiliriz. Örneğin, bir nehrin akışı sırasında su seviyesi yükselebilir, alçalabilir ya da sabit kalabilir. Bu bölümde, bir doğrusal fonksiyonun değişim oranının neye bağlı olduğunu inceleyeceğiz.

Artan Doğrusal Fonksiyon

Etkinlik

Afrim, bisikletiyle Vodno Tepesi'nin zirvesine doğru çıkmaktadır. Önümüzdeki dakikalarda bulunduğu rakım değişecek mi? Artacak mı, azalacak mı?

Örnek 1

İva, 2500 denarlık birikimine her gün 75 denar ekleyerek harçlığından tasarruf etmeye karar vermiştir.

a) Birikim süresi x'e (gün cinsinden) bağlı olarak birikmiş para miktarı y'yi (denar cinsinden) ifade eden doğrusal fonksiyonu yaz.

b) İlk 5 gün için bu ilişkiyi bir tablo ile göster.

c) Doğrusal fonksiyonun eğim katsayısının işareti nedir?

d) x değişkeninin değeri arttıkça y değişkeninin değeri nasıl değişir?

a) İva'nın başlangıçtaki birikimi 2500 denardır. Her gün 75 denar eklediğine göre, x gün sonra $2500 + 75x$ denarı olacaktır. Buna göre doğrusal fonksiyon $y = 75x + 2500$ olur.

b)

Birikim süresi x (gün)	1	2	3	4	5
Birikmiş para miktarı (y, denar)	2575	2650	2725	2800	2875

c) Eğim katsayısı $k = 75 > 0$'dır. Eğim katsayısının işareti pozitiftir.

d) Tablodan, x değişkeninin değeri arttıkça y değişkeninin değerinin de arttığı görülmektedir. Örneğin, $3 < 5$ olduğundan $2725 < 2875$'tir.

Bu doğrusal fonksiyonun **artan fonksiyon** olduğunu söyleriz.

Örnek 2

Aynı koordinat sisteminde $y = x + 3$ ve $y = 2x - 1$ artan doğrusal fonksiyonlarının grafiklerini çiz.

a) Hangi doğrusal fonksiyon daha hızlı artmaktadır?

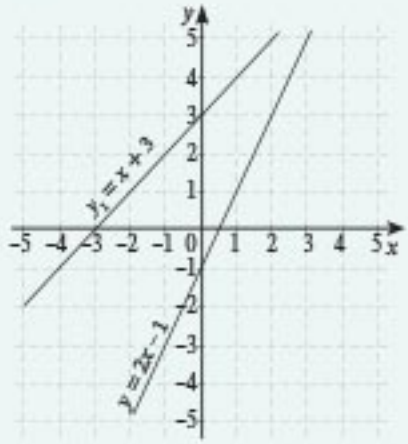
b) Eğim katsayılarını karşılaştır. Ne sonuç çıkarılabilir?

Doğrusal fonksiyonların grafikleri çiz. 1'de gösterilmiştir.

a) Grafiklerden, $y = 2x - 1$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinin $y = x + 3$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinden daha dik olduğu görülmektedir. Bu nedenle $y = 2x - 1$ doğrusal fonksiyonu, $y = x + 3$ doğrusal fonksiyonundan **daha hızlı artmaktadır**.

b) $y = 2x - 1$ doğrusal fonksiyonunun (k = 2) eğim katsayısı, $y = x + 3$ doğrusal fonksiyonunun (k = 1) **eğim katsayısından daha büyüktür.**

x	0	1
$y = x + 3$	3	4
$y = 2x - 1$	-1	1



çiz. 1

İki artan doğrusal fonksiyon arasında, eğim katsayısı daha büyük olan doğrusal fonksiyon daha hızlı artar.

Günlük yaşamda, bir fonksiyon oluşturarak olayların nasıl değişeceğini öngörebileceğimiz ve bize daha uygun etkinlikleri planlayabileceğimiz durumlar vardır.

Örnek 3

Bir mobil telefon şirketi şu tarifeyi sunmaktadır: Konuşmanın her dakikası için 1 denar ve aylık 200 denar abonelik ücreti.
Diğer mobil telefon şirketi ise konuşmanın her dakikası için 2 denar ve aylık 100 denar abonelik ücreti sunmaktadır.

a) Her iki şirket için de konuşma süresi x'e (dakika cinsinden) bağlı olarak ücret y'yi (denar cinsinden) ifade eden doğrusal fonksiyonu yaz.

b) İki doğrusal fonksiyonun grafiğini aynı koordinat sisteminde çiz.

c) Ay boyunca yapılan konuşmaların süresine bağlı olarak hangi şirketin daha avantajlı olduğunu açıkla.

a) 1. şirket için doğrusal fonksiyon $y = x + 200$'dür.
2.şirket için doğrusal fonksiyon $y = 2x + 100$'dür.

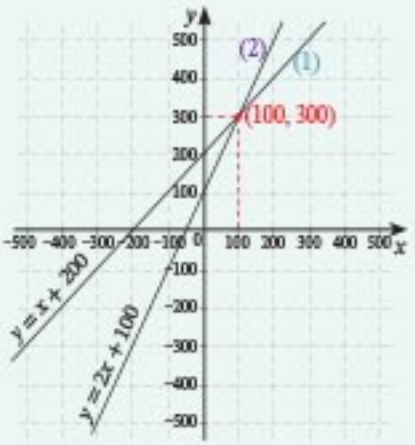
b) İki doğrusal fonksiyonun aynı koordinat sistemindeki grafikleri Çizim 2'de verilmiştir.

1. şirket

konuşma süresi (x, dakika)	0	50	100
ücret (y, denar)	200	250	300

2. şirket

konuşma süresi (x, dakika)	0	50	100
ücret (y, denar)	100	200	300



çiz. 2

c) Doğrular (100, 300) noktasında kesişmektedir.
x = 100 koordinatı, dakika sayısını gösterir.
y = 300 koordinatı ise aylık konuşma ücretini gösterir.
Kesişim noktasının değerleri, 100 dakika konuşma için her iki şirkete de aynı ücreti (300 denar) ödeyeceğimiz anlamına gelir.
Hangi teklifin daha avantajlı olduğunu belirlemek için, iki fonksiyonun kesişim noktasına göre davranışını inceleyelim. Grafiklerden görüyoruz ki:

- Eğer 100 dakikadan fazla konuşursak, fiyatı daha yavaş artan teklif daha avantajlıdır. Bu da 1. şirkettir.
- Eğer 100 dakikadan az konuşursak, 2. şirketin teklifi daha avantajlıdır.

Alıştırma 1

Birinci pazarda günlük kira 400 denardır ve elmanın fiyatı kilogram başına 50 denardır.
İkinci pazarda günlük kira 500 denardır ve elmanın fiyatı kilogram başına 70 denardır.

a) Satılan elma miktarına bağlı olarak satıcının hangi pazarda tezgâh kiralamasının daha kazançlı olduğunu açıkla.
b) Satıcı 400 kg elma satarsa hangi pazarda, 800 kg elma satarsa hangi pazarda daha fazla kazanır?

Azalan Doğrusal Fonksiyon

Etkinlik

Teona'nın 10 meyve suyu vardır. Teona her gün arkadaşı Esma'ya bir meyve suyu verir. Önümüzdeki birkaç günde Teona'nın meyve suyu sayısı artacak mı, azalacak mı?

Örnek 4

Andrea'nın hesabında 8500 denar vardır. Her gün hesabından 500 denar harcamaktadır.

a) Geçen zaman x'e (gün cinsinden) bağlı olarak hesaptaki para miktarı y'yi (denar cinsinden) ifade eden doğrusal fonksiyonu yaz.

b) İlk 5 gün için bu ilişkiyi bir tablo ile göster.

c) Doğrusal fonksiyonun eğim katsayısının işareti nedir?

d) x değişkeninin değeri arttıkça y değişkeninin değeri nasıl değişir?

a) Verilenlerden, başlangıçtaki 8500 denarın her gün 500 denar azaldığını görürüz. Buna göre doğrusal fonksiyon $y = -500x + 8500$ olarak belirlenir.

b)

konuşma süresi (x, dakika)	1	2	3	4	5
ücret (y, denar)	8000	7500	7000	6500	6000

c) Eğim katsayısı $k = -500 < 0$'dır. Eğim katsayısının işareti negatiftir.

d) Tablodan, x değişkeninin değeri arttıkça y değişkeninin değerinin azaldığını görebiliriz. Örneğin, $2 < 4$ için $7500 > 6500$ olur.
Bu doğrusal fonksiyonun **azalan fonksiyon** olduğunu söyleriz.

Örnek 5

Aynı koordinat sisteminde azalan doğrusal fonksiyonlar olan
$y = -x + 3$ и $y = -2x + 1$.

a) Hangi doğrusal fonksiyon daha hızlı azalmaktadır?

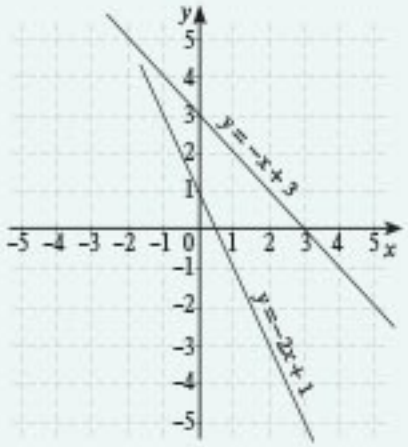
b) Eğim katsayılarını karşılaştır. Ne sonuç çıkarılabilir?

Doğrusal fonksiyonların grafikleri Çizim 3'te gösterilmiştir.

a) Grafiklerden, $y = -2x + 1$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinin $y = -x + 3$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinden daha dik olduğunu görürüz.
Bu nedenle $y = -2x + 1$ doğrusal fonksiyonu, $y = -x + 3$ doğrusal fonksiyonundan **daha hızlı azalır.**

b) $y = -2x + 1$ doğrusal fonksiyonunun ($k = -2$) eğim katsayısı, $y = -x + 3$ doğrusal fonksiyonunun ($k = -1$) **eğim katsayısından daha küçüktür.**

x	0	1
$y = -x + 3$	3	2
$y = -2x + 1$	1	−1



çiz. 3

İki azalan doğrusal fonksiyon arasında, eğim katsayısı daha küçük olan doğrusal fonksiyon daha hızlı azalır.

Örnek 6

Araştırmacılar, deniz kıyısındaki 2 konumda deniz suyunun ve havanın sıcaklığını ölçmek için termometreler yerleştirmiştir. Termometre 1 önce deniz yüzeyinde ölçüm yapmış ve her saat 5 metre aşağı inmektedir. Termometre 2 deniz seviyesinin 2 metre altında bulunmaktadır ve termometre 1 ile aynı anda saatte 4 metre aşağı inmeye başlamaktadır.

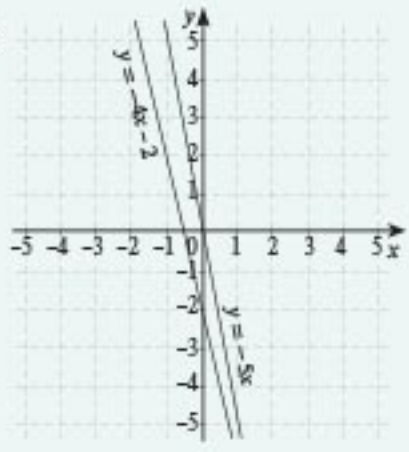
a) Her iki termometre için, termometrenin bulunduğu derinlik y'nin (metre cinsinden) inme süresi x'e (saat cinsinden) bağlılığını gösteren formülleri yaz.

b) İki fonksiyonun grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiz.

c) Hangi termometre, deniz seviyesinden −150 metre yükseklikte bulunan konumda sıcaklık ölçmeye daha hızlı ulaşacaktır?

a) Termometre 1 için: $y = -5x$, termometre 2 için: $y = -4x - 2$ olur.

b)



çiz. 4

c) Termometre 1 deniz seviyesinden −150 metre yükseklikte ise $y = -150$ olur.
Bu nedenle $y = -5x$ formülünde yerine yazarız:
$-150 = -5x$, buradan $x = 30$ saat.
Termometre 2 için: $y = -4x - 2$,
$-150 = -4x - 2$, $-148 = -4x$, $x = 37$ saat.
Termometre 1, deniz seviyesinden −150 metre yükseklikte bulunan konuma daha hızlı ulaşacaktır.

Alıştırma 2

Tepenin zirvesinden Mersiha teleferikle inmektedir, Adem ise kayak pisti üzerinden inmektedir. Adem'in geçeceği yol, teleferiğin geçtiği yoldan 1 km daha uzundur. Teleferik 15 km/h hızla hareket eder, Adem ise 25 km/h hızla kayar.

a) Mersiha'nın ve Adem'in inişi için, alınan yol y'nin (kilometre cinsinden) zaman x'e (saat cinsinden) bağlılığını gösteren formülleri yaz,

b) İki fonksiyonun grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiz,

c) 10 dakika sonra aynı anda tepenin eteğine ulaştıklarına göre, her biri ne kadar yol almıştır?

Ne Artan Ne De Azalan Doğrusal Fonksiyon

Etkinlik

Bir şirket 300 ürün üretmiştir. Makinelerdeki arıza nedeniyle üretim durdurulmuştur. Şirketin ürettiği ürün sayısı artacak mı, azalacak mı yoksa değişmeden mi kalacaktır (ne artacak ne de azalacaktır)?

Örnek 7

Bir buzdolabında sıcaklık bütün gün boyunca −4 °C'dir.

a) Buzdolabındaki sıcaklık y'nin, saat sayısı x'e bağlılığını gösteren formülü yaz.

b) İlk 3 saat için bu ilişkiyi bir tablo ile göster.

c) Doğrusal fonksiyonun eğim katsayısı kaçtır?

d) y değişkeninin değeri, x değişkeninin değerine bağlı olarak nasıl değişir?

a) Sıcaklık −4 °C'dir ve gün boyunca değişmez. Böylece doğrusal fonksiyon $y = -4$ olarak belirlenir.

b)

Geçen zaman (x, saat cinsinden)	1	2	3
Sıcaklık (y)	−4°C	−4°C	−4°C

c) Eğim katsayısı $k = 0$'dır.

d) Tablodan, x değişkeninin değerleri değiştikçe y değişkeninin değerinin değişmediği görülebilir. Verilen doğrusal fonksiyonun **ne artan ne de azalan fonksiyon** (sabit fonksiyon) olduğunu söyleriz.

$y = kx + n$ doğrusal fonksiyonu:

- $k > 0$ ise artandır,
- $k < 0$ ise azalandır,
- $k = 0$ ise sabittir (ne artan ne de azalandır).

Kodu tara ve fonksiyonların grafiklerini incele.

Örnek 8

Çizim 5'te doğrusal fonksiyonların grafiği verilmiştir: a) $y = 3x + 1$, b) $y=-\frac{1}{2}x+1$, c) $y = 2$.

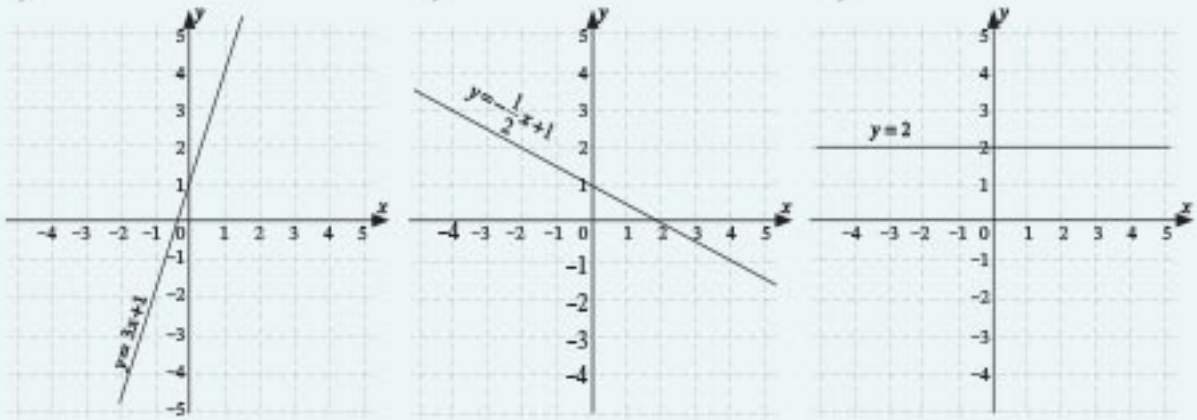
Doğrusal fonksiyonların her biri için artan mı, azalan mı, yoksa ne artan ne de azalan mı olduğunu belirle.

$y = 3x + 1$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinden, x değişkeninin değerleri arttıkça y değişkeninin değerlerinin de arttığını fark ederiz. Buna göre doğrusal fonksiyon artandır.

$y=-\frac{1}{2}x+1$ doğrusal fonksiyonunda, x değişkeninin değerleri arttıkça y değişkeninin değerleri azalır. Buna göre fonksiyon azalandır.

$y = 2$ doğrusal fonksiyonu sabittir. Ne artar ne de azalır.

a) b) c)



çiz. 5

Alıştırma 3

Aşağıdaki doğrusal fonksiyonlar verilmiştir:

$y = -x + 1, y = 4x + 1, y = -3x, y = -2x + 3, y = 2x$ ve $y = x + 2$.

a) Artan fonksiyonları bir koordinat sisteminde, azalan fonksiyonları başka bir koordinat sisteminde çiz.

b) Artan doğrusal fonksiyonlar arasında en hızlı artan hangisidir?

c) Azalan doğrusal fonksiyonlar arasında en hızlı azalan hangisidir?

Alıştırma 4

Aşağıdaki doğrusal fonksiyonlar verilmiştir:

$y = -53x + 7$, $y = 8x + 19$, $y = -45$, $y = -50x + 23$, $y = 78x$, $y = x + 89$,
$y = -x + 95$, $y = 100x + 1$, $y = -325x$, $y = 25$, $y = x + 36$.

Aşağıdaki fonksiyonların tümünü yaz:

a) Artan fonksiyonları belirle. Bu fonksiyonlardan hangisinin değişim oranı (hızı) en büyüktür? Nedenini açıkla.

b) Azalan fonksiyonları belirle. Bu fonksiyonlardan hangisinin değişim oranı (hızı) en küçüktür (en hızlı azalır)? Nedenini açıkla.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aynı koordinat sisteminde verilen doğrusal fonksiyonları çiz:
   $y = x + 2, y = 5x - 3$ ve $y = \frac{1}{4}x + 3$.
   a) Fonksiyonlar artıyor mu, azalıyor mu? b) Hangi fonksiyon en hızlı artar?

2. Aynı koordinat sisteminde doğrusal verilen fonksiyonları çiz: $y = -x + 1, y = -3x + 2$ ve $y = -\frac{3}{4}x$.
   a) Fonksiyonlar artıyor mu, azalıyor mu? b) Hangi fonksiyon en hızlı azalır?

3. Doğrusal fonksiyonlar verilmiştir. Aşağıdaki fonksiyonlardan;
   a) Artan fonksiyonları belirle. Bu fonksiyonlardan hangisinin değişim oranı (hızı) en büyüktür?
   b) Azalan fonksiyonları belirle. Bu fonksiyonlardan hangisinin değişim oranı (hızı) en küçüktür?

4. Çizim yapmadan, aşağıdaki durumlar için fonksiyonun artan mı yoksa azalan mı olacağını kontrol et:
   a) Taksi ücretinin toplam fiyatı, gidilen kilometre sayısına bağlıdır; başlangıç ücreti 50 denar ve her kilometre 30 denardır;
   b) Bir havuzdaki su miktarı zamana bağlıdır; havuzda 8000 litre su vardır ve her saat 100 litre su boşaltılmaktadır;
   c) Azra'nın tatilde geçirdiği günlere bağlı olarak elinde kalacak para miktarı; yanında 20000 denar götürmüş ve günlük 1500 denar harcamayı planlamıştır;
   d) Telefon faturasının tutarı, konuşma süresine bağlıdır; şirket 200 denar abonelik ücreti ve konuşmanın dakikası için 2 denar almaktadır.

5. Ohri'de sabah saat 6'da sıcaklık −3 °C idi ve öğlene kadar her saat 2 °C artmıştır.
   a) Sıcaklık y'nin (Celsius derece cinsinden), zaman x'e (saat cinsinden) bağlılığını ifade eden doğrusal fonksiyonu yaz.
   b) Doğrusal fonksiyonun grafiğini çiz.
   c) Doğrusal fonksiyonun artan mı yoksa azalan mı olduğunu incele.
   d) Sıcaklığın ne zaman 0 °C olacağını belirle.

6. Marko'nun bisiklet mağazalarında çalışmak için iki iş teklifi vardır. Birincisinde günlük 1000 denar ve satılan her bisikletten 500 denar, ikincisinde günlük 1500 denar ve satılan her bisikletten 200 denar teklif edilmektedir.
   a) Kazanılan para miktarı y'nin (denar cinsinden), zaman x'e (gün cinsinden) bağlılığını ifade eden doğrusal fonksiyonu yaz.
   b) Satılan bisiklet sayısına bağlı olarak hangi teklifin daha avantajlı olduğunu açıkla.

7. Roza, çiçekçisinde bir satış elemanı çalıştırmak istiyor. Ona günlük 1200 denar ve satılan her buketten 40 denar mı, yoksa 1500 denar ve satılan her buketten 20 denar mı teklif edeceğine karar veremiyor. Geçen ay çiçekçide günde 30 buket satılmıştır.
   a) Günlük kaç buket satılırsa iki teklif eşit derecede avantajlı olur?
   b) Satış günlük 30 buket olarak kalırsa Roza için hangi teklif daha avantajlıdır?

8. Şehir, işe ulaşımda elektrikli scooter kullanımını teşvik etmek istiyor. Vatandaşlar için iki

seçenek vardır:
Seçenek A: 24000 denar fiyatla kendi elektrikli scooterını satın almak, ayrıca günlük 20 denar şarj gideri.
Seçenek B: Bir uygulama üzerinden günlük 150 denar ücretle scooter kiralamak, başka gider olmadan.

a) Her iki seçenek için toplam maliyet C'nin, kullanım günü sayısı x'e bağlılığını belirleyen doğrusal fonksiyonları yaz.
b) Grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiz.
c) Kaç gün kullanımdan sonra iki seçeneğin giderlerinin eşit olacağını bul.
d) Kısa vadede hangi seçeneğin, uzun vadede hangi seçeneğin daha avantajlı olduğunu ve nedenini açıkla.
e) *B* seçeneğini vatandaşlar için daha ulaşılabilir hâle getirecek fiyatlarda veya koşullarda basit bir değişiklik öner.

Araştırma

Bekim kaydırağa y_1 fonksiyonuna göre çıkıyor, y_2 fonksiyonuna göre iniyor (Çizim 6).

a) y_1 fonksiyonunun eğim katsayısı k_1 nasıl bir sayıdır?
b) y_2 fonksiyonunun eğim katsayısı k_2 nasıl bir sayıdır?
c) Çıkış merdivenlerinden hangileri daha dik olur: $y = 2x + 5$ fonksiyonuna göre yerleştirilenler mi, yoksa $y = 3x + 4$ fonksiyonuna göre yerleştirilenler mi?
d) Kaydırağın iniş bölümü sabit bir fonksiyona göre yerleştirilebilir mi? Cevabını açıkla.



çiz. 6

16. GRAFİĞİ VERİLEN DOĞRUSAL FONKSİYONUN KURALININ BULUNMASI

Doğrusal Fonksiyon Grafiğinin Eksenleri Kestiği Noktalar

Doğrusal fonksiyonun formülünü biliyorsak, grafiğinin koordinat eksenlerini kestiği noktaları bulabiliriz. Aynı şekilde, eksenlerle kesişim noktalarını biliyorsak, fonksiyonun grafiğini çizebilir ve bu fonksiyonun formülünü yazabiliriz.

Etkinlik

1. Aşağıdaki noktalar hangi koordinat ekseni üzerindedir? a) (1, 0), b) (0, −2)
2. (1, 0) ve (0, −2) noktalarının $y = 2x - 2$ doğrusal fonksiyonunun grafiği üzerinde olup olmadığını kontrol et.

Örnek 1

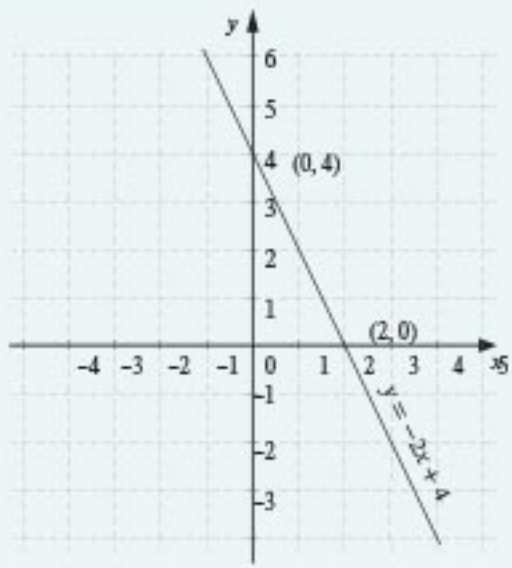
$y = -2x + 4$ fonksiyonu verilmiştir.
a) Doğrusal fonksiyonun grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını bul.
b) Doğrusal fonksiyonun kökünü bul.
c) Doğrusal fonksiyonun grafiğini çiz.

a) **Doğrusal fonksiyonun grafiğinin *y* ekseniyle kesişim noktası**, grafikte x koordinatı 0 olan noktadır.
$x = 0$ için, $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$ olur.
Buna göre (0, 4) noktası, grafiğin y ekseniyle kesişim noktasıdır.
Doğrusal fonksiyonun grafiğinin *x* ekseniyle kesişim noktası, grafikte y koordinatı 0 olan noktadır.
$y = 0$ için, $-2x + 4 = 0$ denklemini çözdüğümüzde $x = 2$ elde ederiz.
Buna göre (2, 0) noktası, grafiğin x ekseniyle kesişim noktasıdır.

b) **Doğrusal fonksiyonun sıfırı**, fonksiyonun değerini 0 yapan x değişkeninin değeridir.
Buna göre, verilen fonksiyonun sıfırı $x = 2$'dir.

c) Verilen doğrusal fonksiyonun grafiği (0, 4) ve (2, 0) noktalarından geçer (Çizim 1).

x	0	2
y	4	0



çiz. 1

Alıştırma 1

$y = 10 - 5x$ doğrusal fonksiyonu verilmiştir.
a) Doğrusal fonksiyonun koordinat eksenleriyle kesişim noktalarının koordinatlarını bul.
b) Doğrusal fonksiyonun sıfırını bul.
c) Doğrusal fonksiyonun grafiğini çiz.

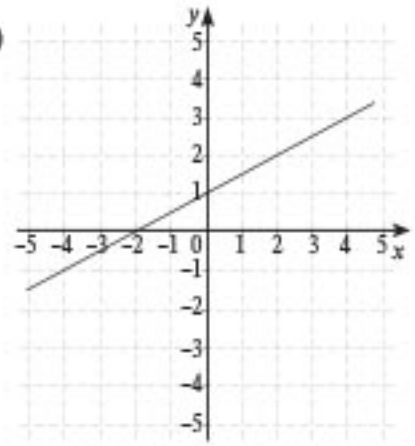
Grafiği Verilen Doğrusal Fonksiyonun Kuralının Bulunması

Grafiği verilen $y = kx + n$ doğrusal fonksiyonunu yazabilmek için, eğim katsayısı k ile sabit terim n değerlerini bulmamız gerekir. Fonksiyonun grafiğinden bu değerleri bulmanın iki yolunu inceleyeceğiz.

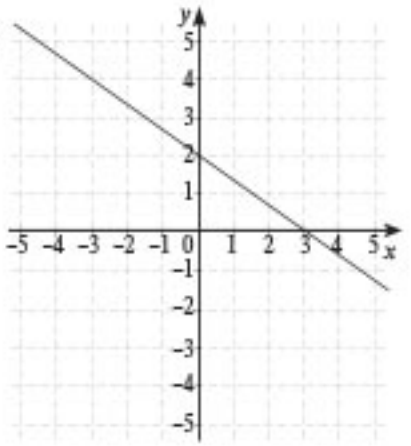
Örnek 2

Çizim 2'de grafiği verilen $y = kx + n$ doğrusal fonksiyonun kuralını bul.

a)



b)



çiz. 2

Eğim katsayısını ve sabit terimi bulmanın birinci yöntemini açıklayalım.

a) **Birinci adım**. Doğrusal fonksiyonun grafiğinin y eksenini $(0, 1)$ noktasında kestiğini görürüz. Buna göre sabit terim $n = 1$ olur.
$y = kx + n$ formülünde $n = 1$ yazarsak,

$y = kx + 1$ elde ederiz.

İkinci adım. Doğrusal fonksiyonun grafiğinin x eksenini $(-2, 0)$ noktasında kestiğini görürüz. Bu noktanın koordinatlarını $y = kx + 1$ formülünde yerine yazarız. Buradan,

$0 = k \cdot (-2) + 1, -1 = -2k, k = \frac{1}{2}$ elde ederiz.

Verilen grafiğe karşılık gelen doğrusal fonksiyon $y = \frac{1}{2}x + 1$ olur.

b) **Birinci adım.** Doğrusal fonksiyonun grafiği y eksenini $(0, 2)$ noktasında kesmektedir. Buna göre sabit terim $n = 2$ olur. $y = kx + n$ formülünde $n = 2$ yazarsak, $y = kx + 2$ elde ederiz.

$$y = kx + 2.$$

İkinci adım. Doğrusal fonksiyonun grafiği x eksenini $(3, 0)$ noktasında kesmektedir. Bu noktanın koordinatlarını $y = kx + 2$ formülünde yerine yazarız. Buradan,

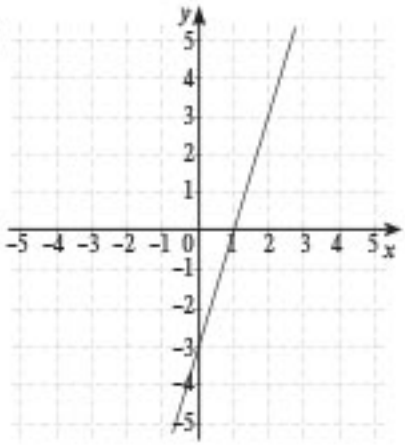
$$0 = 3k + 2,\ -2 = 3k,\ k = -\frac{2}{3} \text{ elde ederiz.}$$

Verilen grafiğe karşılık gelen doğrusal fonksiyon $y = -\frac{2}{3}x + 2$ olur.

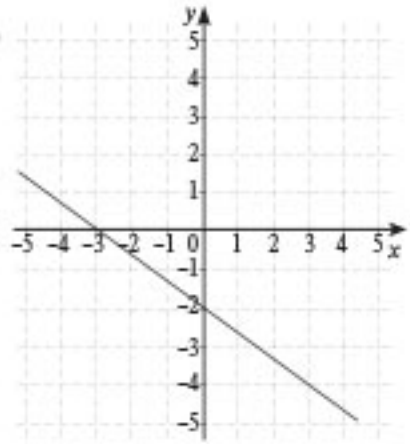
Alıştırma 2

Çizim 3'te grafiği verilen $y = kx + n$ fonksiyonun kuralını bul.

a)



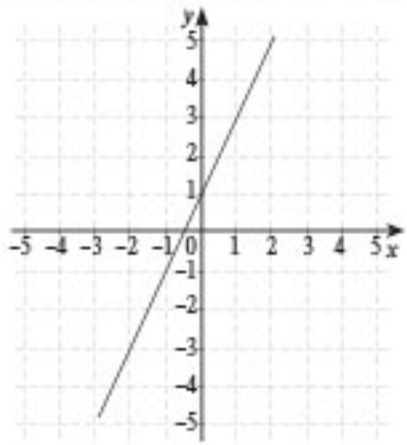
b)



çiz. 3

Örnek 3

Çizim 4'te verilen grafikten doğrusal fonksiyonun kuralını bul.



çiz. 4

Grafiğe göre, x'in art arda gelen dört tam sayı değeri için bir değer tablosu oluştururuz.

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

+2 +2 +2

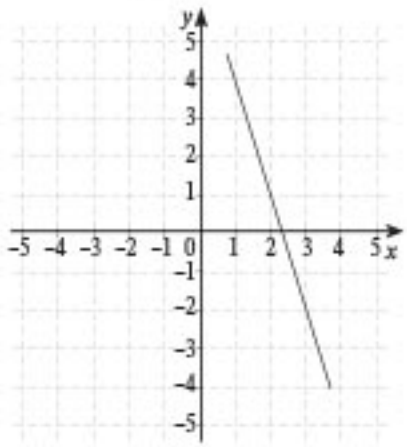
y değerleri dizisinin bir sonraki terimini belirleme kuralının "2 ekle" olduğunu görürüz.
Bu nedenle tabloya, x sayılarının iki katı olan değerlerden oluşan bir satır ekleriz.

	x	1	2	3	4	
·2	y	3	5	7	9	+1
	$2x$	2	4	6	8	

$2x$ değerlerini y değerleriyle karşılaştırdığımızda, $2x$'in her değerinin 1 artırıldığında, karşılık gelen y değerine eşit olduğunu görürüz.
Buna göre doğrusal fonksiyonun kuralı $y = 2x + 1$ olur.

Örnek 4

Çizim 5'te verilen grafikten doğrusal fonksiyonun kuralını bul.



çiz. 5

Grafiğe göre, x'in art arda gelen dört tam sayı değeri için bir değer tablosu oluştururuz.

x	1	2	3	4
y	4	1	−2	−5

-3 -3 -3

y değerleri dizisinin bir sonraki terimini belirleme kuralının "−3 ekle" olduğunu görürüz.
Bu nedenle tabloya, −3 ile x sayısının çarpımlarından oluşan değerleri içeren bir satır ekleriz.

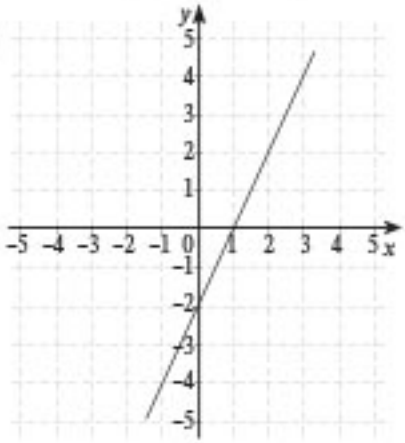
	x	1	2	3	4	
·(−3)	y	4	1	−2	−5	+7
	$-3x$	−3	−6	−9	−12	

$-3x$ değerlerini y değerleriyle karşılaştırdığımızda, $-3x$'in her değerine 7 eklendiğinde, karşılık gelen y değerine eşit olduğunu görürüz. Buna göre doğrusal fonksiyonun kuralı $y = -3x + 7$ olur.

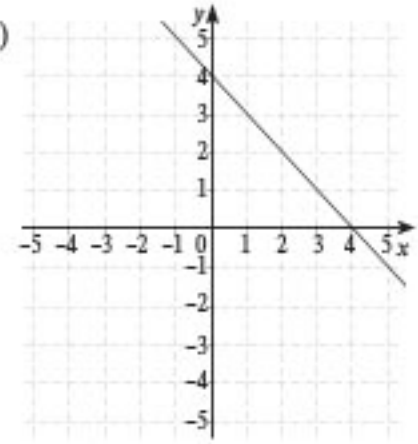
Alıştırma 3

Çizim 6'daki grafikten doğrusal fonksiyonun kuralını bul.

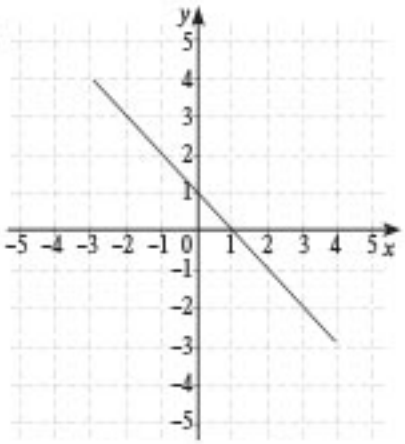
a)



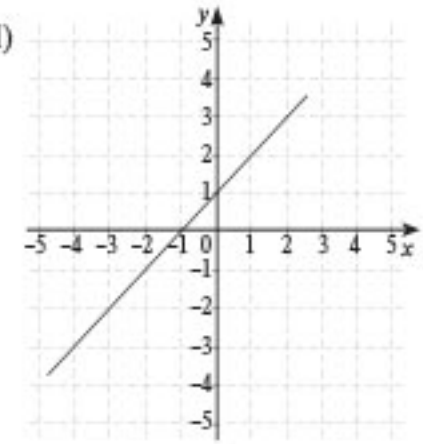
b)



c)



d)

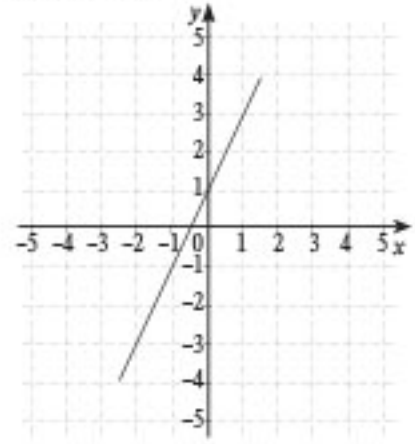


çiz. 6

Örnek 5

Marko, eğimli bir yolda bisiklet sürmektedir. Grafik, alınan mesafe x'e (kilometre cinsinden) bağlı olarak rakımdaki değişim y'yi (metre cinsinden) göstermektedir.

a) Çizim 7'deki grafikle verilen $y = kx + n$ doğrusal fonksiyonun kuralını bul.
b) k katsayısının ve n sabit teriminin anlamını açıkla.
c) Marko 2 km yol aldığında hangi rakımda olacaktır?



çiz. 7

a) Grafikten, doğrunun y eksenini $(0, 1)$ noktasında kestiğini fark ederiz. Bu, $n = 1$ anlamına gelir.
Ayrıca grafik $(1, 3)$ noktasından geçmektedir. Buradan

$$3 = k \cdot 1 + 1, k = 2 \text{ buluruz.}$$

Buna göre doğrusal fonksiyon $y = 2x + 1$'dir.

b) $k = 2$ katsayısı, alınan her 1 km için rakımın 2 m arttığı anlamına gelir. $n = 1$ sabit terimi ise Marko yolun başlangıcındayken, yani $x = 0$ iken, yolun rakımının 1 m olduğu anlamına gelir.

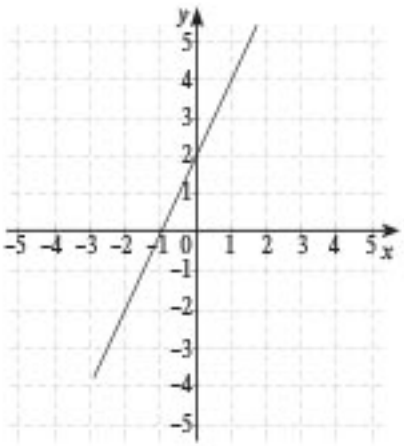
c) $x = 2$ için fonksiyonun değeri $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ m olur. Bu, Marko 2 km yol aldığında 5 m rakımda olacağı anlamına gelir.

Not: Grafik x'in bütün değerleri için gösterilmiş olsa da sorunun bağlamında yalnızca $x \geq 0$ olan bölüm anlamlıdır; çünkü Marko "negatif mesafe" alamaz.

Alıştırma 4

Petar bir dağ yolunda tırmanmaktadır.
Grafik, alınan mesafe x'e (kilometre cinsinden) bağlı olarak rakım y'yi (metre cinsinden) göstermektedir.

a) Çizim 8'deki grafikle verilen $y = kx + n$ doğrusal fonksiyonunu yaz.
b) k katsayısının ve n sabit teriminin anlamını açıkla.
c) Petar 2,5 km yol aldığında hangi rakımda olacaktır?
d) Petar kaç kilometre sonra 14 m yükseklikte olacaktır?



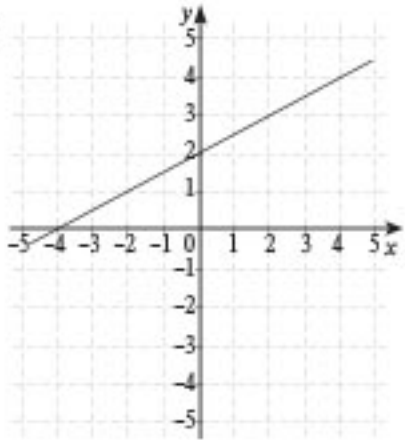
çiz. 8

ALIŞTIRMA SORULARI

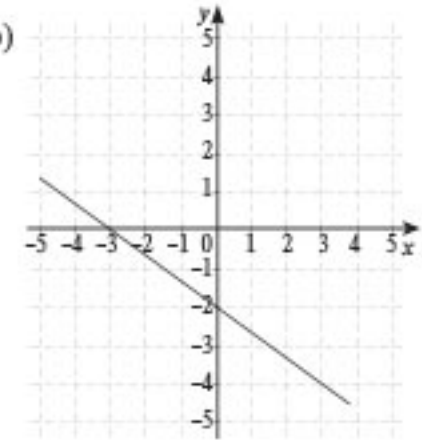
1. Doğrusal fonksiyonun grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını bul:
   a) $y = 2x + 5$, b) $y = -3x + 1$.
2. Doğrusal fonksiyonun sıfırını bul: a) $y = x - 5$, b) $y = -x + 2$.
3. Doğrusal fonksiyonun grafiğini, koordinat eksenleriyle kesişim noktaları yardımıyla çiz:
   a) $y = -2x$, b) $y = -2x + \frac{1}{2}$, c) $y = \frac{3}{5}x - 3$.

4. Çizim 9'daki grafikle verilen $y = kx + n$ doğrusal fonksiyonun kuralını bul.

a)



b)



çiz. 9

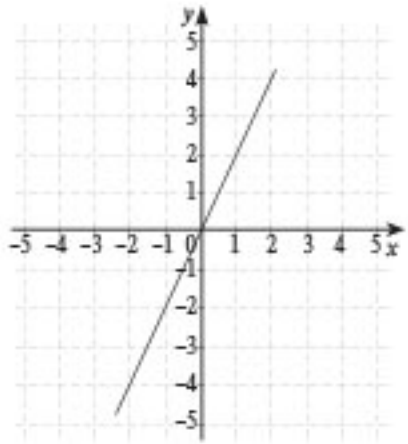
5. Doğrusal fonksiyonun grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktaları şunlardır:
a) (3, 0) ve (0, 4), b) (−4, 0) ve (2, 0).
Doğrusal fonksiyonu çiz ve formülünü yaz.

6. Kökü $x = 2$ olan ve x ekseniyle 45° açı yapan doğrusal fonksiyonu çiz. Grafiğinden fonksiyonun formülünü yaz.

7. Kökü $x = -1$ noktasında olan ve x ekseniyle 135° açı yapan doğrusal fonksiyonu çiz. Grafiğinden fonksiyonun formülünü yaz.

8. Yuliya, yerel mağazadan süt satın alıyor. Sütün fiyatı y (denar cinsinden), satın alacağı süt miktarına (litre cinsinden) bağlıdır.

a) Çizim 10'daki grafiğe göre $y = kx + n$ doğrusal fonksiyonunu yaz.
b) k katsayısının ve n sabit teriminin anlamını açıkla.
c) Yuliya 3 litre süt alırsa ne kadar öder?



çiz. 10

Araştırma

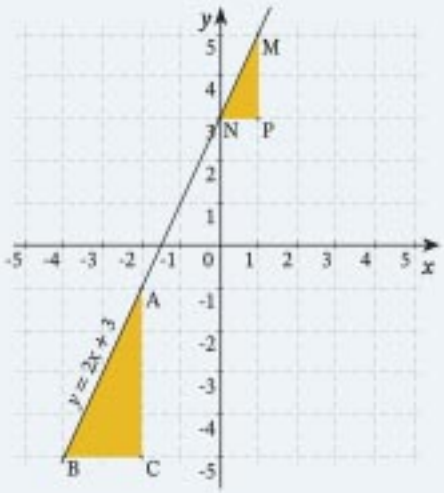
Çizim 11'de $y = 2x + 3$ doğrusal fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir. Doğru üzerinde iki rastgele A ve B noktası, sonra da ABC üçgeni C köşesinde dik açılı bir üçgen olacak şekilde C noktası işaretlenmiştir.

a) Grafiğe göre AC dik kenarının uzunluğunun BC dik kenarının uzunluğuna bölümünü hesapla.

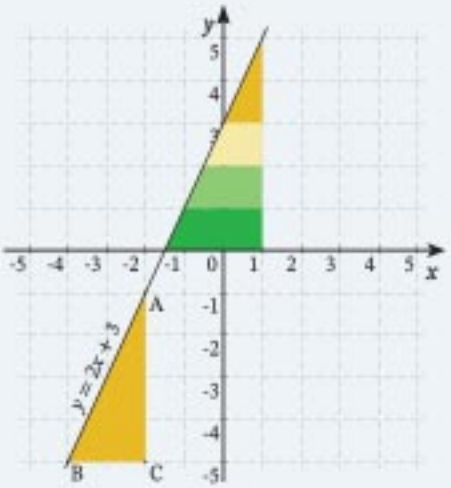
b) Aynı şekilde, MNP üçgeninin MP dik kenarının uzunluğunun NP dik kenarının uzunluğuna bölümünü hesapla.

c) Doğru üzerindeki rastgele her nokta çifti için, iki noktadan eksenlere paralel doğrular çizerek dik üçgenler elde ederiz (Çizim 12). Bu üçgenlerde y eksenine paralel dik kenarın, x eksenine paralel dik kenara bölümünün kaç olduğunu hesapla. Bunu verilen doğrusal fonksiyonun katsayısı ile karşılaştır. Ne sonuç çıkarıyorsun?

d) Bu sonuç, verilen grafiğe göre $y = kx + n$ doğrusal fonksiyonunu yazma işleminde sana nasıl yardımcı olur?



çiz. 11



çiz. 12

TEKRAR VE PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Monomu normal biçime getir:
a) xy^3x^2y, b) $6xy(-2x^4y)$, c) $-4xy^2(-5xy)$, d) $xyxyy4xy$.
Monomlar arasında benzer olanlar var mı?

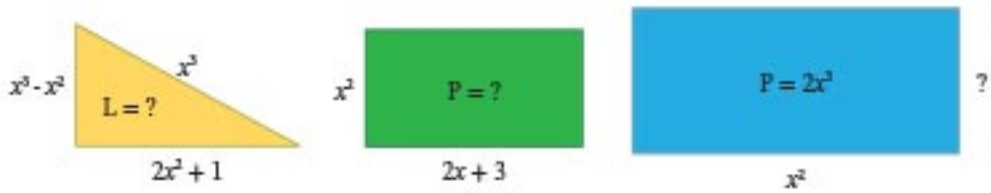
2. Monomlar kaçıncı derecedendir: a) x^3y^4, b) xy, c) $5x^2y^3z$, d) 3 ?

3. $-a^2b$ ve $3a^2b$ monomlarının toplamından, aynı monomların farkını çıkar.

4. Monomların çarpımını bul: a) $4x^3 \cdot x^4 \cdot 2x^5$, b) $a^2b \cdot (-2a^3b^2) \cdot 7ab^3$.

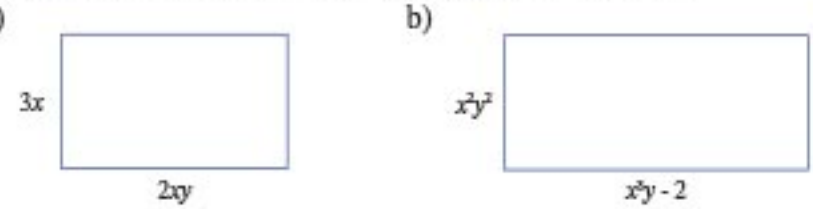
5. Monomların bölümünü bul: a) $5x^5y^3 : (-20x^2y^2)$, b) $27a^4b : 3a^3b$.

6. Çizim 1'de verilen elemanlara göre istenen büyüklükleri ifade eden cebirsel ifadeyi yaz:



çiz. 1

7. Çizim 2'deki dikdörtgenin alanı için cebirsel ifadeyi yaz:



çiz. 2

8. Polinomları normal biçimde yaz, sonra derecesini belirle:
a) $3xy + x - 5xy + 1$, b) $7ab^2 - 4ab + 5ab + ab^2$,
c) $x^2 - (2x)^3 + xxx - x^2$, d) $2xy^3 + 5(xy)^2z - (3xy)^2z + 8xyy^2$.

9. $A = 6x^2 - 5x + 1$, $B = x^2 + 3x - 2$ ve $C = x + 3$ polinomları verilmiştir.
Aşağıdaki polinomları bul:
a) $A + B + C$, b) $A - B$, c) $C + B - A$, d) $-A + B - C$.

10. Verilen polinomları normal biçimde yaz: a) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}-\frac{5y}{6}+\frac{4x}{3}$, b) $\frac{2x}{7}+\frac{3y}{8}-\frac{3x}{2}+2x$.

11. İki otomobil aynı yönde hareket etmektedir. Birinci otomobilin hızı zamana t bağlı olarak $v_1 = 2{,}5t^2 + 0{,}5t + 10$ formülüyle, ikinci otomobilinki ise $v_2 = 1{,}5t^2 + 0{,}8t + 9{,}5$ formülüyle verilmiştir. Hızlarının zamana t bağlı farkını gösteren cebirsel ifadeyi yaz ve sadeleştir.

12. Belirtilen işlemleri yap:
a) $5x^2 + 2x(4x - 1)$, b) $x^2(3x^3 - 2x) - 4(x^3 + 1)$,
c) $(24y^6 + 18y^4) : (-6y^2) + 21y^5 : (-7y^3)$, d) $(5x^3 - x^2y) : x^2 + (30xy - 25y^2) : (-5y)$.

13. $x = 2, y = -3, z = 4$ ise ifadenin değerini hesapla:
a) $3(2x - y^2) + 4(yz + 1)$, b) $2(-x^3 + 1) - 3yz$,
c) $5(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$, d) $2(xy^2 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

14. Nina kurabiye satmaktadır. Pazartesi günü 18 kurabiye satmıştır. Salı günü 22 kurabiye, çarşamba günü 26 kurabiye satmıştır vb.
a) Cumartesi günü kaç kurabiye satmıştır?
b) Nina'nın pazar günü çalışmadığı biliniyorsa, bir haftada toplam kaç kurabiye satmıştır?

15. Genel terimi $a_n = 7n + 1$ olan dizi verilmiştir. Diziyle ilgili verilen seçenekleri hesapla:
a) ilk 3 terimi, b) sıra numarası 300 ve 458 olan terimleri.

16. Dizinin genel terimini belirle:
a) 12, 15, 18, ..., b) 5, 11, 17, ..., c) 28, 24, 20, ..., d) 14, 9, 4, ...

17. Çizim 3'te verilen örüntüyle gösterilen dizinin genel terimini bul.



çiz. 3

18. Denklemleri çöz: a) $x-\frac{2}{5}=\frac{x}{10}+\frac{1}{2}$, b) $x-\frac{x}{4}-3=\frac{x}{6}-\frac{x}{3}+2$.

19. Denklemleri çöz: a) $\frac{2}{3}(x-1)+4=\frac{x}{6}$, b) $\frac{1}{8}(2x+3)-\frac{1}{2}(x-1)=\frac{3}{4}$.

20. Denklemleri çöz: a) $0,75x-0,25-\frac{2x}{3}=\frac{1}{3}-4x$, b) $1,25x-0,25-1,5x=x-1,5$.

21. Mariya'nın sahip olduğu paranın yarısının, 2500 denar azaltılmış değeri, onun miktarının üçte biri kadar azaltılmış 1500 denara eşittir. Mariya'nın kaç denarı vardır?

22. Dikdörtgenin küçük kenarını bul. Bu kenar, büyük kenarın $\frac{1}{6}$'sı ve çevrenin $\frac{1}{14}$'üdür.

23. Doğrusal fonksiyonların grafiğini çiz: a) $y = 3x - 5$, b) $y = -x + 3$, c) $y = \frac{1}{3}x$.

24. Doğrusal fonksiyonun sıfırını bul: a) $y = -x - 4$, b) $y = \frac{x}{4} + 2$.

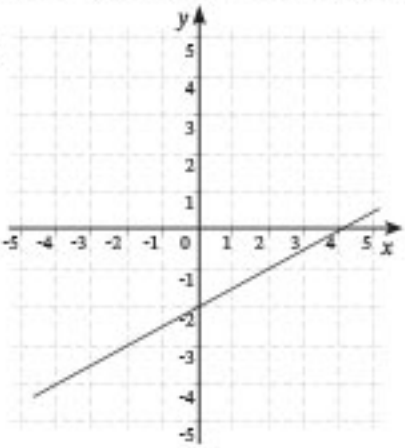
25. Doğrusal fonksiyonlar verilmiştir:
$y = -x + 6$, $y = 7x + 26$, $y = -46$, $y = -35x + 4$, $y = 9x$, $y = x + 1$,
$y = -x + 23$, $y = 54x + 43$, $y = -397x$, $y = 200$, $y = x + 100$.
Aşağıdaki fonksiyonlardan;
a) Artan fonksiyonları belirleyiniz. Bu fonksiyonlardan hangisinin değişim oranı (hızı) en büyüktür?
b) Azalan fonksiyonları belirleyiniz. Bu fonksiyonlardan hangisinin değişim oranı (hızı) en küçüktür?

26. Grafiği $y = 2x + 1$ doğrusal fonksiyonunun grafiğine paralel olan ve $y = x + 3$ doğrusal fonksiyonunun grafiğiyle y ekseni üzerinde kesişen doğrusal fonksiyonu yaz.

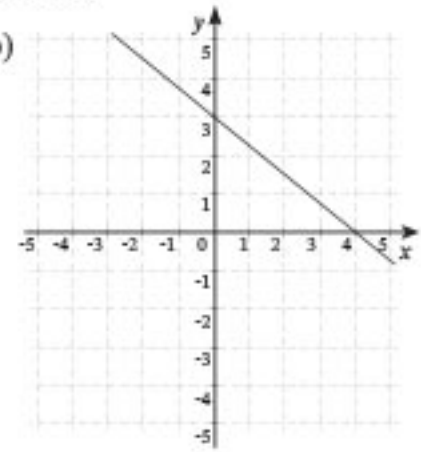
27. $y = -x + 2$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çiz, sonra aşağıdaki istenenleri cevapla:
a) Eğim katsayısı kaçtır? b) Grafiği y eksenini hangi noktada keser?
c) Fonksiyonun kökü kaçtır? d) Fonksiyonun değişimini açıkla,
e) Fonksiyonun değeri 5 ise bağımsız değişkenin değerini bul,
f) Bağımsız değişken -2 değerini alıyorsa fonksiyonun değerini bul.

28. Çizim 4'te grafiği verilen doğrusal fonksiyonun kuralını:

a)



b)



çiz. 4

29. A araç kiralama şirketinde günlük kira 500 denardır, ayrıca gidilen kilometre başına 40 denar ödenir. *B* şirketinde günlük kira 400 denardır, ayrıca gidilen kilometre başına 50 denar ödenir.

a) Gidilen kilometre sayısına bağlı olarak kiralamanın hangi şirkette daha uygun olduğunu açıkla.

b) 300 km uzunluğundaki bir yol için kiralama hangi şirkette daha uygundur?

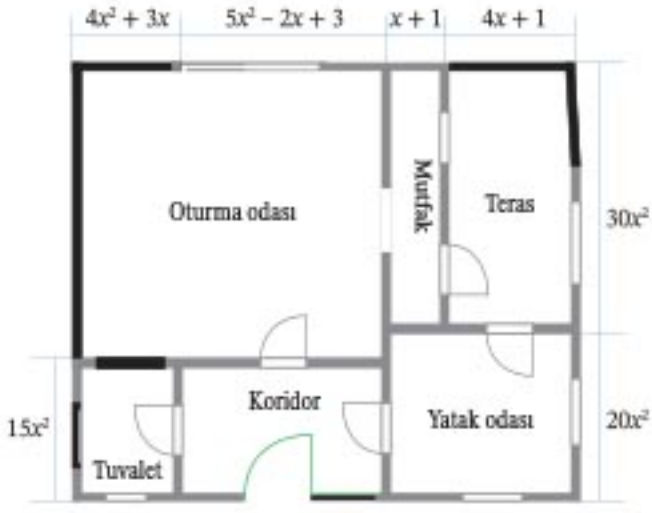
c) 500 km'lik bir yol için daha uygun teklif seçilirse ne kadar tasarruf edilir?

30. Sonya, bahçesindeki nergisleri çoğaltmak istiyor. Her kökten yeni oluşan 5 soğanı çıkaracak ve eski bitkiyi de koruyacaktır.

a) Çoğaltmadan önceki nergis sayısı x'e bağlı olarak çoğaltmadan sonraki nergis sayısı y'yi gösteren fonksiyonu yaz.

b) 7 nergisin çoğaltılmasından sonra Sonya'nın kaç bitkisi olur?

31. Çizim 5'te, tüm uzunlukların metre cinsinden verildiği bir dairenin planı verilmiştir.



çiz. 5

a) Verilen plana göre aşağıdaki ifadeleri normal biçimde yaz:

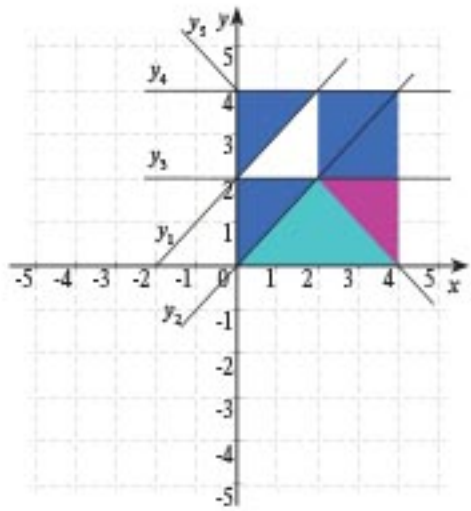
- Her odanın alanı,
- Dairenin toplam alanı,
- Her odanın çevresi.

b) $x = 0{,}4$ ise teras, tuvalet ve koridor zeminini döşemek için toplam kaç metrekare fayans gerekir?

c) Kapı açıklıkları 0,8'er ise yatak odasının zemini için kaç metre süpürgelik gerekir?

d) $x = 0{,}4$ ise oturma odası ve yatak odası zemini için kaç metrekare parke gerekir?

32. Çizim 6'daki resmi oluşturmak için kullanılan y_1, y_2, y_3, y_4 ve y_5 doğrusal fonksiyonlarının formüllerini yaz.



çiz. 6

33. Aynı koordinat sisteminde aşağıdaki doğrusal fonksiyonların grafiklerini çiz:

$y = 2x, y = -2x, y = x - 8, y = -x - 8, y = 2x - 8, y = -x/2 - 2$ ve $y = -x/2 + 6$.

Çizilen grafiklerle sınırlandırılan düzlem bölgelerini farklı renklere boyayarak sanatsal bir çizim oluştur.

Konu 4:

ÖLÇME

Öğrenme sonuçları:

Bu konuyu öğrenirken şunları yapabileceksin:

- Problemleri hesaplama veya grafiklerle çözerken zaman ölçü birimlerini kullanmayı.
- Farklı bağlamlarda ölçme, tahmin etme, hesaplama ve problem çözme için uygun ölçü birimlerini seçmek; uzunluk, alan ve hacim birimlerini kullanmayı.

1. ZAMAN ÖLÇÜ BİRİMLERİ

Etkinlik

Mehmed her sabah 30 dakika koşuyor. Mehmed haftada kaç saat koşar?

Zamanı ölçmek için en çok kullanılan ölçülerden biri gündür. Bu, Dünya'nın kendi ekseni etrafında bir kez dönmesi için gereken süredir.

Günden daha küçük zaman ölçü birimleri şunlardır: **saat (sa), dakika (dk)** ve **saniye (sn).**
Günden daha büyük zaman ölçü birimleri şunlardır: **hafta, ay, yıl.**
Hafta, 7 günden oluşan süredir. Ay, 28, 29, 30 veya 31 günden oluşan süredir; ancak hesaplama yaparken **bir ayı 30 gün** olarak alırız.

Yıl, Dünya'nın Güneş etrafında bir kez dönmesi için gereken süredir ve 365 gün 6 saat'tir. Hesaplamayı kolaylaştırmak için art arda üç yılın 365 gün, her dördüncü yılın ise 366 gün olması kabul edilmiştir. 365 gün olan yıllara **normal** yıl, 366 gün olan yıla ise **artık yıl** denir. Artık yılda şubat ayı 29 gün olurken normal yıllarda 28 gündür. Hesaplama yaparken yılı **365 gün olarak alırız.**

Yıldan daha büyük ölçü birimleri de kullanılır. Bunlar: 10 yıl olan **on yıl**, 100 yıl olan **yüzyıl** ve 1000 yıl olan **bin** yıldır.
Bir yıl 12 ay veya 52 hafta ve 1 gündür; artık yıllarda ise 52 hafta ve 2 gündür. Hesaplama yaparken **yılı 52 hafta olarak** alırız.

Bir **saniyelik** zaman, temel zaman ölçü birimidir.

Hatırlayın, zaman ölçü birimleri arasında aşağıdaki ilişki vardır:

ölçü birimi	**zaman ölçü birimleri**
saniye (sn)	temel ölçü birimi
dakika (dk)	1 min = 60 sn
saat (sa)	1 sa = 60 dk = 3600 sn
gün	1 gün = 24 sa = 1440 dk = 86400 sn
hafta	1 hafta = 7 gün = 168 sa = 10080 dk = 604800 sn
ay	Hesaplamalarda 1 ay 30 gün olarak alınır.
yıl	1 yıl = 12 ay = 365 gün
on yıl	1 on yıl = 10 yıl = 120 ay = 3650 gün
yüzyıl	1 yüzyıl = 100 yıl
bin yıl	1 bin yıl = 10 yüzyıl = 1000 yıl

Saniyeden daha küçük ölçü birimleri de vardır. Bunlar onda bir saniye, yüzde bir saniye ve binde bir saniye gibi birimlerdir. Bu birimler en çok spor yarışmalarında kullanılır.

Örnek 1

Şunlarda kaç saat vardır: a) 5 gün, b) 570 dakika, c) 1 ay?

a) Bir günde 24 saat vardır, bu nedenle 5 günde $5 \cdot 24$ saat $= 120$ saat vardır.
b) $570 = 9 \cdot 60 + 30 = 9$ saat 30 dakika.
c) 1 ayın 30 gün olduğunu kabul ederiz, bu nedenle 1 ay $= 30 \cdot 24$ saat $= 720$ saat.

Örnek 2

Şunlarda kaç dakika vardır: a) 1 gün ve 3 saat, b) 2700 saniye?

a) 1 gün ve 3 saat, $(24 + 3)$ saat $= 27$ saat $= 27 \cdot 60$ dakika $= 1620$ dakika eder.
b) $2700 : 60 = 45$ dakika.

Alıştırma 1

Şunlarda kaç dakika vardır: a) 2 gün ve 2 saat, b) 3180 saniye?

Örnek 3

Şunlarda kaç saniye vardır: a) 5 saat 14 dakika, b) 3,5 saat?

a) 5 saat 14 dakika $= (5 \cdot 60 + 14)$ dakika $= 314$ dakika $= 314 \cdot 60$ saniye $= 18840$ saniye,
b) 3,5 saat $= 3{,}5 \cdot 60$ dakika $= 210$ dakika $= 210 \cdot 60$ saniye $= 12600$ saniye.

Alıştırma 2

Şunlarda kaç saniye vardır: a) 3 saat 27 dakika, b) 3,2 saat?

Örnek 4

9256 saniyede kaç saat, dakika ve saniye vardır?

1 dakika $= 60$ saniye ve 1 saat $= 60$ dakika
9256 saniye $= 154$ dakika 16 saniye $= 2$ saat 34 dakika 16 saniye elde ederiz.
9256 saniye $= 2$ saat 34 dakika 16 saniye olduğu sonucuna varırız.

Alıştırma 3

Şunlarda kaç saat, dakika ve saniye vardır: a) 8410 saniye, b) 12568 saniye?

Örnek 5

Sara 14 yıl 7 aylıktır. Annesi ondan 374 ay büyüktür. Sara'nın annesi kaç yaşındadır?

Yaş farkı olan 374 ayı bölme işlemiyle yıl ve aya çevireceğiz:

$$\begin{array}{r} 374 : 12 = 31 \\ -\ \underline{36} \\ \quad 14 \\ -\ \underline{12} \\ \quad 2 \end{array}$$

Buna göre annesi, Sara'dan 31 yıl 2 ay büyüktür. Sara'nın annesi $14 + 31 = 45$ yıl ve $7 + 2 = 9$ aylıktır.

Alıştırma 4

Kadınlar maratonunda 1963 yılında *ABD* adına kırılan dünya rekoru 3 saat 37 dakika ve 7 saniyeydi. Kenya adına 2024 yılında kırılan güncel dünya rekoru 1 saat 27 dakika ve 13 saniye iyileştirilmiştir.
Yeni dünya rekoru: a) saat, dakika ve saniye olarak, b) saniye olarak kaçtır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Şunlarda kaç saniye vardır: a) 15 saat 23 dakika, b) 6 saat 15 dakika 35 saniye?
2. Şunlarda kaç saat ve dakika vardır: a) 523 dakika, b) 1000 dakika?
3. Yıla çevirin: a) 3 yüzyıl ve 8 on yıl, b) 1 bin yıl, 6 yüzyıl ve 4 on yıl.
4. Hangisi daha büyüktür?
   a) 6 ay mı yoksa 3800 saat mi,
   b) 3 yıl ve 2 ay mı yoksa 1500 gün mü,
   c) 7 saat ve 43 dakika mı yoksa 450 dakika mı,
   d) 5 saat 15 dakika ve 35 saniye mi yoksa 200 000 saniye mi?
5. Sayıları en küçüğünden başlayarak büyüklüklerine göre sıralayın: 730 gün, 2 yıl, 90 hafta ve 32 ay.
6. Nika 12 yıl 3 ay ve 5 günlüktür. Nika 85 ay sonra kaç yıl, ay ve günlük olacaktır?
7. Ana ve Ema birlikte 358 aylıktır. Ana 15 yıl 4 aylıktır. Ema kaç yaşındadır?
8. Televizyon programında film maratonu öğleden sonra saat 9 : 15'te başlamış, ertesi gün öğleden önce saat 6 : 45'te bitmiştir. Maratonun kaç dakika sürdüğünü hesaplayın.

Araştırma

İnternette bazı başka gök cisimlerinde yılın, ayın ve günün ne kadar sürdüğünü araştırın. Daha sonra alıştırmaları çözün. Hesaplamalar için hesap makinesi kullanın.

a) Mars'tan Dünya'ya doğru, Dünya'daki uzay araçlarından daha hızlı hareket eden bir araçla yolculuğa çıkarsanız, Dünya'ya 2400 saat 180 dakika ve 360 saniyede ulaşırsınız (Dünya zamanıyla ölçülmüştür). Bu zamanı gün, saat ve dakikaya çevirin.

b) Lina, Dünya zamanı ile 13 yıl 5 ay ve 12 günlüktür. Lina, Mars zamanı ile hesaplandığında kaç yıl, ay ve günlüktür?

c) Marko, Dünya zamanı ile 14 yıl 8 ay ve 22 günlüktür. Marko, Satürn zamanı ile ölçüldüğünde kaç yıl, ay ve günlüktür?

2. ZAMAN BAĞLAMINDA GRAFİKLER

Yol-Zaman Grafiği

Etkinlik

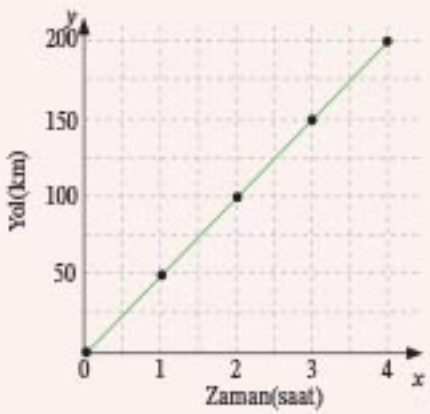
Çizim 1'deki grafikte bir otomobilin yolculuğu gösterilmiştir.

a) Otomobil 100 kilometreyi ne kadar sürede gitmiştir?

b) Otomobil 3 saatlik sürede kaç kilometre gitmiştir?

c) Otomobil 1 saatlik sürede kaç kilometre gitmiştir?

d) Otomobil hangi hızla hareket etmektedir?



Çiz. 1

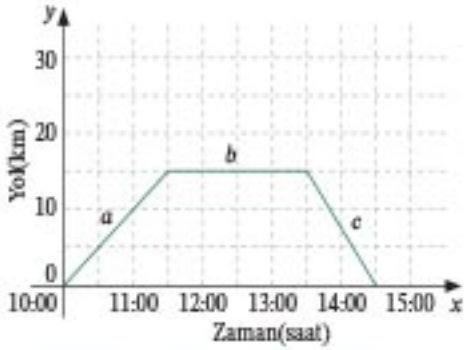
Yol-zaman grafiği ile bir cismin aldığı yolun geçen zamana bağlılığı gösterilir. Grafiği koordinat sisteminde çizeriz; zamanı x ekseninde, uzaklığı (yolu) ise y ekseninde gösteririz.

Yol-zaman grafiği, cisimlerin ve insanların hareketlerini incelememize yardımcı olur.
Yani grafikten, bir cismin belirli bir sürede ne kadar uzağa ulaştığını, cismin durup durmadığını, hareket edip etmediğini, hızlanıp hızlanmadığını veya yavaşlayıp yavaşlamadığını okuyabiliriz; ayrıca cismin belirli bir aşamada hangi hızla hareket ettiğini de bulabiliriz.

Kodu tarayın ve hareket grafiğini inceleyin.

Örnek 1

Çizim 2'deki grafik, Ema'nın bisikletle toplantıya gidişini ve geri dönüşünü göstermektedir.
a) Ema evden toplantı yerine kadar ne kadar süre yolculuk etmiştir?
b) Toplantıda ne kadar süre kalmıştır?
c) Ema ne zaman daha hızlı bisiklet sürmüştür, giderken mi yoksa dönerken mi?
d) Her bir aşamada hangi hızla hareket etmiştir?



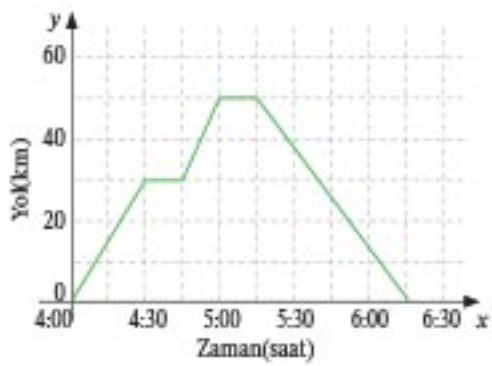
Çiz. 2

a) Ema saat 10:00'da yola çıkmış, 11:30'da varmıştır; bu, bir buçuk saat yolculuk ettiği anlamına gelir.
b) Grafikten, 11:30'dan 13:30'a kadar Ema'nın evden aynı uzaklıkta bulunduğunu görüyoruz. Buna göre toplantıda 2 saat kalmıştır.
c) Gidiş yolunu (a aşaması) Ema 1,5 saatte gitmiş, aynı yolu dönüşte (b aşaması) 1 saatte gitmiştir; yani dönüşte daha hızlı bisiklet sürmüştür.
d) *a* aşamasında 15 km'yi 1,5 saatte gitmiştir; bu nedenle hızı 15 : 1,5 = 10 km/saat olur. *b* aşamasında hızı 0 km/saat'tir (durma hâli), c aşamasında ise 1 saatte 15 km gitmiştir; bu nedenle hızı 15 km/saat olmuştur.

Alıştırma 1

Çizim 3'teki grafikte, yolcuyu saat 4:00'te alan, onu saat 5:00'te havaalanına götüren ve geri dönen bir taksi aracının yolculuğu gösterilmiştir.

a) Araç toplam kaç kilometre yol gitmiştir?
b) Araç ne kadar süre hareketsiz kalmıştır?



Çiz. 3

c) Araç başlangıç noktasından havaalanına kadar giderken ne kadar süre yol almıştır?
d) Yolculuğun hangi aşamasında araç en hızlı gitmiştir?

Örnek 2

Marko saat 17:00'de evden çıkmıştır. 1 saat araç kullanmış ve bu sırada komşu şehre kadar 58 kilometre yol gitmiştir. Orada yarım saat kalmıştır. Daha sonra geri dönmek için yola çıkmış ve eve kadar 1,5 saat yolculuk yapmıştır. Marko'nun yolculuğunu gösteren bir grafik çizin.

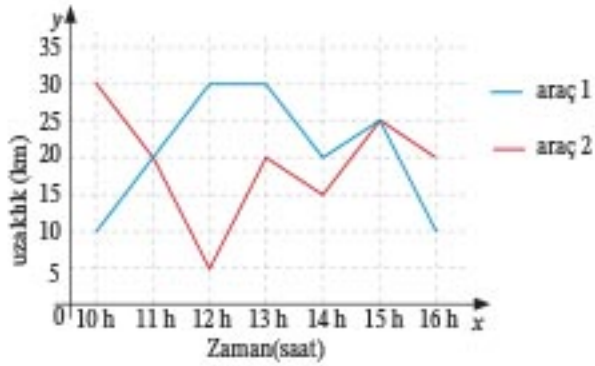
Çizim 4'te Marko'nun yolculuğunun grafiği gösterilmiştir.



Çiz. 4

Örnek 3

Çizim 5'teki grafikte, altı saatlik çalışma süresi boyunca iki taksi aracının taksi durağına olan uzaklıklarına göre hareketi gösterilmiştir.
a) Altı saatlik süre içinde kaç kez duraktan aynı uzaklıkta bulunmuşlardır? Saat kaçta?
b) Altı saatlik süre içinde hangi araç daha fazla yol gitmiştir?



Çiz. 5

a) Grafikten araçların hareket çizgilerinin iki yerde kesiştiğini görüyoruz; bu, saat 11'de ve saat 15'te istasyondan aynı uzaklıkta olacakları anlamına gelir.
b) Araç 1, 20 km + 10 km + 5 km + 15 km = 50 km yol gitmiştir.
Araç 2, 10 km + 15 km + 15 km + 5 km + 10 km + 5 km = 60 km yol gitmiştir.

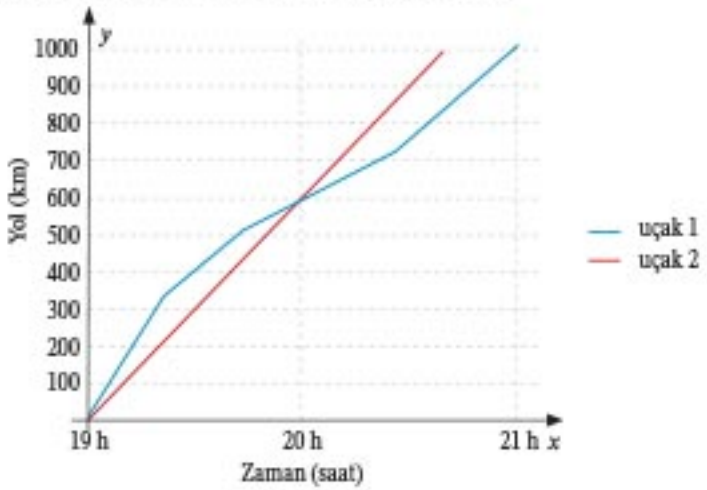
Alıştırma 2

Çizim 6'daki grafikte, aynı anda hareket eden iki uçak hattının güzergâhı gösterilmiştir.

a) Uçuş süresi boyunca kaç kez havaalanından aynı uzaklıkta bulunmuşlardır? Saat kaçta?

b) Uçaklardan hangisi daha erken varmıştır ve ne kadar süre farkla?

c) Hangi uçak kendi uçuş süresi boyunca daha fazla yol gitmiştir?



Çiz. 6

Zaman Bağlamında Diğer Grafikler

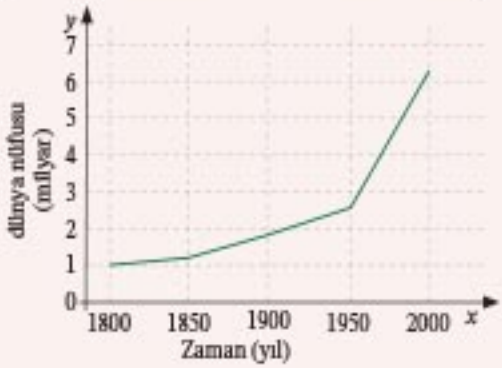
Etkinlik

Zaman geçtikçe gezegendeki insan sayısı artmaktadır. Bu artış Çizim 7'de gösterilmiştir.

a) 1800 yılından 2000 yılına kadar dünya nüfusu kaç kişi artmıştır?

b) 1800 yılından 1950 yılına kadar dünya nüfusu kaç kişi artmıştır?

c) Nüfusta en büyük artış hangi dönemde ve ne kadar olarak gözlemlenmiştir?



Çiz. 7

Birçok günlük etkinlik ile doğal ve toplumsal olay, çeşitli zaman aralıkları içinde gerçekleşir.

Kodu tarayın ve hareket grafiklerini inceleyin.

Bu sırada etkinlikleri ve olayları karakterize eden büyüklükler zamanla değişir.
Bu değişimleri, büyüklüğün değişiminin geçen zamana bağlılığını gösteren bir grafik oluşturarak açıklarız.

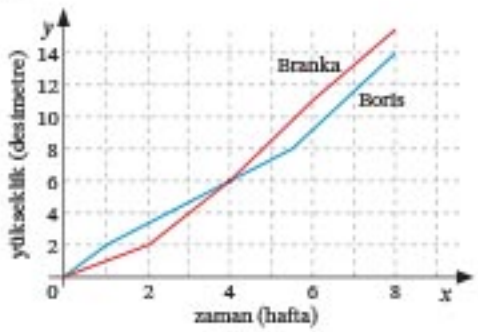
Örnek 4

Branka ve Boris, bahçelerinin her biri kendisine ait ayrı bir bölümünde domates dikmektedir. Branka bitkileri haftada 3 ile 5 kez sulamakta, Boris ise sadece haftada 1 ile 2 kez sulanması gerektiğini düşünmektedir. Her biri kendi bitkilerinin boylarını ölçmektedir. Domateslerinin büyüme diyagramı Çizim 8'de verilmiştir.

a) Sulama konusunda kim haklıdır? Nasıl sonuç çıkarıyorsunuz?

b) Branka'nın domatesleri ile Boris'in domatesleri ne kadar zaman sonra aynı boya sahip olmuştur?

c) Hangi zaman aralığında Branka'nın domatesleri, hangi zaman aralığında ise Boris'in domatesleri daha büyüktür?



Çiz. 8

a) Branka haklıdır. Onun bitkileri daha büyük bir boya ulaşmıştır.

b) Grafiklerin 4 hafta sonra kesiştiğini görüyoruz. Buna göre, 4 hafta sonra Boris'in ve Branka'nın bitkileri aynı boya sahip olmuştur.

c) İlk 4 haftada Boris'in domatesleri daha uzundu; ikinci 4 haftada ise Branka'nın domatesleri daha uzundu.

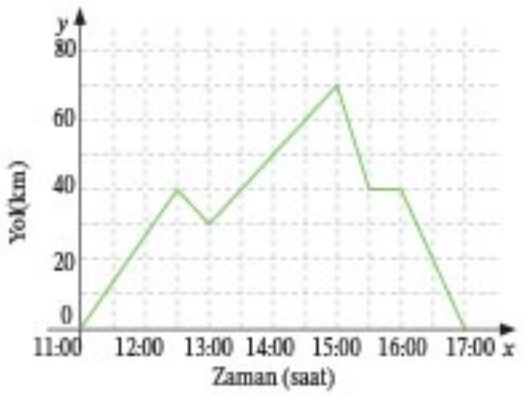
Alıştırma 3

Tabloda Berovo, Prilep ve Üsküp'te bir yıl boyunca görülen ortalama aylık sıcaklıklar verilmiştir. Yılın ilk 6 ayında sıcaklık değişimini gösteren bir grafik çizin.

Şehir	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran
Berovo	2	1	6	8	12	22
Prilep	5	4	15	20	22	28
Üsküp	8	4	18	23	25	29

ALIŞTIRMA SORULARI

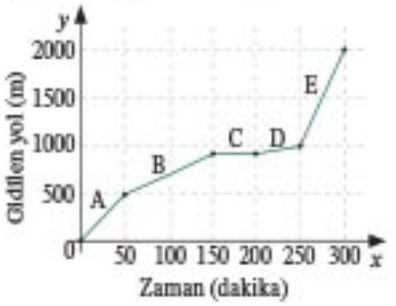
1. Çizim 9'daki grafikte, bir turist otobüsüyle yapılan tarihî yerler gezisi gösterilmiştir.



Çiz. 9

a) Otobüs toplam kaç kilometre yol gitmiştir?
b) Mola ne kadar sürmüştür?
c) Otobüs saat kaçtan kaça kadar en hızlı gitmiştir?
d) Saat 13'ten 15'e kadar hangi hızla gitmiştir?

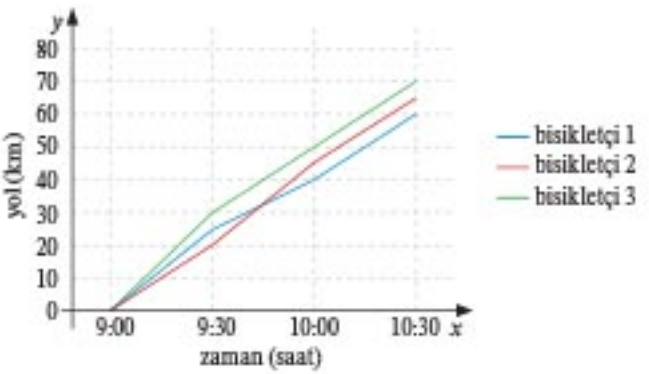
2. Bir bisikletli bir tepeye tırmanmakta, sonra aşağı inmektedir. Hareketi 5 aşamada gerçekleşmektedir: A – düz yolda sürüş, B – yokuş yukarı sürüş, C – dinlenme, D – bisikleti itme ve E – iniş. Bunlar Çizim 10'daki grafikle gösterilmiştir:



Çiz. 10

a) Sürüş kaç dakika sürmüştür?
b) Bisikletli bisikleti ne kadar süre itmiştir?
c) 250 dakika sonra ne kadar yol gitmiştir?
d) Hangi aşamada en fazla yol gitmiştir?
e) Bisikletli hangi aşamada en hızlı hareket etmiştir?

3. Çizim 11'deki grafikte, tepelik bir parkurda antrenman yapan üç bisikletçinin yolu gösterilmiştir.



Çiz. 11

a) Bisikletçilerden hangisi ilk 30 dakikada en hızlı gitmiştir?

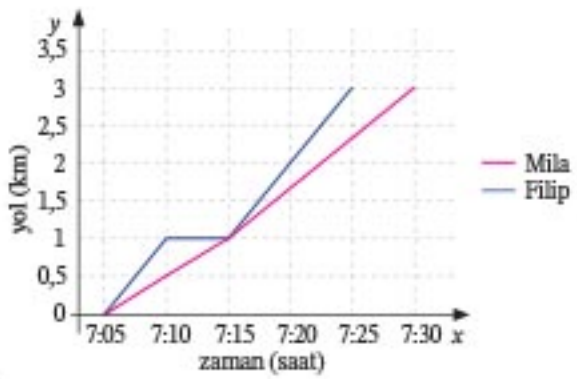
b) Her biri ne kadar yol gitmiştir?

c) Saat 9:30'dan 10:00'a kadar en yavaş kim gitmiştir?

4. Çizim 12'deki grafikte, Mila ve Filip'in evlerinden okula kadar yaptıkları yolculuklar gösterilmiştir.

x ekseninde zaman (7:05'ten 7:30'a kadar), *y* ekseninde ise evden uzaklık (kilometre cinsinden) verilmiştir.

Mila yürüyerek gitmekte, Filip ise bisikletle gitmekte ve yolda bir mağazada durup sonra devam etmektedir.



Çiz. 12

a) Onlardan hangisi okula ilk varmıştır?

b) Mila'nın okula varması için ne kadar süre gerekmiştir?

c) Filip mağazada saat kaçta durmuş ve orada ne kadar süre kalmıştır?

5. Elena saat 8'de evden çıkmıştır. 15 km uzaklıktaki iş yerine 30 dakika araçla gitmiştir. Orada saat 13:30'a kadar kalmıştır. Saat 13:45'te eve varmıştır. Elena'nın işe gidiş yolculuğunu gösteren bir grafik çizin.

6. Marina ve İrina, aileleriyle birlikte kış tatiline gitmişlerdir. Okul için bir proje hazırlamak istemişler, bu nedenle belirli bir zamanda başlangıç noktasından ne kadar uzakta bulunduklarına ilişkin verileri kaydetme konusunda anlaşmışlardır. Kızlar aşağıdaki verileri toplamışlardır:

Marina

zaman (saat)	1	2	3	4	5	6
yol (km)	100	180	180	290	380	470

İrina

zaman (saat)	1	2	3	4	5	6
yol (km)	80	150	230	230	320	400

İki kızın yolculuk grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizin ve cevaplayın:

a) İrina'nın ailesi hangi saatte mola vermiştir?

b) Yolculuğun son saatinde kimin arabası daha hızlı hareket etmiştir?

c) Yolculuğun hangi aşamasında Marina'nın arabası en hızlı hareket etmiştir?

7. Tabloda, bir sandviççide bir haftalık süre içinde satılan sandviç sayısı ve satılan meyve suyu sayısı verilmiştir. Satılan sandviç ve meyve suyu sayısının zamana bağlılığını gösteren bir diyagram çizin.

Gün	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
Sandviçler	58	70	65	95	86	54	47
Meyve suları	53	85	87	78	52	62	56

8. **Proje görevi**

Üsküp'teki bir okulun sekizinci sınıf öğrencileri, İştip'e bir günlük eğitim-bilim gezisine gideceklerdir. Ziyaret etmeleri planlanan yerler şunlardır: İştip Bezisteni, Isar Kalesi, Bargala arkeolojik alanı ve İştip Şehir Müzesi. Bu sırada öğle yemeği için bir mola da planlanmalıdır. Yolculuğun zaman planını yapın ve bunu grafikle gösterin. Bu sırada:

1) Hareket ve dönüş saatleri hakkında bilgi edinin;

2) Üsküp-İştip arasındaki uzaklık ile ziyaret edilecek yerlerin konumu ve aralarındaki uzaklıklar hakkında verileri araştırın;

3) Plandaki yerler arasındaki mesafeleri katetmek için ne kadar zamana ihtiyaç duyulacağını hesaplayın;

4) Yerlerin konumu ve uzaklığı hakkında araştırılan verilere dayanarak ziyaret sırasını planlayın;

5) Üsküp'ten ziyaret edilecek yerlere kadar olan uzaklıkları ve her birine varış saatini gösteren bir tablo hazırlayın;

	hareket	Bezisten	Isar	öğle yemeği	Bargala	müze
zaman						
uzaklık						

6) Tablodaki verileri bir grafikle gösterin.

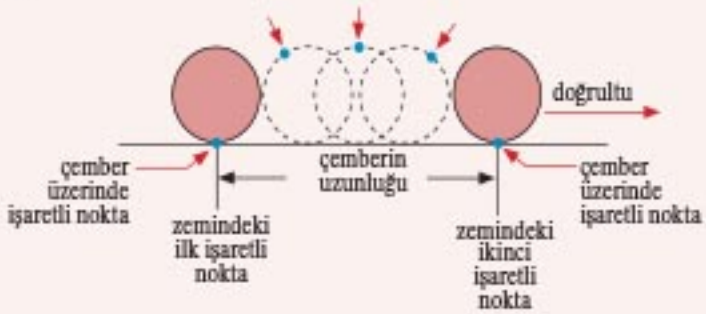
3. ÇEMBERİN UZUNLUĞU

Etkinlik

Etkinlik için şunlar gerekli olacaktır: cetvel, kalem, günlük yaşamdan silindir biçiminde nesneler; örneğin teneke kutu, bozuk para veya bardak. Başlangıç olarak seçilen nesnenin çemberinin çapını dikkatlice ölçün, bu çember üzerinde ve onu hareket ettireceğiniz zemin üzerinde bir nokta işaretleyin. Bir tam dönüşün sonunda zeminde ikinci noktayı işaretleyin (Çizim 1'de gösterildiği gibi).

Kodu tarayın ve çemberin çevresini gözlemleyin.

Zemindeki ilk işaretli noktadan zemindeki ikinci işaretli noktaya kadar olan uzaklık, tam olarak çemberin uzunluğudur. Deneyi birkaç farklı dairesel nesneyle tekrarlayın ve tabloyu doldurun. Sonuçları sınıf arkadaşlarınızla karşılaştırın.
Ne fark ediyorsunuz?



Çiz. 1

yuvarlak nesne	çemberin uzunluğu	çemberin çapı	uzunluğun çapa oranı
.			
.			
.			

Etkinliği gerçekleştirirken, çemberin uzunluğunun çemberin çapına oranının her çember için yaklaşık olarak eşit olduğunu mutlaka fark ettiniz. Çemberin uzunluğu L ile çapı d'nin oranı her çember için aynı sayıdır ve Yunan harfi π ile gösterilir ("pi" diye okunur),
yani $\frac{L}{d} = \pi$.

Çemberin uzunluğu, çemberin çapı ile π sayısının çarpımına eşittir.

Buna göre, çemberin uzunluğu L şu formüllerle hesaplanır:

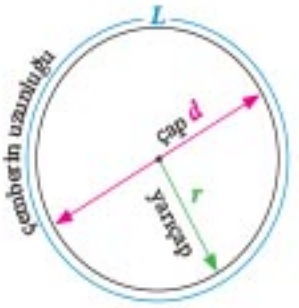
$L = d\pi$ veya $L = 2\pi r$

Burada d çemberin çapı, r ise çemberin yarıçapıdır (Çizim 2).

π sayısı sonsuz, periyodik olmayan bir ondalık sayıdır ve Ludolf sayısı olarak da adlandırılır. Başlangıçta bilim insanları, daha sonra ise güçlü bilgisayarlar onun ondalık basamaklarını hesaplamışlardır; fakat pratik kullanım için yaklaşık değeri

$\pi \approx 3{,}14$ veya $\pi = \frac{22}{7}$ kullanılır.

Çemberi dairenin sınırı olarak ele alırsak, onun uzunluğu L **dairenin çevresi** olarak kabul edilir.



Çiz. 2

Örnek 1

Çemberin uzunluğunu hesaplayın, eğer: a) $r = 10{,}5$ cm, b) $d = 0{,}8$ m.

a) $L = 2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}5$ cm $= 3{,}14 \cdot 21$ cm $= 65{,}94$ cm, b) $L = \pi d \approx 3{,}14 \cdot 0{,}8$ m $= 2{,}512$ m.

Alıştırma 1

Çemberin uzunluğunu hesaplayın, eğer: a) $r = 2{,}3$ m, b) $d = 7\frac{2}{5}$ m.

Alıştırma 2

Ana ve Marko parkta, yarıçapı 14 m olan dairesel bir parkurda koşmaktadır.

a) Koştukları parkurun uzunluğunu hesaplayın.

b) 3 tur koşarlarsa her biri toplam kaç metre koşmuş olur?

Etkinlik

Şu formülden nasıl yararlanarak:

a) $L = d\pi$ formülünden çemberin çapını hesaplayabilirsiniz?

b) $L = 2\pi r$ formülünden çemberin yarıçapını hesaplayabilirsiniz?

Örnek 2

1 m uzunluğunda bir çelik şerit çember biçiminde bükülmüştür. Çemberin çapı ne kadardır?

Çemberin çapı $d = \frac{L}{\pi} \approx \frac{1\text{m}}{3{,}14} \approx 0{,}32$ m olur.

Örnek 3

Çevresi 4,5π cm olan bir dairenin yarıçapını hesaplayın.

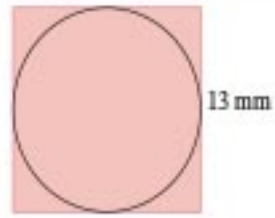
Dairenin yarıçapı şöyledir: $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot \cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \frac{4{,}5\,\text{cm}}{2} = 2{,}25\,\text{cm}$

Alıştırma 3

Parkta daire biçiminde bir çiçeklik yapılması planlanmaktadır. Çiçekliği çevreleyecek çitin uzunluğu 31,4 m olmalıdır. Çiçekliğin yarıçapı ne kadar olmalıdır?

Örnek 4

Küçük bir takı süsü, kenarı $a = 13$ mm olan bir kare biçimindedir (Çizim 3). Karenin içine, bu karenin kenarlarına temas eden çember biçiminde bir tel yerleştirilmelidir. Süsü yapmak için kaç milimetre tel gereklidir?



Çiz. 3

Alıştırmadaki koşuldan, çemberin çapının $d = a = 13$ mm olduğunu buluruz.
Çemberin uzunluğunu hesaplarız:

$L = d \cdot \pi \approx 13\ \text{mm} \cdot 3{,}14 = 40{,}82\ \text{mm}.$

Buna göre telin uzunluğu 40,82 mm'dir.

Alıştırma 4

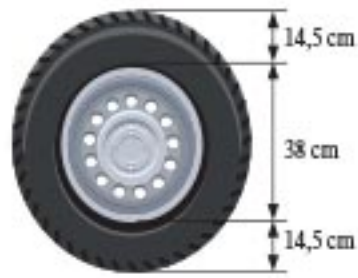
Kare biçimindeki bir çiçek tarhının çevresine, Çizim 4'te gösterildiği gibi çim ekilmiştir. Kare biçimindeki tarhın köşegen uzunluğu 2,5 m ise dairenin etrafındaki koruyucu çitin uzunluğunu hesaplayın.



Çiz. 4

Alıştırma 5

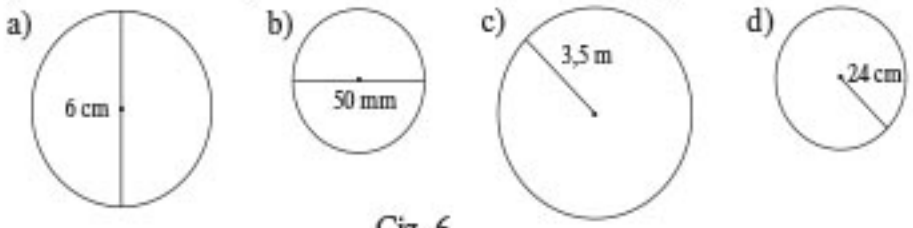
Bir otomobil tekerleğinin ölçüleri Çizim 5'te verilmiştir. Tekerlek 15 dönüş yaparsa alacağı yolu en yakın metreye yuvarlayın.



Çiz. 5

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çizim 6'da verilen çemberlerin uzunluğunu hesaplayın.



Çiz. 6

2. Tabloyu defterinize çizin ve çember için istenen büyüklüklerle tamamlayın:

r	5 cm	8 mm				
d			1 m	6 dm		
L					25,12 cm	3π dm

3. Öğrenciler fen bilimleri laboratuvarında güneş saati yapmaktadır. Yarıçapı 20 cm olan saatin etrafına metal tel yerleştirmek istiyorlar. Kaç metre metal tele ihtiyaçları olacaktır?

4. Bilim insanları, Dünya yüzeyinden 500 km yükseklikte dairesel bir yörüngede Dünya'nın etrafında hareket edecek bir uydu fırlatmayı planlamaktadır. Dünya'nın yarıçapı yaklaşık 6371 km'dir.
a) Uydunun yörüngesinin yarıçapını hesaplayın.
b) Uydunun hareket edeceği yörüngenin uzunluğunu hesaplayın.

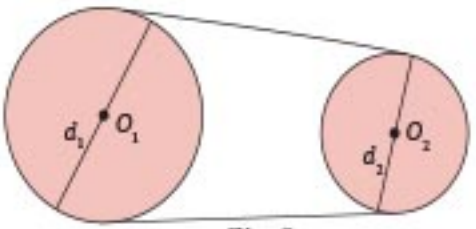
5. Bir otomobil lastiğinin çapı 70 cm'dir (Çizim 7).
a) Onun çevresini hesaplayın.
b) 20 000 tam dönüş yaparsa kaç kilometre yol alır?
c) Araç 45 km yol alırsa tekerlek kaç kez döner?



Çiz. 7

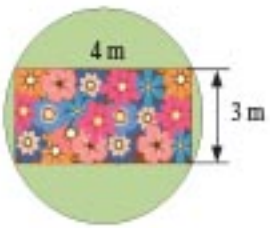
6. Okul etkinlikleri için yeni inşa edilen daire biçimindeki bir havuzun çevresi 94,2 m'dir. Havuzun çapını hesaplayın.

7. Bir makinenin iki dişlisinin çapları $d_1 = 60$ cm ve $d_2 = 45$ cm'dir ve bunlar bir kayışla bağlanmıştır (Çizim 8). Büyük dişli, motor tarafından 1 dakikada 180 dönüş yapacak şekilde döndürülmektedir; kayış aracılığıyla, büyük dişlinin dönmesiyle küçük dişli de döner. Küçük dişli dakikada kaç dönüş yapar?



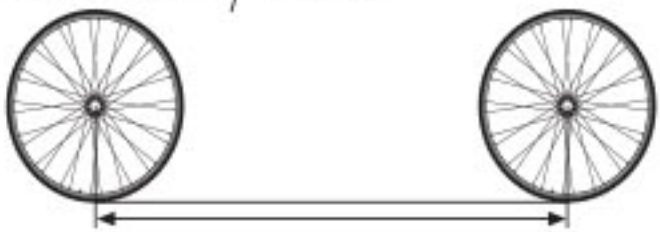
Çiz. 8

8. Daire biçimindeki bir çim alan, dikdörtgen biçimindeki bir çiçek tarhının etrafına yerleştirilmiştir (Çizim 9). Çim alan 2 sıra koruyucu şeritle çevrilmelidir. Dikdörtgen biçimindeki çiçek tarhının kenarları 3 m ve 4 m ise çim alanı çevrelemek için gerekli şeridin uzunluğu ne kadardır?



Çiz. 9

9. İki özdeş tekerlek düz bir yol üzerine, merkezleri arasındaki uzaklık 9,31 m olacak şekilde yerleştirilmiştir (Çizim 10). Her tekerleğin yarıçapı 3,5 cm'dir. Tekerlekler aynı anda birbirlerine doğru hareket ettirilmiş ve her biri 1 saniyede 1 tam dönüş yapmaktadır. Ne kadar süre sonra çarpışırlar? $\pi \approx \frac{22}{7}$ kullanın.



Çiz. 10

Araştırma



Resim 1

1. π sayısı hakkında bir broşür hazırlayın.
Bu broşürde, matematik tarihinden bu sayı ile ilgili ilginç bilgilere ve bu sayının önemine yer verin.

2. Ölçüm tekerleği (Resim 1), uzaklıkları ölçmek için kullanılan bir araçtır. Bu araç; bir tekerlek, bir sap ve tekerleğin tam dönüşlerini sayan bir cihazdan oluşur.
Çevresi 1 m olan bir ölçüm tekerleği temin edin.
Tekerleğin yarıçapını hesaplayın, ardından hesaplamanızı ölçerek kontrol edin.
Ölçüm tekerleğini; örneğin okul bahçesinde, spor sahasında veya okulun çevresindeki çitin uzunluğunu ölçmek için kullanın.
Ölçüm tekerleğinizin yarıçapı şu kadar daha küçük olursa, bir kilometrelik ölçümde hata ne kadar olur? a) 1 cm, b) 1 mm, c) 0,1 mm?

4. ÇEMBER YAYININ UZUNLUĞU

Etkinlik

Üzerine 1'den 12'ye kadar sayıların yerleştirildiği çember biçiminde üç analog saat çizin. Küçük ibrenin ucunun izlediği yolu gösteren çember yayı üzerinde:

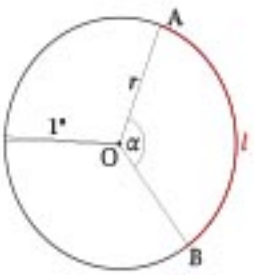
a) birinci saatte 16 saatten 22 saate kadar,
b) ikinci saatte 12 saatten 16 saate kadar,
c) üçüncü saatte 12 saatten 15 saate kadar

bir yay işaretleyin.

Verilen durumların her biri için, çember yayının çemberin ne kadarına karşılık geldiğini ve buna karşılık gelen merkez açının kaç derece olduğunu belirleyin.

Yarıçapı r olan bir çemberde, karşılık gelen merkez açı α ise $\overset{\frown}{AB}$ çember yayının uzunluğu l'yi hesaplayalım (Çizim 1)

1°'lik merkez açıya, uzunluğu çemberin uzunluğunun $\frac{1}{360}$'ı olan bir çember yayı karşılık gelir, yani



Çiz. 1

$$l_{1^\circ} = \frac{1}{360} \cdot L = \frac{L}{360} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{2\pi r \cdot 1^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ}.$$

2°'lik merkez açıya, öncekinden iki kat daha uzun bir çember yayı karşılık gelir, yani

$$l_{2^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ} \cdot 2 = \frac{\pi r \cdot 2^\circ}{180^\circ}, \ldots$$

Bu şekilde, α merkez açısına, uzunluğu şu olan bir çember yayı karşılık geldiği sonucuna varırız:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Yarıçapı r olan bir çemberde, α merkez açısına karşılık gelen çember yayının uzunluğu l şu formülle hesaplanır:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Örnek 1

Yarıçapı 12 cm olan bir çemberde, $\alpha = 18^\circ$ merkez açısına karşılık gelen çember yayının uzunluğunu hesaplayın.

Çember yayının uzunluğunu hesaplama formülüne göre şunu buluruz:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \approx \frac{3{,}14 \cdot 12\,\text{cm} \cdot 18^\circ}{180^\circ} = 3{,}768\ \text{cm}.$$

Alıştırma 1

Yarıçapı 3,2 dm olan bir çemberde 140°'lik merkez açıya karşılık gelen çember yayının uzunluğunu hesaplayın.

Alıştırma 2

Yarıçapları $r_1 = 3$ cm ve $r_2 = 5$ cm olan iki eş merkezli çemberde, aynı $\alpha = 122^\circ\ 30'$ merkez açısına karşılık gelen çember yaylarının uzunluklarını hesaplayın.

Alıştırma 3

Marko, yarıçapı 4 m olan daire biçimindeki küçük bir bahçenin etrafına tel çit çekmek istiyor. Çitin çemberin yarısı kadar olmasını istiyorsa Marko kaç metre tel satın almalıdır?

Etkinlik

Şu formülden $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$ nasıl yararlanarak hesaplayabilirsiniz:

a) l ve α verilmişse yarıçap r'yi, b) r ve l verilmişse merkez açı α'yı?

Örnek 2

Çember yayının uzunluğu $l = 11$ cm olan ve buna karşılık gelen merkez açısı $\alpha = 42^\circ\ 30'$ olan çemberin yarıçapını hesaplayın.

Verilen merkez açıyı dereceye çevirmeliyiz: $\alpha = 42^\circ\ 30' = 42{,}5^\circ$.
Çember yayının uzunluğunu hesaplama formülünden, çemberin yarıçapının şu olduğunu buluruz:

$$r = \frac{180^\circ \cdot l}{\pi \alpha} \approx \frac{180^\circ \cdot 11\text{cm} \cdot 7}{22 \cdot 42{,}5^\circ} = 14{,}8 \text{ cm},$$

burada $\frac{1}{\pi}, \frac{7}{22}$ olarak yazılmıştır.

Alıştırma 4

Angela, bahçede çemberin bir parçası olan bir yol yapmak istiyor. Yolun uzunluğu 15 m, yolun kapsadığı çemberin merkez açısı ise 120°'dir. Yolu oluşturan çemberin yarıçapı ne kadardır?

Örnek 3

Yovan, bisiklet için dairesel bir rampa kurmaktadır. Rampanın çember yayının uzunluğu 8 m, rampanın bir parçası olduğu çemberin yarıçapı ise 5 m'dir. Rampanın bir parçası olduğu çemberin merkez açısı α kaç derecedir?

Çember yayının uzunluğunu hesaplama formülüne göre, rampanın bir parçası olduğu çemberin merkez açısı α'nın şu olduğunu buluruz:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot l}{\pi r} \approx \frac{180^\circ \cdot 8\text{m}}{3{,}14 \cdot 5\text{m}} = 91{,}7^\circ.$$

Alıştırma 5

Yarıçapı 10 cm olan bir çemberde, bu açıya karşılık gelen çember yayının uzunluğu 6,28 cm ise merkez açıyı hesaplayın.

Örnek 4

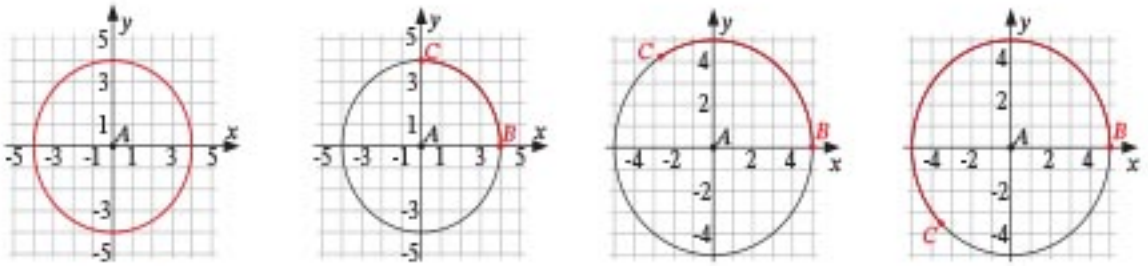
Çember yayının uzunluğu formülünü kullanmadan, 40°'lik merkez açıya karşılık gelen çember yayı 6 dm uzunluğunda olan çemberin uzunluğunu belirleyin.

$\alpha = 40° = \frac{1}{9} \cdot 360°$ olduğundan, çemberin uzunluğu $L = 9 \cdot l = 6 \text{ dm} \cdot 9 = 54 \text{ dm}$ olur.

Alıştırma 6

Çizim 2'de kırmızı renkle gösterilen çember yayının uzunluğunu hesaplayın.

a) Tam çember b) Çemberin dörtte biri c) Çemberin üçte biri d) Çemberin sekizde beşi



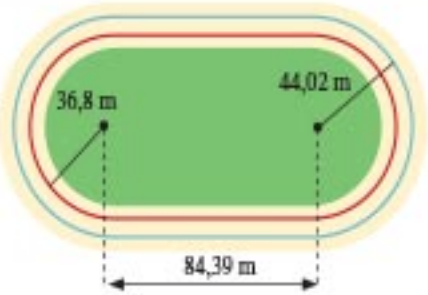
Çiz. 2

Örnek 5

Atletizm pistinde iki koşucu koşmaktadır; biri mavi, diğeri kırmızı parkurda koşmaktadır. Çember yaylarına karşılık gelen açılar 180°'dir ve her koşucu için çemberlerin yarıçapları Çizim 3'te verilmiştir.

a) Her koşucu parkurda bir tur koşarsa ne kadar uzaklık kat eder?

b) Koşulan uzunluklar arasındaki farkı en yakın metreye yuvarlayın.



Çiz. 3

Her koşucunun parkuru 2 düz yol ve 2 yarım çember biçimindeki yoldan oluşur.

Kırmızı parkurun uzunluğu: $2 \cdot 84{,}39 \text{ m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 36{,}8 \text{m}) \approx 399{,}88 \text{ m}$.

Mavi parkurun uzunluğu: $2 \cdot 84{,}39 \text{ m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 44{,}02 \text{m}) \approx 445{,}23 \text{ m}$.

Mavi parkurun uzunluğu ile kırmızı parkurun uzunluğu arasındaki fark, en yakın metreye yuvarlandığında şöyledir:

$445{,}23 \text{ m} - 399{,}88 \text{ m} = 45{,}35 \text{ m} \approx 45 \text{ m}$.

Alıştırma 8

Matey, evinin köşesinde dairenin dörtte üçü biçiminde bir bahçe ekip çitle çevirmelidir (Resim 1). Çitin uzunluğu 38 m'dir. Tüm bahçeyi çevirebilmesi için bahçenin yarıçapı ne kadar olmalıdır? Sonucu tam metreye yuvarlayın.



Resim 1

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Hesaplayın:
   a) $r = 12$ cm yarıçaplı bir çemberde, karşılık gelen merkez açısı $\alpha = 120°$ olan çember yayının uzunluğu,
   b) $d = 8$ cm çaplı bir çemberde, karşılık gelen merkez açısı $\alpha = 22° 30'$ olan çember yayının uzunluğu,
   c) uzunluğu $l = 3{,}14$ cm olan bir çember yayına ve çemberin yarıçapı $r = 2$ cm'ye karşılık gelen merkez açı,
   d) $\alpha = 108°$ merkez açısına, uzunluğu $l = 9{,}42$ cm olan bir çember yayının karşılık geldiği çemberin yarıçapı.

2. Araştırmacılar, yarıçapı 1000 km olan dairesel bir kutup buz alanının sekizde biri olan bir buz parçasını haritalandırmıştır. Buzun kavisli kısmının uzunluğu ne kadardır?

3. Uzunluğu 6,8 cm olan bir çemberde, karşılık gelen merkez açısı 135° olan çember yayının uzunluğu ne kadardır?

4. Dünya meridyeninin uzunluğu yaklaşık 40 000 km ise Dünya'nın yarıçapı ne kadardır?

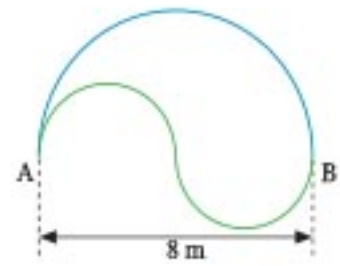
5. Biyoloji dersinde öğrenciler kan damarlarının biçimini öğrenmektedir. Büyük bir atardamar yayının eğriliğinin bir kısmını ölçmüşler ve uzunluğunun 12 cm, yaya karşılık gelen merkez açının ise 90° olduğunu belirlemişlerdir. Atardamar eğriliğinin bir parçası olduğu çemberin yarıçapı ne kadardır?

6. Çocuk oyun alanındaki bir kaydırağın, yay uzunluğu 12 m ve merkez açısı 120° olan dairesel bir eğriliği vardır. Eğriliğin yarıçapı ne kadardır?

7. Yovan, dairesel bir çiçek bahçesinin etrafına çit yerleştirmektedir. 60°'lik merkez açıya karşılık gelen çember yayının uzunluğunun 5,24 metre olduğunu ölçmüştür.
   Tüm bahçeyi çevirmek için kaç metre çit gereklidir?

8. Uzunluğu çemberin yarıçapına eşit olan bir çember yayına karşılık gelen merkez açı kaçtır?

9. Çizim 4'te A'dan B'ye giden daha kısa yol hangisidir: mavi yol mu, yeşil yol mu?



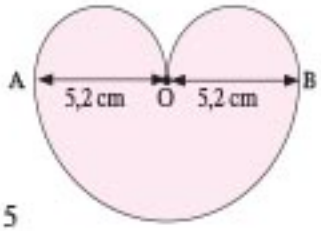
Çiz. 4

10. 36°'lik bir çevre açı, uzunluğu 2,5 m olan bir çember yayını görmektedir.
    Çemberin çevresini belirleyin.

11. Dünya meridyeninin uzunluğu 40003,423 km'dir.
    Şunlara karşılık gelen yay uzunluğunu hesaplayın:
    a) 1°, b) 1′.
    (Dünya meridyeni üzerindeki 1′ye karşılık gelen yay uzunluğuna **deniz mili** denir.)

12. Metal bir şerit, yarıçapı 4 cm olan bir çember biçiminde bükülmüştür. Bir sac işleme atölyesinin ihtiyacı için bu şerit, yarıçapı 10 cm olan bir çember yayı biçiminde açılmıştır. Elde edilen çember yayına karşılık gelen merkez açı kaçtır?

13. Tebrik kartı üç yarım çemberden oluşmaktadır; burada O büyük yarım çemberin merkezidir (Çizim 5). Sara, tebrik kartının etrafındaki uzaklığı kurdeleyle süslemek istiyor. Sara'nın ne kadar kurdeleye ihtiyacı vardır? Cevabı en yakın santimetreye yuvarlayın.

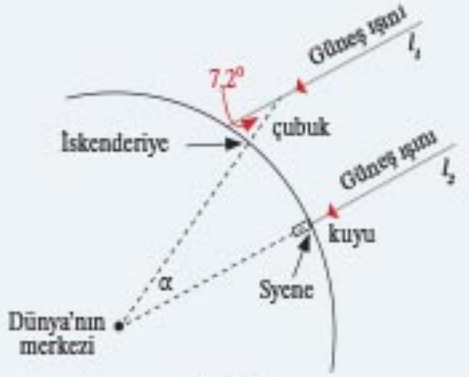


Çiz. 5

Araştırma

2000 yıldan daha uzun bir süre önce, Yunan bilim insanı Eratosthenes, Güneş ışınlarının paralel olduğunu varsayarak Dünya'nın çevresini tahmin etmiştir. Yaz gündönümünde öğle vakti Syene'de (günümüzde Asvan) Güneş dikey olarak düşüyordu (kuyuda gölge oluşmuyordu); buna karşılık İskenderiye'de dikey bir çubuk 7,2°'lik açıyla gölge oluşturuyordu (Çizim 6). Syene'den İskenderiye'ye meridyen boyunca uzaklık yaklaşık 5000 stadyumdur ("stadyum", eski bir Mısır uzunluk ölçüsüdür).

a) Şehirler arasındaki merkez açı α kaçtır?
b) Eratosthenes'in Dünya'nın çevresini nasıl tahmin ettiğini açıklayın.
c) Dünya'nın çevresini stadyum cinsinden tahmin edin.
d) 1 stadyum = 157,5 m ise Dünya'nın çevresinin kaç kilometre olduğunu hesaplayın.



Çiz. 6

5. BİLEŞİK 2B ŞEKİLLERİN ÇEVRESİ

Etkinlik

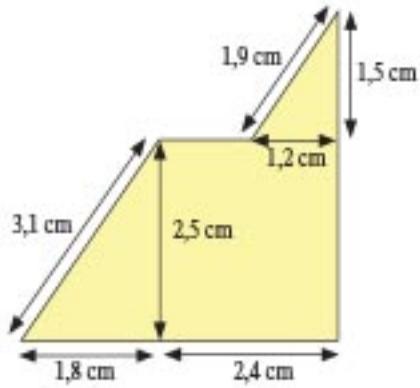
400 m'ye 350 m boyutlarında dikdörtgen biçimindeki bir çiftlik, 4 sıra telle çevrilmiştir (Resim 1).
Hesaplayın:
a) çiftliğin çevresini,
b) çitleme için gerekli toplam tel uzunluğunu,
c) metre fiyatı 140 denar ise çitleme telinin kaç denar tutacağını.


Resim 1

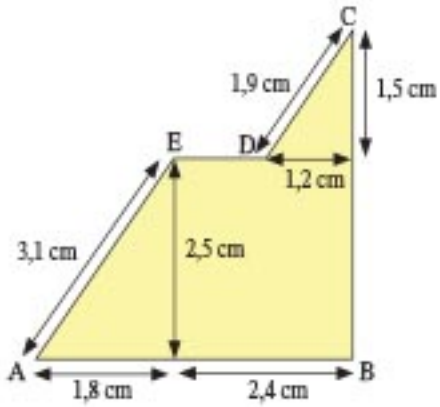
Günlük yaşamda, basit veya bileşik 2B şekillerin uzunluklarının toplamını hesaplama ihtiyacı sıkça ortaya çıkar. Bu durumda, bileşik 2B şeklin hangi 2B şekillerden veya bunların hangi parçalarından oluştuğuna dikkat eder ve çevreyi hesaplamak için önceden bilinen formülleri kullanırız.

Örnek 1

Çizim 1'de gösterilen bileşik 2B şeklin çevresini hesaplayın.



Çiz. 1



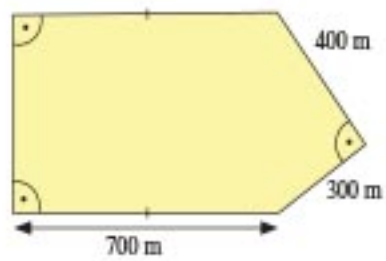
Çiz. 2

Çizim 2'ye göre $\overline{DE} = 2{,}4\text{ m} - 1{,}2\text{ m} = 1{,}2\text{ m}$ olduğunu buluruz.
Çevre, bileşik 2B şeklin kenar uzunluklarının toplamıdır:

$$L = 1{,}5\text{ m} + 1{,}9\text{ m} + 1{,}2\text{ m} + 3{,}1\text{ m} + 1{,}8\text{ m} + 2{,}4\text{ m} + 2{,}5\text{ m} = 14{,}4\text{ m}.$$

Alıştırma 1

Konstantin sabahları yakındaki alışveriş merkezinin etrafında koşmaktadır. Alışveriş merkezinin ölçüleri Çizim 3'te verilmiştir. Toplam 13 km koşmak için alışveriş merkezinin etrafında kaç tur atmalıdır?



Çiz. 3

Örnek 2

Çizim 4'te, bir kare ve bir yarım çemberden oluşan bir pencere gösterilmiştir.
Onun çevresini hesaplayın.

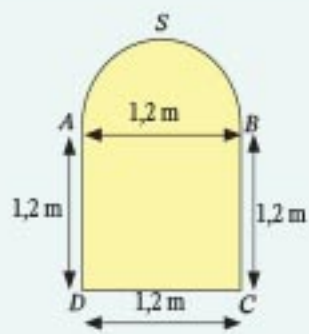
Pencerenin çevresi; AD, DC ve BC kenar uzunlukları ile ASB yarım çemberinin uzunluğunun toplamıdır.

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{DC} = 1{,}2\text{ m}$$

Yarım çemberin çapı 1,2 m olduğundan şunu elde ederiz:

$$L = 3 \cdot \overline{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \pi \approx 3 \cdot 1{,}2\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\text{ m} \cdot 3{,}14 =$$

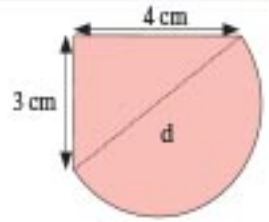
$$= 3{,}6\text{ m} + 1{,}884\text{ m} = 5{,}484\text{ m}.$$



Çiz. 4

Örnek 3

Çizim 5'te gösterilen kolyenin kenarı altın telle çevrilmelidir. Kullanılması gereken altın telin uzunluğunu hesaplayın.



Çiz. 5

Kolye, bir dik üçgen ve bir yarım çemberden oluşmaktadır. Çemberin çapı:

$$d=\sqrt{(3\text{cm})^2+(4\text{cm})^2}=\sqrt{9\text{cm}^2+16\text{cm}^2}=\sqrt{25\text{cm}^2}=5\text{cm}.$$

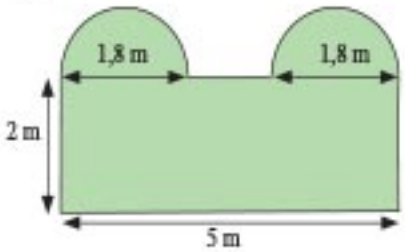
Kolyenin çevresi, dik üçgenin dik kenar uzunlukları ile dairenin yarı çevresinin toplamıdır:

$$L\approx 3\text{cm}+4\text{cm}+\frac{5\text{cm}\cdot 3{,}14}{2}=14{,}85\ \text{cm}\approx 15\ \text{cm}.$$

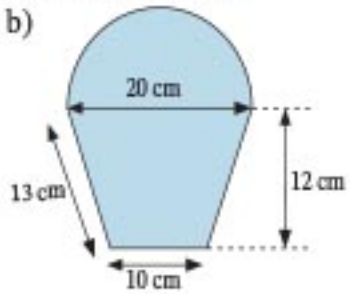
Alıştırma 2

Çizim 6'da verilen 2B şekillerin çevresini hesaplayın.

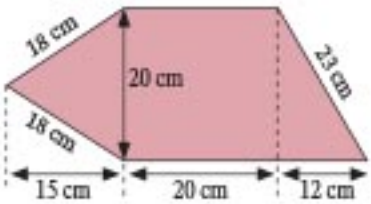
a)



b)



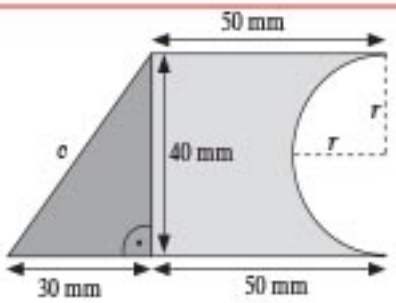
c)



Çiz. 6

Alıştırma 3

Çizim 7'de verilen makine parçasının çevresini hesaplayın.



Çiz. 7

Örnek 4

Çizim 8'deki gibi bir pencere yapmak için ne kadar PVC profile ihtiyaç vardır? A, B ve C noktaları eşkenar üçgenin köşeleridir; A, $\overset{\frown}{BC}$ çember yayının merkezi, B ise $\overset{\frown}{AC}$ çember yayının merkezidir. $\overline{ED}=0{,}5$ m ve $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}$ 'dir.

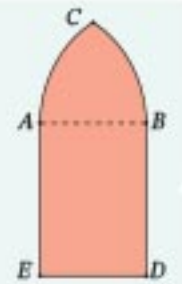
A, B ve C eşkenar üçgenin köşeleri olduğundan, çember yayları 60°'lik açıların üzerindedir:

$\alpha=60°$, $r=\overline{AB}=0{,}5$ m, $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}=2\cdot 0{,}5=1$ m

Şeklin çevresi şöyledir:

$$L\approx 1+0{,}5+1\text{m}+2\cdot\frac{0{,}5\text{m}\cdot 60°\cdot 3{,}14}{180°}=2{,}5\text{m}+2\cdot 0{,}52\text{m}=3{,}54\ \text{m}.$$

Pencerenin yapımı için 3,54 m PVC profile ihtiyaç vardır.



Çiz. 8

Örnek 5

Çizim 9'da, yamuk biçiminde bir çim alan ve onun içinde dairesel bir çiçeklik gösterilmiştir. Çim alan ve çiçeklik, metre fiyatı 78 denar olan dekoratif ipten 2 sıra ile çevrilmelidir. "Düzenli Şehir" işletmesi, ip ile çevreleme için kaç para ödemelidir?

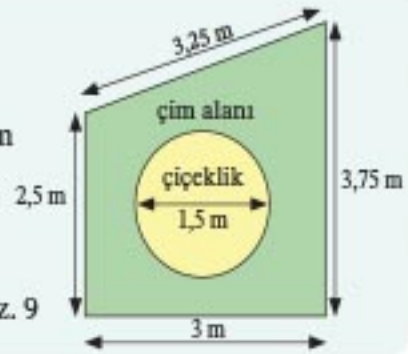
Çevreleme için gerekli olan 1 sıra ipin uzunluğu şöyledir:

$L = L_t + L_e \approx 3\text{ m} + 3{,}75\text{ m} + 3{,}25\text{ m} + 2{,}5\text{ m} + 1{,}5\text{ m} \cdot 3{,}14 = 17{,}21\text{ m}$

2 sıra için yaklaşık olarak $17{,}21 \cdot 2 = 34{,}42$ m ip gereklidir.

İşletmenin ödemesi gereken tutar şöyledir:

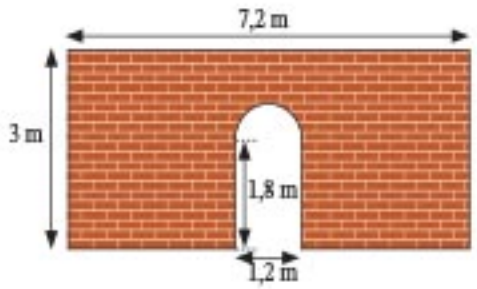
$34{,}42\text{ m} \cdot 78\text{ den.} = 2684{,}76\text{ den.} \approx 2685$ denar.



Çiz. 9

Alıştırma 4

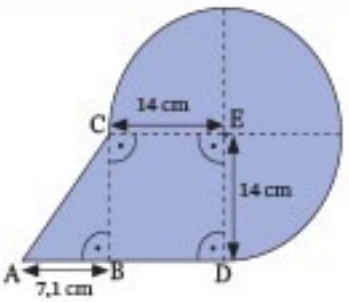
Çizim 10'daki biçim ve ölçülere sahip bir duvarı kaplamak için ne kadar uzunlukta çıtaya ihtiyaç olacağını hesaplayın.



Çiz. 10

Alıştırma 5

Çizim 11'de gösterilen şeklin çevresini hesaplayın.

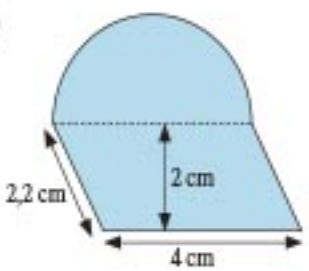


Çiz. 11

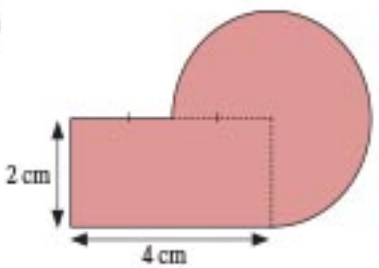
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çizim 12'de gösterilen bileşik 2B şekillerin çevresini hesaplayın:

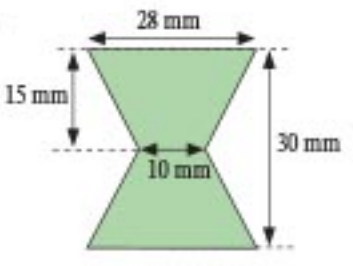
a)



b)

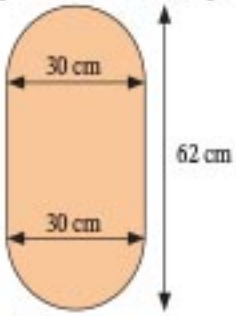


c)

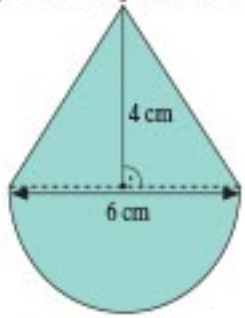


Çiz. 12

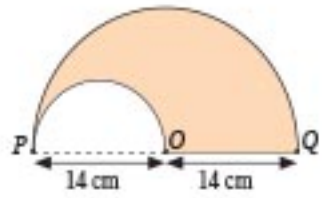
2. Çizim 13'te bir uçak penceresi gösterilmiştir. Onun çevresini bulun.



Çiz. 13



Çiz. 14



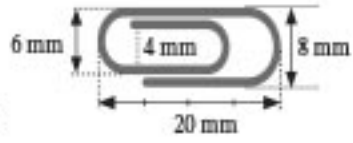
Çiz. 15

3. Çizim 14'te, kenarları süsleme şeridiyle dikilmesi gereken, giysi için işlenmiş bir aplike verilmiştir. Süsleme için kullanılacak şeridin uzunluğunu hesaplayın.

4. Bir makine işçisi, çapı 28 cm olan büyük bir yarım çember kesmektedir. Daha sonra işçi, büyük yarım çemberden daha küçük bir yarım çember kesip çıkarır (Çizim 15). Çıkarılan yarım çember parçasının çapı 14 cm'dir.

Elde edilen şeklin çevresini bulun. $\pi \approx \frac{22}{7}$ kullanın.

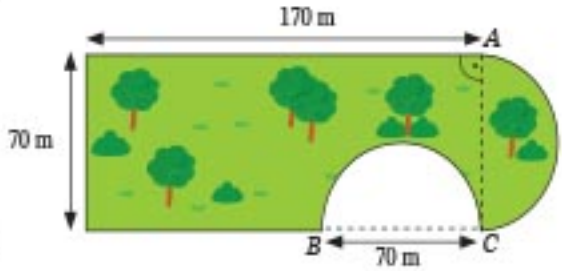
5. Bir kırtasiye malzemeleri fabrikasında ataşlar üretilmektedir (Çizim 16). 10 m uzunluğundaki çelik telden kaç ataş yapılabilir?



Çiz. 16

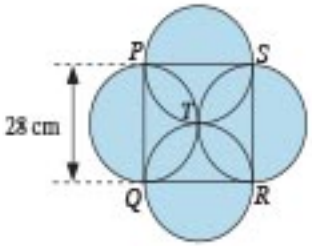
6. Çizim 17'de, bir tarafına yarım çember eklenmiş ve diğer tarafından başka bir yarım çember çıkarılmış dikdörtgen biçiminde bir park gösterilmiştir. Parkın etrafındaki yolun uzunluğunu bulun.

$\pi \approx \frac{22}{7}$ kullanın.

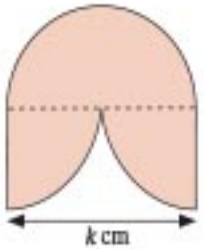


Çiz. 17

7. Tel, Çizim 18'de verilen 2B şekli elde etmek için bükülmüştür. Şekil dört özdeş çemberden oluşmaktadır. Her çember, diğer iki çemberle kesişmektedir. Dört çember, *PQRS* karesinin merkezi olan ortak T noktasında kesişmektedir. Telin uzunluğunu bulun. $\pi \approx \frac{22}{7}$ kullanın.



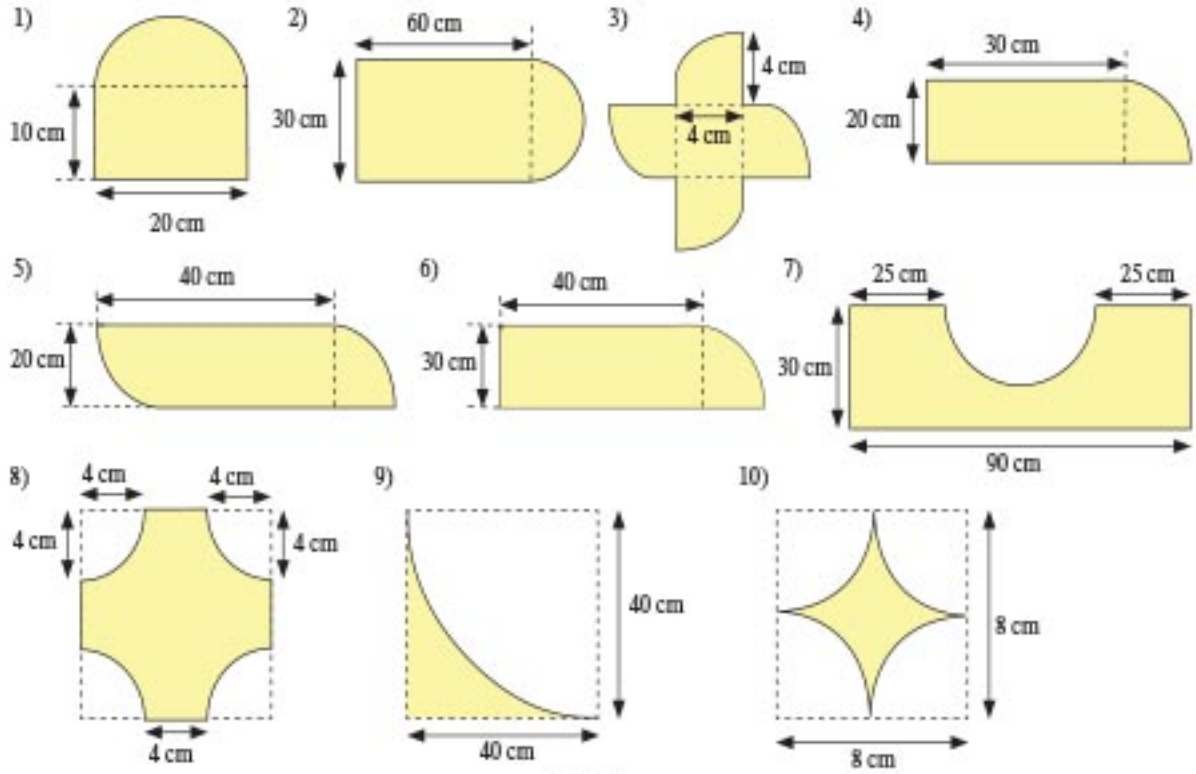
Çiz. 18



Çiz. 19

8. Çizim 19'da verilen 2B şeklin çevresi 97,29 dm'dir. k değerini bulun.

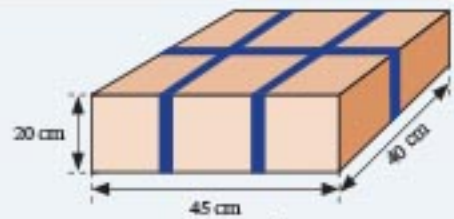
9. Çizim 20'de verilen 2B şekillerin çevresini hesaplayın:



Çiz. 20

Araştırma

Resim 1'deki gibi ölçülere sahip bir dizüstü bilgisayar kutusu, 3 plastik şeritle paketlenmiştir. Her şeridin birleştiği yerde iki ucu 5 cm uzunluğunda üst üste gelmektedir. 200 kutuyu paketlemek için ne kadar plastik şerit gerektiğini hesaplayın.

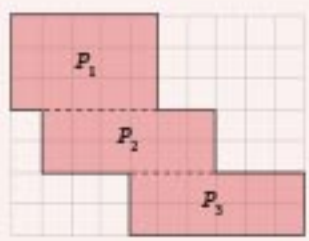


Resim 1

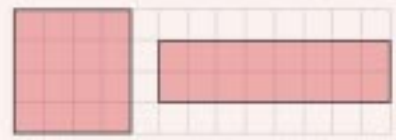
6. PARALELKENARIN ALANI

Etkinlik

Çizim 1'deki şeklin alanı P ne kadardır? Çizim 2'deki şekillerin alanları ne kadardır? Şekiller eş midir?



Çiz. 1



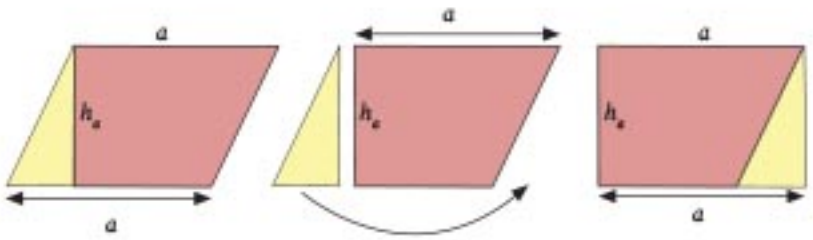
Çiz. 2

Çizim 2'deki şekiller eş değildir, ancak aynı sayıda (16) eş karecikten oluşmaktadır. Bu şekiller için **alanları eşittir** deriz.
Günlük yaşamda, sık sık bir 2B şeklin alanını belirleme ihtiyacının ortaya çıktığı durumlarla karşılaşırız. Bu sırada her zaman alanın şu özelliklerine dayanırız:

1. Her 2B şeklin alanının ölçü sayısı pozitif bir sayıdır.
2. Eş 2B şekillerin alanları eşittir.
3. Bir 2B şekil, birbiriyle örtüşmeyen birkaç parçadan oluşuyorsa, bu şeklin alanı parçaların alanlarının toplamıdır.

Paralelkenarın alanını belirlemek için Çizim 3'ten yararlanacağız.

Çizimdeki paralelkenarı, yüksekliklerinden biri boyunca "keseriz" ve "kesilen" üçgeni, başka bir paralelkenar elde edinceye kadar kaydırırız. h_a yüksekliği a kenarına dik olduğundan, elde edilen paralelkenar kenarları a ve h_a olan bir dikdörtgendir. Onun alanı a ve h_a uzunluklarının çarpımıdır. Elde edilen dikdörtgen, paralelkenarla eş alanlıdır.

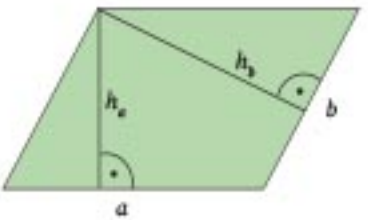


Çiz. 3

Kodu tarayın.

Çizim 4'te, kenarları a ve b olan bir paralelkenar verilmiştir. a ve b kenarlarına karşılık gelen h_a ve h_b yükseklikleri çizilmiştir. Paralelkenarın alanı, kenar uzunluğu ile o kenara karşılık gelen yüksekliğin uzunluğunun çarpımına eşittir, yani:

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$



Çiz. 4

Paralelkenarın alanı, herhangi bir kenarının uzunluğu ile o kenara karşılık gelen yüksekliğin çarpımına eşittir.

Buna göre, paralelkenarın alanı P şu formüllerle hesaplanır:

$P = a \cdot h_a$ veya $P = b \cdot h_b$,

burada a ve b kenarlar, h_a ve h_b ise paralelkenarın kenarlarına karşılık gelen yüksekliklerdir.

Örnek 1

Paralelkenarın bir kenarı 5 cm, bu kenara indirilen yüksekliği ise 3 cm'dir. Paralelkenarın alanı ne kadardır?

Alıştırmadaki koşullara göre $a = 5$ cm ve $h_a = 3$ cm'dir. Paralelkenarın alanı:

$P = a \cdot h_a = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$

Etkinlik

$P = a \cdot h_a$ formülünden nasıl yararlanarak hesaplayabilirsiniz:
a) P ve h_a verilmişse a kenarını, b) a ve P verilmişse h_a yüksekliğini?

Örnek 2

Paralelkenarın bir kenarı 15 cm uzunluğunda, bu kenara karşılık gelen yüksekliği ise 8 cm uzunluğundadır.
a) Uzunluğu 12 cm olan diğer kenara karşılık gelen yükseklik ne kadardır?
b) Kenar uzunluklarını ve karşılık gelen yükseklikleri karşılaştırın. Ne fark ediyorsunuz?

a) Alıştırmadaki koşullara göre $a = 15$ cm, $h_a = 8$ cm ve $b = 12$ cm'dir.
Paralelkenarın alanı şöyledir:
$P = a \cdot h_a = 15 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2$.
$P = b \cdot h_b$ formülüne göre şunu elde ederiz:

$$h_b = \frac{P}{b} = \frac{120}{12} = 10 \text{ cm}.$$

b) Paralelkenarın uzun kenarına ait yüksekliğin, kısa kenarına ait yükseklikten daha küçük olduğunu fark ederiz.

Alıştırma 1

$a = 4$ cm, $b = 5$ cm kenar uzunlukları ve $h_a = 3$ cm yüksekliği bilinen bir paralelkenarın h_b yüksekliğini hesaplayın.

Alıştırma 2

Paralelkenarın kenar uzunlukları 10 dm ve 1,2 m'dir. Kısa yükseklik 45 cm ise büyük yükseklik ne kadardır?

Alıştırma 3

Paralelkenarın alanı nasıl değişir, eğer:
a) bir kenarı 2 kat artırılırsa, b) bir kenarı 3 kat azaltılırsa?

Örnek 3

Bir tarım işletmesi, bir çift kenarı 1200 m uzunluğunda ve aralarındaki uzaklık 750 m olan paralelkenar biçimindeki bir arsayı ekmeyi planlamaktadır. Tohumun fiyatı hektar başına 82,5 denar ise bütün arsanın ekilmesi için toplam fiyat ne kadar olur?

Tarlanın alanı şöyledir:
$P = 1200 \text{ m} \cdot 750 \text{ m} = 900\,000 \text{ m}^2 = 90 \text{ hm}^2$ $(1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2)$
Bütün arsanın ekilmesi için toplam fiyat: $90 \cdot 82{,}5$ den. $= 7425$ denar olur.

Alıştırma 4

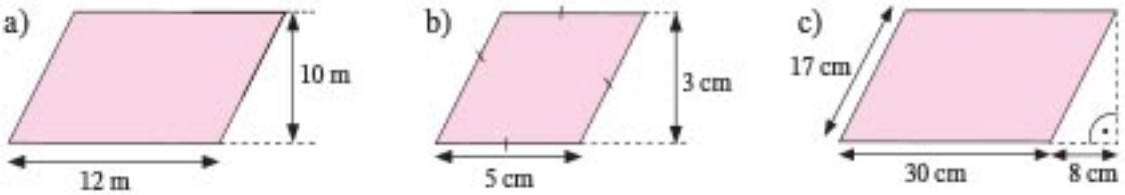
Bir inşaat firması, paralelkenar biçimindeki bir otopark bölümünü parke taşlarıyla döşemelidir. Bir kenarın uzunluğu 80 m, kenarlar arasındaki uzaklık ise 60 m'dir. Parke taşlarının döşenmesi metrekare başına 125 denar tutuyorsa, tüm otoparkın döşenmesi için toplam fiyat ne kadar olur?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Paralelkenarın bazı elemanlarına ait değerlerin verildiği tabloyu defterinize çizin ve doldurun.

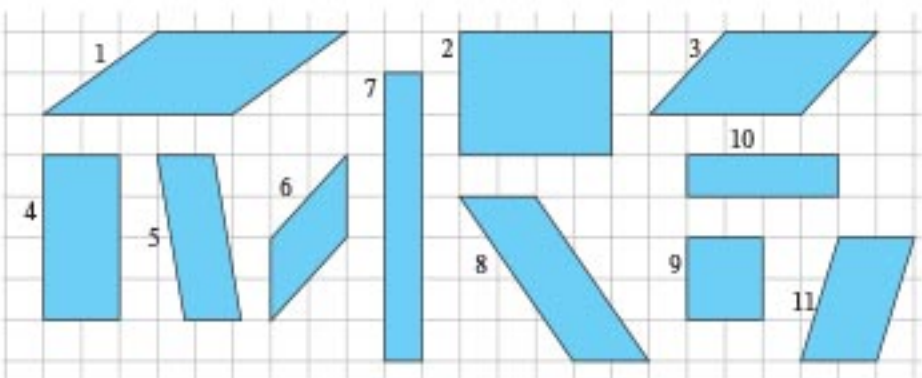
a	b	h_a	h_b	P
9 cm	12 cm			36 cm²
12 mm	7,5 mm	5 mm		
		9 cm	0,3 dm	18 cm²
12 cm			6 dm	24 dm²

2. Çizim 5'teki paralelkenarların alanını hesaplayın:



Çiz. 5

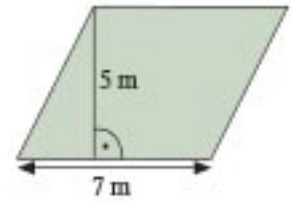
3. Paralelkenarın alanı 36 cm², yükseklikleri ise 4 cm ve 6 cm uzunluğundadır. Onun çevresini hesaplayın.
4. Bir eşkenar dörtgenin alanı 24 cm², çevresi 24 cm'dir. Eşkenar dörtgenin yüksekliğini hesaplayın.
5. Çevresi 36 cm olan bir eşkenar dörtgenin alanını hesaplayın; yüksekliği kenarından 2 cm daha küçüktür.
6. Çizim 6'daki paralelkenarlardan hangilerinin alanları eşittir?



Çiz. 6

7. Öğretmen, öğrencilerinden Çizim 7'deki paralelkenarın alanını yazmalarını istemiştir. Mira 12 m^2 yazmış, Yovan ise 35 m yazmıştır. İkisi de hata yapmıştır.

   a) Her birinin hatasını açıklayın.
   b) Doğru cevabı yazın.



Çiz. 7

8. Said'in, çevresindeki çitin uzunluğu 96 m ve karşılıklı kenarları arasındaki uzaklık 18 m olan eşkenar dörtgen biçiminde bir tarlası vardır. Üzerindeki etikette "Metrekare başına 35 g gübre kullanın." yazan 15 kg'lık bir gübre torbası vardır. Said'in bütün tarla için yeterli gübresi var mıdır?

9. Bir terzi, paralelkenar biçiminde bir perde yapmalıdır. Perdenin alt kenarının uzunluğu 2,4 m, buna karşılık gelen yüksekliği ise 1,8 m'dir. Perdenin yapımı için gerekli kumaşın alanı ne kadardır?

10. Bir usta, paralelkenar biçimindeki fayanslardan oluşan bir duvar dekorasyonu yapmaktadır. Her fayansın bir kenarı 45 cm uzunluğunda, buna karşılık gelen yüksekliği ise 30 cm'dir.
    a) Bir fayansın alanını santimetrekare ve metrekare cinsinden hesaplayın.
    b) Kaplanması gereken duvarın alanı 4,5 m^2 ise bütün duvar için kaç fayans gereklidir?
    c) Bir fayans 85 denar ise bütün fayansların yerleştirilmesi için toplam fiyat ne kadar olur?

Araştırma

1. *MNPQ* karesi verilmiştir. *MN* kenarına sahip ve alanı kareyle eşit olan, dar açısı 60° olan bir paralelkenar oluşturun. Yapım basamaklarını açıklayın.
2. Geometrik yazılım kullanarak bir paralelkenar çizin, onun alanını belirleyin ve kenarları ile yükseklikleri değiştiğinde alanın nasıl değiştiğini araştırın. İlk çizilen paralelkenarla alanları eşit olan birkaç paralelkenar daha çizin.

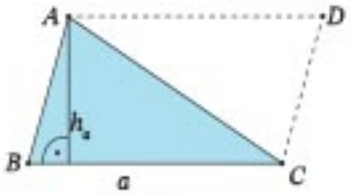
7. ÜÇGENİN ALANI

Etkinlik

ABCD paralelkenarını çizin ve onun bir köşegenini ve iki yüksekliğini çizin.
Elde edilen üçgenler eş midir, neden? Elde edilen üçgenlerin her birinde birer yüksekliği gösterin.

Tabanı a ve buna karşılık gelen yüksekliği h_a olan ABC üçgeni, $ABCD$ paralelkenarına "tamamlanmıştır" (Çizim 1). Bu paralelkenar, ABC ve CDA adlı iki eş üçgenden oluşur. Bu nedenle, her birinin alanı $ABCD$ paralelkenarının alanının yarısına eşittir:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a.$$



Çiz. 1

Yani, tabanı a ve yüksekliği h_a olan bir üçgenin alanı P şöyledir:

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

Üçgenin alanı için kodu tarayın.

Benzer şekilde, diğer iki kenar b ve c ile bunlara karşılık gelen h_b ve h_c yükseklikleri için de şu formüllerin geçerli olduğu sonucuna varabiliriz:

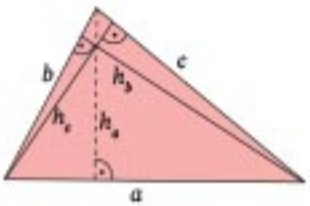
$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ ve } P = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Üçgenin alanı, herhangi bir kenarının uzunluğu ile o kenara karşılık gelen yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.

Buna göre, üçgenin alanı P şu formüllerle hesaplanır (Çizim 2):

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ veya } P = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ veya } P = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Burada a, b ve c kenarlar; h_a, h_b ve h_c ise üçgenin kenarlarına karşılık gelen yüksekliklerdir.



Çiz. 2

Örnek 1

a = 18 cm kenarlı ve $h_a = 10$ cm yüksekliğine sahip bir üçgenin alanını hesapla.

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{18\text{cm} \cdot 10\text{cm}}{2} = 90 \text{ cm}^2.$$

Alıştırma 1

Aşağıdakiler verildiğinde üçgenin alanını hesapla:

a) $b = 1{,}2$ dm ve $h_b = 0{,}8$ dm,

b) $c = 3\frac{2}{5}$ m ve $h_c = 7{,}6$ m.

Etkinlik

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ formülünden nasıl yararlanarak hesaplayabilirsiniz:

a) P ve h_a verilmişse a kenarını, b) a ve P verilmişse h_a yüksekliğini?

Örnek 2

Alanı $P = 39\ \text{cm}^2$ olan bir üçgende, a kenarına indirilen yüksekliğin uzunluğu 7,8 cm ise üçgenin bu kenarının uzunluğunu hesapla.

Alıştırmadaki koşullara göre $h_a = 7{,}8$ cm ve $P = 39\ \text{cm}^2$'dir.

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ formülüne göre a kenarı için şunu elde ederiz:

$$a = \frac{2P}{h_a} = \frac{2 \cdot 39\text{cm}^2}{7{,}8\text{cm}} = 10\ \text{cm}.$$

Alıştırma 2

Anya, bir üçgen mozaikten aynı alana sahip, üçgen biçiminde yeni bir mozaik oluşturmaktadır. İlk mozaiğin kenar uzunluğu 9 cm, buna karşılık gelen yüksekliği 6 cm ise ikinci mozaiğin kenarı 12 cm olduğunda yüksekliği ne kadar olur?

Örnek 3

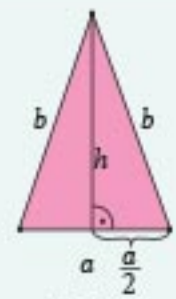
Çevresi $L = 36$ cm ve tabanı $a = 8$ cm olan ikizkenar üçgenin alanını hesapla (Çizim 3).

İkizkenar üçgenin çevresini hesaplama formülü $L = a + 2b$ olduğuna göre şunu elde ederiz:

$$b = \frac{L - a}{2} = \frac{36\text{cm} - 8\text{cm}}{2} = 14\ \text{cm}.$$

Pisagor teoremini uygulayarak, a kenarına indirilen H yüksekliği için şunu buluruz:

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(14\text{cm})^2 - (4\text{cm})^2} = \sqrt{180\text{cm}^2} \approx 13{,}4\,\text{cm}.$$



Çiz. 3

$\sqrt{180}$ değerini hesap makinesindeki uygun tuşla hesaplarız.

Yaklaşık bir değer alırız; bu durumda sonucu bir ondalık basamağa yuvarla.

İkizkenar üçgenin istenen alanı şöyledir:

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{8\text{cm} \cdot 13{,}4\text{cm}}{2} = 53{,}6\ \text{cm}^2.$$

Alıştırma 3

Bir çim alan, kenarları 5 m olan ve tabana ait yüksekliği 3 m olan ikizkenar üçgen biçimindedir. 3 m²'lik alan için her gün 5 l su gerekiyorsa, bir haftalık süre içinde sulama için ne kadar su gereklidir?

Alıştırma 4

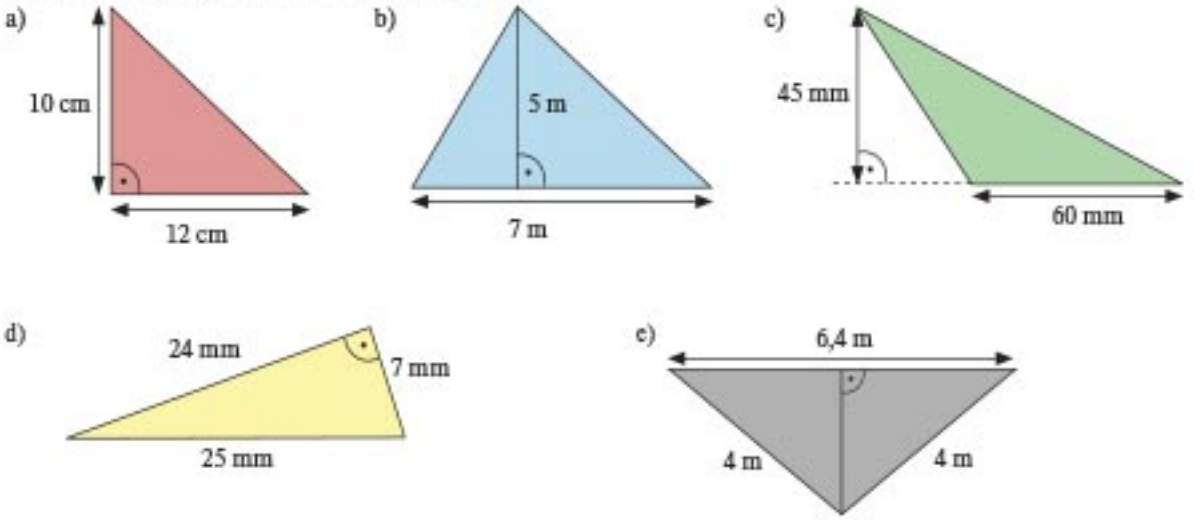
Geminin yelkenini yapmak için gerekli kumaşın alanını hesaplayın (Çizim 4). 1 m²'nin fiyatı 326 denar ise malzeme kaç denar tutar?



Çiz. 4

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çizim 5'teki üçgenlerin alanını hesapla:



Çiz. 5

2. Verilen ABC üçgeni için hesapla:
a) $P = 64$ cm² ve $h_b = 8$ cm ise b kenarını,
b) $P = 8$ cm² ve c = 3,2 cm ise hc yüksekliğini.

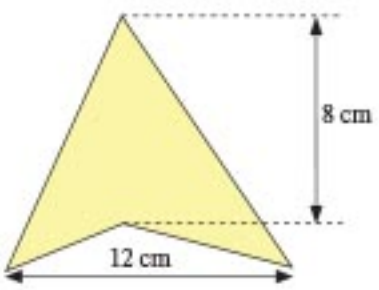
3. a kenarına ve buna karşılık gelen h_a yüksekliğine sahip bir paralelkenar ile $2a$ kenarlı bir üçgenin alanları eşittir.
Üçgenin yüksekliği ne kadardır?

4. Üçgenin alanı nasıl değişir, eğer kenarı:
a) 3 kat artırılır, karşılık gelen yükseklik değişmeden kalırsa,
b) 6 kat azaltılır, karşılık gelen yükseklik ise 2 kat artırılırsa?

5. Alanı 54 cm² olan ve dik kenarlarından biri 2 cm olan bir dik üçgenin çevresini hesaplayın.

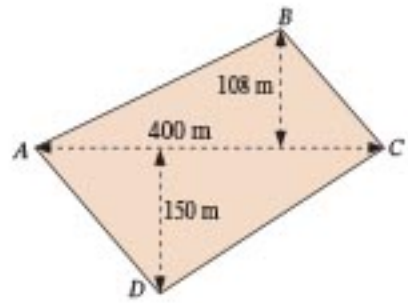
6. Pisagor teoremini kullanarak eşkenar üçgenin alan formülünü çıkarın.

7. Bir okulun amblemi Çizim 6'da verilen biçimdedir.
Onun alanını hesaplayın.



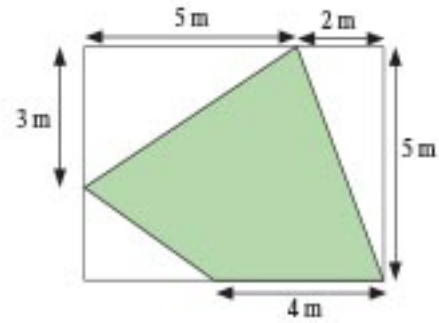
Çiz. 6

8. Çizim 7'de bir çiftçinin tarlası verilmiştir. Çiftçi, tarlasını metrekare başına 1280 denar fiyatla satmak istiyor. Tarlanın fiyatını hesaplayın.



Çiz. 7

9. Çizim 8'deki biçimde olan tarla için tohumlara kaç para gerektiğini hesaplayın; 1 m² için tohum fiyatı 37 denardır.



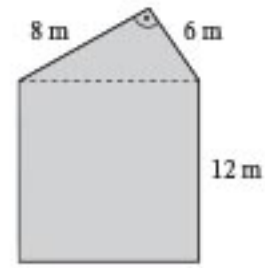
Çiz. 8

10. Okulunuzun yakınında bulunan bir otopark alanını düzenlemesi gereken ekibin bir parçasısınız. Otopark, Çizim 9'da verilen beşgen biçimindedir.

a) 1 m² için fiyat 2350 denar ise toplam asfaltlama kaç denar tutar?

b) Otoparkın üç uzun kenarı boyunca, 1 m genişliğinde; çim ve diğer süs bitkilerinden oluşan küçük bir yeşil şerit öngörülmüştür. 1 m² peyzaj düzenlemesi için 1200 denar ödenmesi gerekiyorsa, yeşil şerit için ne kadar ek ödeme yapılmalıdır?

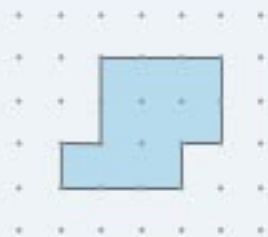
c) Alan için başka olası çözümler de önerin (aydınlatma, su otomatı vb.).



Çiz. 9

Araştırma

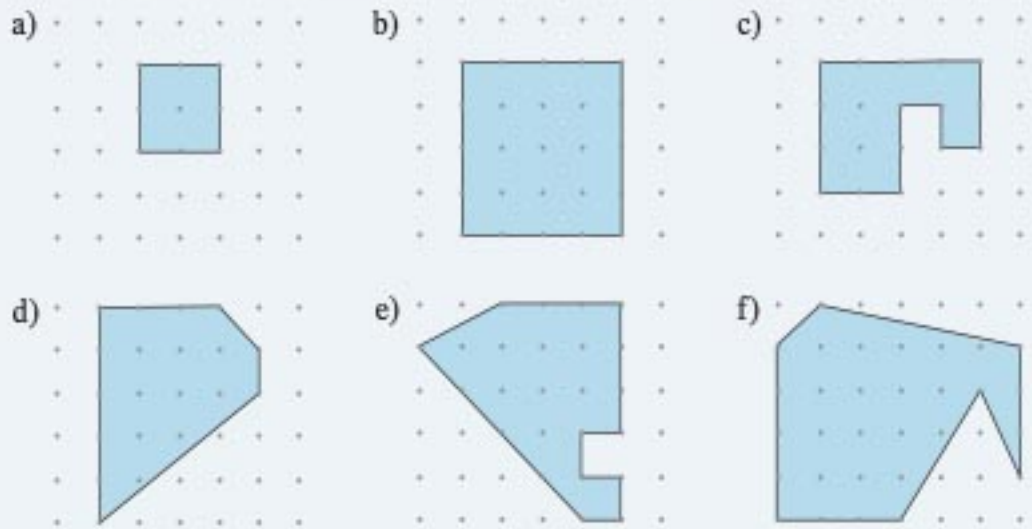
Küçük karelerin köşelerine yerleştirilmiş noktalı kâğıt üzerine çizilmiş 2B şekli incele. 2B şeklin kenarları üzerinde bulunan noktalar sınır noktaları, şeklin iç kısmında bulunan noktalar ise iç noktalar olarak adlandırılır.
Çizim 10'da sınır noktalarının sayısı $G = 14$, iç noktalarının sayısı ise $V = 3$'tür.



Çiz. 10

Çizim 11'e göre verilen tabloyu doldurmaya çalış.

2B şekil	G	$\frac{G}{2}$	V	$\frac{G}{2}+V$	Alan P



Çiz. 11

Tablonun son iki sütununu inceleyin ve P, G ve V'yi birbirine bağlayan bir kural önerin. Noktalı kâğıt üzerine birkaç farklı 2B şekil çizin ve kuralın doğruluğunu kontrol et.

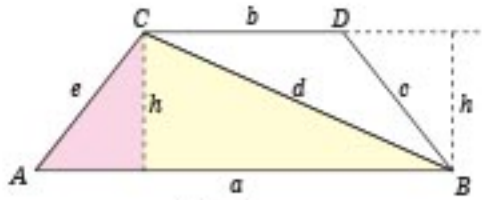
8. YAMUĞUN ALANI

Etkinlik

Bir kâğıt parçasına bir yamuk çizin ve onun tabanlarını a ve b, yüksekliğini ise H ile gösterin. Yamuğu, bir köşegeni boyunca keserek iki üçgene ayırın.

a) Üçgenlerin a kenarına, yani b kenarına indirilen yüksekliği ne kadardır?

b) İki üçgenin alanını hesapla.



Çiz. 1

Çizim 1'de gösterilen *ABCD* yamuğunun alanı, *ABC* üçgeninin alanı ile *BDC* üçgeninin alanının toplamıdır; yani

$$P = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta BDC} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h .$$

Yamuğun alanı, taban uzunluklarının yarı toplamı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Yani, yamuğun alanı P şu formüle göre hesaplanır:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h ,$$

burada a ve b yamuğun tabanları, H ise yüksekliğidir.

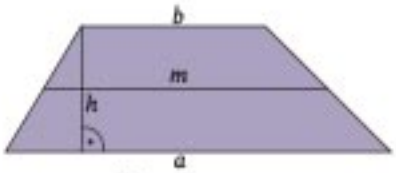
Kodu tara

Yamuğun tabanlarının uzunluklarının yarı toplamı, yamuğun orta çizgisinin uzunluğuna eşit olduğundan

$$m = \frac{a+b}{2},$$

yukarıdaki yamuk alanı formülü şu biçimi alır:

$$P = m \cdot h.$$



Çiz. 2

Örnek 1

Tabanları a = 2,5 dm ve b = 8 dm, yüksekliği H = 3 dm olan bir yamuğun alanını hesapla.

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2{,}5\,\text{dm} + 8\,\text{dm}}{2} \cdot 3\,\text{dm} = 15{,}75\ \text{dm}^2.$$

Alıştırma 1

Orta çizgisi m = 12 cm ve yüksekliği H = 0,72 dm olan bir yamuğun alanını hesapla.

Örnek 2

Yamuğun bir tabanı a = 13 cm, alanı P = 50 cm² ve yüksekliği H = 5 cm verilmiştir. Diğer tabanı hesapla.

Yamuğun alanını hesaplama formülünden $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ şunu elde ederiz:

$$b = \frac{2P}{h} - a = \frac{2 \cdot 50\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}} - 13\,\text{cm} = 7\,\text{cm}.$$

Alıştırma 2

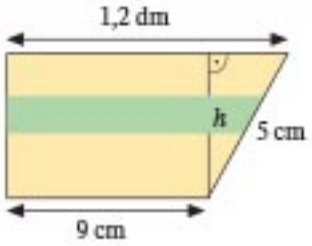
Alanı 1800 cm² ve yüksekliği 9 dm olan bir yamuğun orta çizgisini hesapla.

Alıştırma 3

Bir yamuğun tabanları 8,5 cm ve 5,8 cm, alanı ise 42,9 cm²'dir. Yamuğun yüksekliğini hesapla.

Örnek 3

Lirim, okul yarışmasındaki taraftarlar için dik yamuk biçiminde kâğıt bayraklar yapmak istiyor (Çizim 3). Tabanlar 1,2 dm ve 9 cm, daha uzun yan kenar ise 5 cm'dir. Böyle 40 bayrak yapmak için kaç santimetrekare kâğıda ihtiyaç duyar?



Çiz. 3

Önce tüm uzunlukları aynı ölçü birimine çevirelim.
1,2 dm = 12 cm.
Bayrak yamuk biçimindedir.
Pisagor teoremine göre yamuğun yüksekliği için şunu elde ederiz:

$$h=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-(12\,\text{cm}-9\,\text{cm})^2}=\sqrt{25\,\text{cm}^2-9\,\text{cm}^2}=\sqrt{16\,\text{cm}^2}=4\,\text{cm}.$$

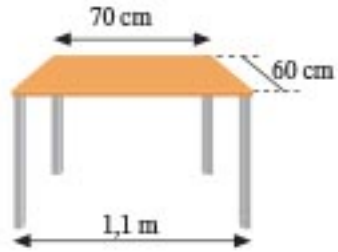
Yamuğun alanı şöyledir:

$$P=\frac{12\,\text{cm}+9\,\text{cm}}{2}\cdot 4\,\text{cm}=\frac{21\,\text{cm}}{2}\cdot 4\,\text{cm}=42\ \text{cm}^2.$$

Lirim'in $40 \cdot 42\ \text{cm}^2 = 1680\ \text{cm}^2$ kâğıda ihtiyacı vardır.

Alıştırma 4

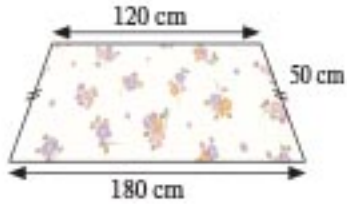
Bir sınıfta ahşap yüzeyi ikizkenar yamuk biçiminde olan 25 sıra vardı (Çizim 4). Ahşap yüzeyin koruyucu boya ile boyanması gerekmektedir. Toplam kaç metrekarelik alan boya ile kaplanmalıdır?



Çiz. 4

Alıştırma 5

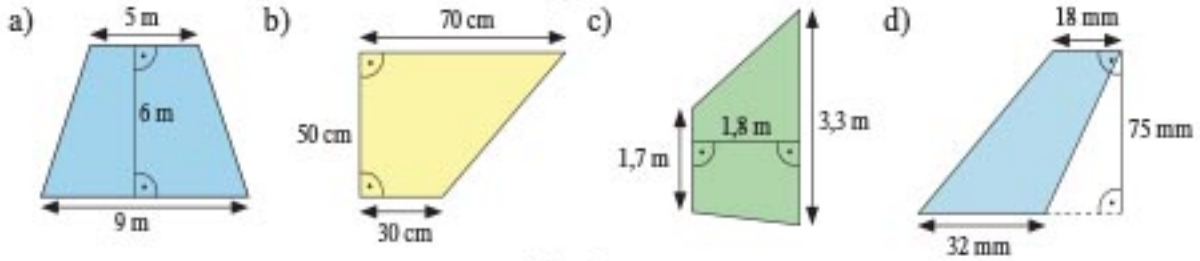
Vesna, Çizim 5'teki malzemeden bir etek yapmak istiyor. Malzemenin alanını hesapla.



Çiz. 5

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çizim 6'da verilen yamukların alanını hesapla.



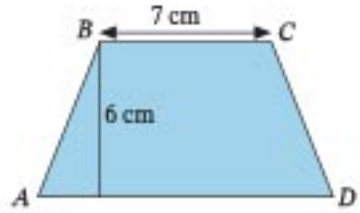
Çiz. 6

2. Defterinize yeniden çizin ve tabloyu yamuk için istenen büyüklüklerle doldurun:

a	42 cm	8 dm		35 cm
b	34 cm	6 dm	20 cm	
h	25 cm		9 cm	12 cm
P		42 dm²	225 cm²	336 cm²

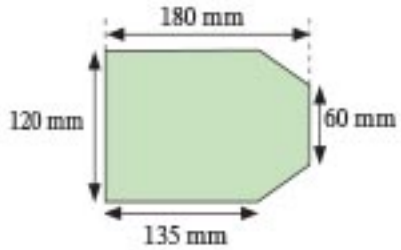
3. Alanı 280 dm² ve yüksekliği 14 dm olan bir yamuğun orta çizgisini hesapla.

4. Alanı $P = 57$ cm² ise Çizim 7'deki $ABCD$ yamuğunun AD kenarının uzunluğunu hesapla.



Çiz. 7

5. Makine elemanları atölyesinde bulunan ince bir metal parça, Çizim 8'deki biçim ve ölçülere sahiptir. Metal parçanın bir yüzünün alanını belirle.



Çiz. 8

6. Tabanları 142 m ve 86 m, yüksekliği 42 m olan yamuk biçimindeki bir tarla pamukla ekilmiştir. 1 dekardan ortalama 95 kg pamuk toplanmıştır. Tüm tarladan kaç kilogram pamuk toplanmıştır?

Yönerge: 1 dekar = 10 ar.

7. Elena, evinin önündeki bahçenin bir bölümünü tabanları 6 m ve 3 m, yüksekliği 2,5 m olan yamuk biçiminde bir çiçeklik alanı olarak düzenlemek istiyor. Elena, her metrekarede 12 fide olacak şekilde çiçek dikmek istiyor.

a) Tüm alan için kaç fideye ihtiyacı olacaktır?

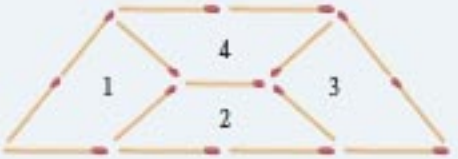
b) Bir fide 50 denar ise toplam gideri ne kadar olacaktır?

c) Yamuğun çevresi boyunca geçen bir sulama sistemi kurarsa kaç metre hortuma ihtiyacı olacaktır?

d) Her fide günde 0,2 kg karbondioksit emerse, dikilen tüm çiçekler bir günde toplam ne kadar karbondioksit emecektir?

Araştırma

Çizim 9'da 10 kibrit çöpünden oluşan bir yamuk gösterilmiştir. Yamuğu, beş başka kibrit çöpünün yardımıyla dört eş yamuk olacak şekilde bölün.

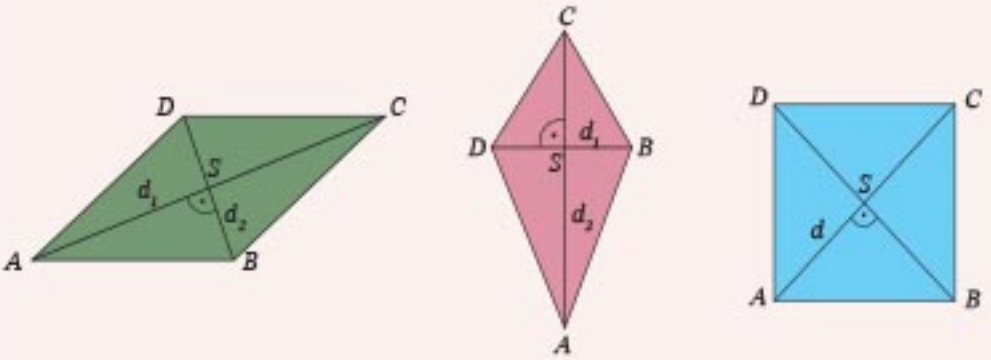


Çiz. 9

9. EŞKENAR DÖRTGENİN, DELTOİDİN VE KARENİN ALANI

Etkinlik

Bir eşkenar dörtgen, deltoid ve kare çizin. Onların köşegenlerini çizin. Çizdiğiniz dörtgenlerin her birinde köşegenlerin birbirine göre konumu nasıldır?



Çiz. 1

AC köşegeni, Çizim 1'deki dörtgenlerin her biri için simetri eksenidir. Buna göre, dörtgenlerin her biri için $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ geçerlidir. Bu, şu anlama gelir:

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ADC}.$$

Ayrıca, her dörtgenin alanı iki üçgenin alanlarının toplamıdır; yani

$$P_{ABCD} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ADC} = 2P_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BS}}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{d_1 \cdot \frac{d_2}{2}}{\cancel{2}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Eşkenar dörtgenin, deltoidin ve karenin alanı, köşegenlerinin uzunluklarının çarpımının yarısına eşittir.

Buna göre, eşkenar dörtgenin ve deltoidin alanı P şu formüle göre hesaplanır:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

burada d_1 ve d_2 eşkenar dörtgenin, yani deltoidin köşegenleridir.

Özel olarak, karenin alanı şu formüle göre hesaplanır:

$$P = \frac{d^2}{2},$$

burada d karenin köşegenidir.

Örnek 1

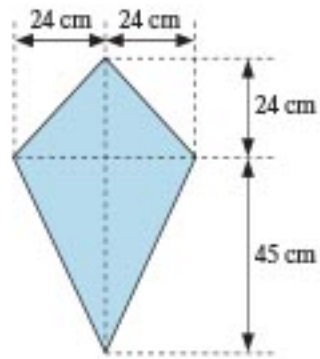
Köşegenleri $d_1 = 4{,}5$ cm ve $d_2 = 8{,}3$ cm olan bir eşkenar dörtgenin alanını hesapla.

Eşkenar dörtgenin alanı şöyledir:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot 8{,}3\,\text{cm}}{2} = 18{,}675\ \text{cm}^2.$$

Alıştırma 1

Çizim 2'de verilen deltoid biçimindeki uçurtmanın alanını hesapla.



Çiz. 2

Etkinlik

Deltoidin alan formülü $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ olduğuna göre, alan P ve diğer köşegenin uzunluğu verilmişse köşegenlerden birinin uzunluğunu nasıl hesaplayabilirsin?

Örnek 2

Alanı 90 cm² ve diğer köşegeni 7,5 cm uzunluğunda olan deltoidin bilinmeyen köşegeninin uzunluğunu hesapla.

Deltoidin alanını hesaplama formülüne göre $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ şunu elde ederiz:

$$d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{2 \cdot 90\,\text{cm}^2}{7{,}5\,\text{cm}} = 24\ \text{cm}.$$

Alıştırma 2

Alanı 150 cm² olan bir karenin köşegeninin uzunluğunu hesapla.

Örnek 3

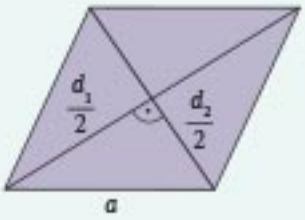
Bir köşegeni 8 cm uzunluğunda olan, kenarı 5 cm uzunluğundaki eşkenar dörtgenin alanını hesapla.

Eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirine diktir (Çizim 3).
Pisagor teoremini uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\frac{d_2}{2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-\left(\frac{8\,\text{cm}}{2}\right)^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}$$

buradan $d_2 / 2 = 3$ cm, yani $d_2 = 3\,\text{cm} \cdot 2 = 6$ cm olduğunu buluruz.
Eşkenar dörtgenin alanı şöyledir:

$$P=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}=\frac{8\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm}}{2}=24\,\text{cm}^2.$$



Çiz. 3

Alıştırma 3

Alanı 36 dam² olan eşkenar dörtgen biçimindeki bir tarlayı çevirmek için kaç metre tel gerektiğini hesapla; tarlanın bir köşegeni 9 dam'dır.

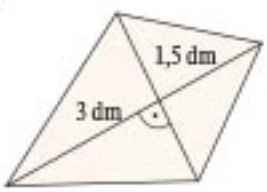
Alıştırma 4

Kenar uzunluğu 60 cm olan kare biçimindeki kaç karo ile deltoid biçimindeki bir meydanın döşenebileceğini hesapla. Meydanın iki uzun kenarı 50 m'dir ve aralarında 60°'lik açı vardır; kısa kenarlar ise dik açı oluşturur.

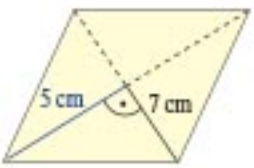
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Çizim 4'te verilen dörtgenlerin alanını hesapla:

a)



b)



c)



Çiz. 4

2. Köşegenleri 16 cm ve 12 cm uzunluğunda olan bir eşkenar dörtgenin yüksekliğini hesapla.

3. Bir deltoidin alanı 9 dm^2, köşegenlerinden biri ise 1,5 dm'dir. Deltoidin diğer köşegeni ne kadardır?

4. Bir deltoid ile bir karenin alanları eşittir. Deltoidin köşegenleri 16 cm ve 4 cm ise karenin köşegenini hesapla.

5. Tea, kenarları 28 cm ve 46 cm uzunluğunda olan deltoid biçiminde süslü bir afiş yapmak istiyor. Simetri ekseni olmayan köşegenlerden biri 35 cm uzunluğundadır. Afişin alanı ne kadardır?
   Not: Kareköklü ifadeyi hesaplamak için hesap makinesi kullan.

6. Bir ilkokulun öğrencileri, okul için mini bir güneş paneli tasarlamaya karar verdiler. Her güneş paneli parçası, köşegenleri 80 cm ve 60 cm olan eşkenar dörtgen biçimindedir.
   a) Okul pavyonunun çatısını kaplamak için 250 parça gerekiyorsa, tüm parçaların kaplayacağı toplam alan ne kadardır?
   b) Güneş paneli parçalarıyla kaplanan yüzeyin bir metrekaresi günde 15 Ws enerji üretiyorsa, toplam yüzeyden bir günde ne kadar enerji üretilecektir?

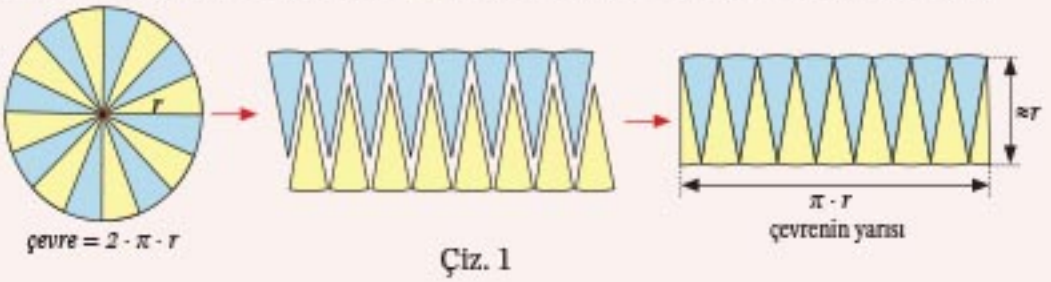
Araştırma

1. Milimetrik kâğıt üzerine dik açıyla kesişen 2 doğru parçası çiz. Sonra onların uç noktalarını bir dörtgenin köşeleri olarak al.
   a) Dörtgenin alanını, milimetrik kâğıttaki kareleri sayarak hesapla.
   b) Alanı, köşegenleri birbirine dik olan dörtgenin alan formülüyle hesapla. İki sonucu karşılaştır. Ne fark ediyorsun?
   c) Milimetrik kâğıt üzerine başka dörtgenler de çiz. Onların alanını, milimetrik kâğıttaki kareleri sayarak hesapla. Köşegenleri birbirine dik olan dörtgenin alan formülüne göre hesaplayarak kontrol yap.
2. Köşegenleri dik olan bir trapezoidin alanının, trapezoidi iki üçgene ayırarak nasıl hesaplanabileceğini açıkla.

10. DAİRENİN ALANI

Etkinlik

Kâğıttan bir daire kes, onu 16 eş parçaya böl ve sonra Çizim 1'deki gibi bir şekil oluştur.



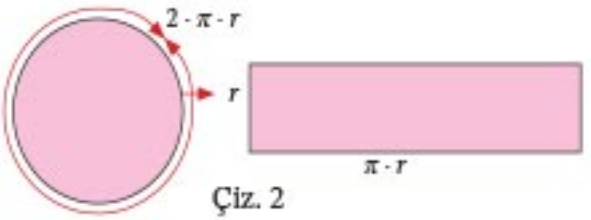
Çiz. 1

Elde edilen şekil sana neyi hatırlatıyor? Bu şekil, daire ile eş alanlıdır.
Onun alanını nasıl belirlersin?

Günlük yaşamda, bir dairenin veya onun parçalarının alanını hesaplama gereksinimiyle birçok kez karşılaşırız.

Kodu tara ve dairenin alan formülüne ulaşmanın bir başka yolunu gör.

Yarıçapı r olan bir dairenin, örneğin 1000 eş dilime bölündüğünü ve bu dilimleri yukarıdaki gibi dizdiğimizi düşünelim. Elde edilen şekil dikdörtgene daha da "yakın" olacaktır; bu nedenle alanı $P \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$ olur (Çizim 2).



Çiz. 2

Dairenin alanı, π sayısı ile yarıçapının karesinin çarpımına eşittir.

Buna göre, dairenin alanı P şu formüle göre hesaplanır:

$$P = \pi r^2,$$

burada r dairenin yarıçapıdır (Çizim 3).

Örnek 1

Yarıçapı 4 cm olan bir dairenin alanını hesapla.

Verilen değerleri dairenin alanını hesaplama formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$P = \pi r^2 \approx 3{,}14 \cdot (4\text{ cm})^2 = 50{,}24\text{ cm}^2.$$

Çok sık şu şekilde de yazarız:

$$P = \pi r^2 = (4\text{ cm})^2 \cdot \pi = 16\pi\text{ cm}^2.$$

Alıştırma 1

Aşağıdakilere sahip dairenin alanını hesapla:
a) yarıçapı 1 dm, b) yarıçapı 3,2 m, c) çapı 10 cm.

Etkinlik

$P = \pi r^2$ formülünden, alan P verilmişse yarıçap r'yi nasıl hesaplayabilirsin?

Örnek 2

Alanı $P = 113{,}04\ \text{cm}^2$ olan bir dairenin çapını hesapla.

Dairenin alanını hesaplama formülünün yardımıyla şunu buluruz:

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{113{,}04\,\text{cm}^2}{3{,}14}} = \sqrt{36\,\text{cm}^2} = 6\ \text{cm}.$$

O hâlde çap için şunu elde ederiz: $d = 2r \approx 2 \cdot 6\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$.

Alıştırma 2

Tavada pişirilen bir akıtmanın alanı $1962{,}5\ \text{cm}^2$ ise akıtma (krep) tavasının çapını hesapla.

Örnek 3

Çevresi $L = 4\pi$ cm olan bir dairenin alanını hesapla.

Çemberin uzunluğu formülü $L = 2r\pi$ olduğuna göre şunu buluruz: $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{4\pi\,\text{cm}}{2\pi} = 2\,\text{cm}$

O hâlde dairenin alanı için şunu elde ederiz: $P = \pi \cdot r^2 = (2\ \text{cm})^2 \cdot \pi = 4\pi\ \text{cm}^2$.

Alıştırma 3

Çevresi 25,12 dm olan bir dairenin alanını hesapla.

Alıştırma 4

Alanı $314\ \text{dm}^2$ olan bir dairenin çevresini hesapla.

Alıştırma 5

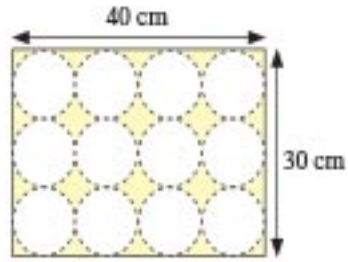
Bir dairenin alanının 25 kat artması için yarıçapı kaç kat artırılmalıdır?

Alıştırma 6

Yere bir su balonu patladığında, yaklaşık 26 cm çapında bir su dairesi oluşturur. Islanan yer yüzeyinin yaklaşık alanını hesapla.

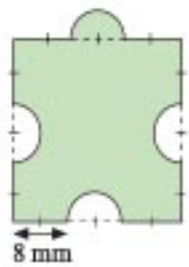
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir dairenin yarıçapı: a) 3 kat, b) 7 kat artırılırsa, dairenin alanı kaç kat artar?
2. Çapı 80 cm olan dairesel bir masa, alanı 1600 cm^2 olan kare biçimindeki bir masa örtüsüyle örtülmüştür. Masa, örtüyle tamamen kaplanmış mıdır?
3. Yarıçapları 6 cm ve 4 cm olan iki daire verilmiştir. Alanı aşağıdakilere eşit olan dairenin yarıçapını bul:
   a) iki dairenin alanlarının toplamına,
   b) iki dairenin alanlarının farkına.
4. Bir eşek, 3,6 m uzunluğunda bir iple bir direğe bağlanmıştır. Eşek ne kadarlık bir alanda hareket edebilir?
5. Yarıçapları $r_1 = 5{,}4$ cm ve $r_2 = 3$ cm olan iki çember içten teğettir. İki çember arasında kalan düzlem parçasının alanını hesapla.
6. Yan, her gün daire biçimindeki kurabiyelerin Çizim 4'te gösterildiği gibi 30 cm'ye 40 cm boyutlarındaki bir hamur parçasından kesildiği bir pastanede çalışmaktadır. Hamur parçasının kesilmeyen bölümünün alanını hesapla.



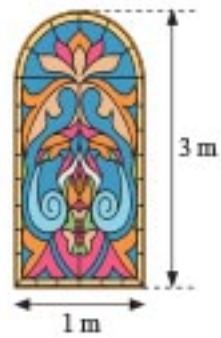
Çiz. 4

7. Bir yapboz parçasının alanını hesapla (Çizim 5) ve sonucu en yakın milimetrekareye yuvarla.



Çiz. 5

8. Vitray camın fiyatı 1 m^2 için 1150 denardır. Maya bir mimardır ve vitraylı 4 pencere yerleştirdiği bir mekân tasarlamaktadır (Çizim 6). Sahip olduğu bütçe 14 000 denardır. Maya'nın projesini gerçekleştirmek için yeterli bütçeye sahip olup olmadığını kontrol et.



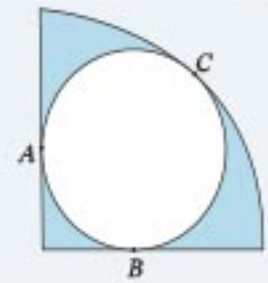
Çiz. 6

Araştırma

Yarıçapı r olan bir daire, yarıçapı R olan çeyrek dairenin içine, A, B ve C noktalarında teğet olacak şekilde çizilmiştir (Çizim 7).

a) R ve r yarıçapları arasındaki ilişkiyi bul.

b) Boyalı şeklin alanının beyaz dairenin alanına oranını bul.



Çiz. 7

11. DAİRE DİLİMİNİN, DAİRE PARÇASININ VE DAİRESEL HALKANIN ALANI

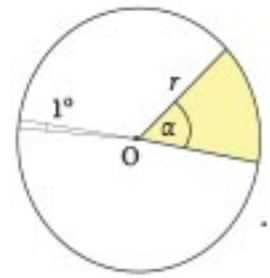
Etkinlik

a) İsteğe bağlı bir yarıçapa sahip iki daire çiz. Birinin içine bir daire dilimi, diğerinin içine ise bir daire parçası çiz. Sonra merkez açıları ve karşılık gelen çember yaylarını göster.

b) İki eş merkezli çember çiz ve aralarındaki bölgeyi boya. Elde edilen şekli adlandır.

Yarıçapı r olan bir dairede, merkez açısı 1° olan daire diliminin (Çizim 1) alanı, dairenin alanının $\frac{1}{360}$'ına eşittir; yani

$$P_{1^\circ} = \frac{\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2 \cdot 1^\circ}{360^\circ}.$$



Çiz. 1

Yarıçapı r olan bir dairede, merkez açısı 2° olan daire dilimi, merkez açısı 1° olan daire diliminden iki kat daha büyük alana sahiptir; yani $P_{2^\circ} = P_{1^\circ} \cdot 2$

Buna göre şunu elde ederiz:

$$P_{2^\circ} = \frac{\pi r^2 \cdot 1^\circ}{360^\circ} \cdot 2 = \frac{\pi r^2 \cdot 2^\circ}{360^\circ}.$$

Bu şekilde düşünerek, yarıçapı r olan bir dairede merkez açısı α olan daire diliminin alanının şu olduğunu çıkarabiliriz:

$$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}.$$

Daire dilimine karşılık gelen yay uzunluğunun $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$ olduğunu biliyoruz; bu nedenle daire diliminin alanını hesaplama formülü şu biçimde yazılabilir:

$$P = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \cdot \frac{r}{2} = \frac{l \cdot r}{2}.$$

Daire diliminin alanı, ona karşılık gelen çember yayının uzunluğu ile yarıçapın çarpımının yarısına eşittir.

Buna göre, daire diliminin alanı P şu formüle göre hesaplanır:

$$P = \frac{l \cdot r}{2},$$

burada l, karşılık gelen çember yayının uzunluğu; r ise dairenin yarıçapıdır.

Örnek 1

Yarıçapı 6 cm olan bir dairede, merkez açısı 57° olan daire diliminin alanını hesapla.

r ve α'nın ölçü değerlerini daire dilimi formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} \approx \frac{3{,}14 \cdot (6\,\text{cm})^2 \cdot 57^\circ}{360^\circ} = 17{,}898\ \text{cm}^2.$$

Alıştırma 1

r = 5 cm ve l = 6,8 cm ise daire diliminin alanını hesapla.

Etkinlik

$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$ formülünden aşağıdakileri nasıl hesaplayabilirsin?

a) P ve α verilmişse yarıçap r'yi,

b) r ve P verilmişse merkez açı α'yı.

Örnek 2

Yarıçapı 7 cm olan bir daire diliminin alanı 64,2 cm²'dir. Dilimin merkez açısının ölçüsünü hesapla.

Daire diliminin alanını hesaplama formülüne göre, α açısı için şunu elde ederiz:

$$\alpha = \frac{360^\circ P}{\pi r^2} \approx \frac{360^\circ \cdot 64{,}2\,\text{cm}^2}{3{,}14 \cdot (7\,\text{cm})^2} = 150^\circ.$$

Alıştırma 2

"Tatlı Nokta" fırınında, daire dilimi biçiminde turta parçaları satılmaktadır. Turtanın tamamı, yarıçapı 20 cm olan daire biçimindedir ve 8 eş parçaya kesilmektedir.

a) Bir turta parçasının merkez açısı kaç derecedir?

b) Bir turta parçasının alanı ne kadardır?

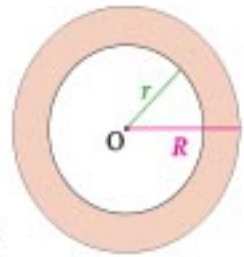
Alıştırma 3

Merkez açısı 70° olan bir açıya karşılık gelen dilimin alanı 15,26 cm² ise bu dairenin yarıçapı kaçtır?

Çizim 2'de iki eş merkezli daire gösterilmiştir. Büyük dairenin yarıçapını R, küçük dairenin yarıçapını ise *r* ile gösterelim.

Dairesel halkanın alanını, büyük dairenin alanından küçük dairenin alanını çıkararak elde ederiz; yani

$$P = \pi R^2 - \pi r^2, \quad P = \pi\left(R^2 - r^2\right).$$



Çiz. 2

Örnek 3

Onu sınırlayan çemberlerin yarıçapları R = 9 cm ve $r = 5{,}7$ cm ise dairesel halkanın alanını hesapla.

Dairesel halkanın alanı formülüne göre şunu buluruz:

$$P = \pi(R^2 - r^2) \approx 3{,}14 \cdot ((9\,\text{cm})^2 - (5{,}7\,\text{cm})^2) = 152{,}3214\,\text{cm}^2.$$

Alıştırma 4

Okul bahçesinin ortasında daire biçiminde bir çeşme vardır. Çeşmenin etrafında öğrenciler, dairesel halka biçiminde bir çiçeklik yapacaktır. Çiçekliğin dış yarıçapı 3 m, iç yarıçapı ise (çeşmenin kenarına kadar) 1,5 m'dir.

a) Çiçekliğin alanını hesapla.

b) 1 m²'yi düzenlemek için 5 bitki gerekiyorsa, tüm çiçeklik için kaç bitki gerekecektir?

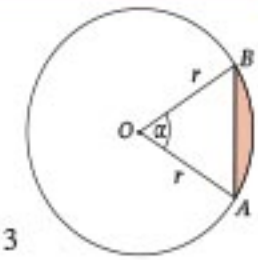
Alıştırma 5

İki eş merkezli çemberin uzunlukları 4π cm ve 10π cm'dir. Çemberlerle sınırlanan dairesel halkanın alanını hesapla.

Alıştırma 6

Yarıçapları $r_1 = 5{,}4$ cm ve $r_2 = 3$ cm olan iki çember içten teğettir. Çemberlerle sınırlanan düzlem parçasının alanını hesapla.

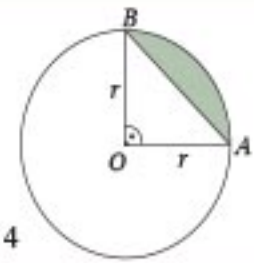
Daire parçasının alanı, merkez açısı α olan daire diliminin alanı ile ikizkenar *ABO* üçgeninin alanı arasındaki fark olarak hesaplanabilir (Çizim 3).



Çiz. 3

Örnek 4

AB kirişi olan daire parçasının alanını hesapla; merkez açı $\alpha = 90°$ ve dairenin yarıçapı $r = 13$ cm'dir (Çizim 4).



Çiz. 4

Daire parçasının alanı şöyledir:

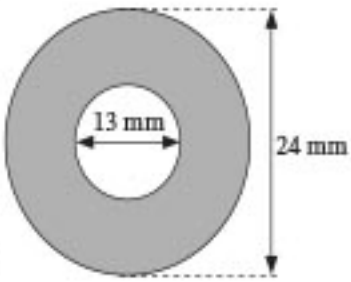
$$P_{\text{Daire parçası}} = P_{\text{Daire dilimi}} - P_{\triangle ABO} \approx \frac{3{,}14 \cdot (13\,\text{cm})^2 \cdot 90°}{360°} - \frac{13\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm}}{2} = 48{,}165\ \text{cm}^2.$$

Alıştırma 7

Yarıçapı $r = 9$ cm olan bir dairede, karşılık gelen çember yayının uzunluğu $l = 14{,}13$ cm ise daire parçasının alanını hesapla.

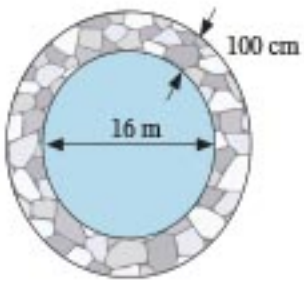
ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdakiler verilmişse daire diliminin alanını hesapla:
   a) $r = 3$ cm ve $\alpha = 30°$, b) $r = 4{,}5$ dm ve $\alpha = 45° 30'$, c) $r = 5$ cm ve $l = 6{,}8$ cm.
2. Merkez açısı aşağıdaki gibi olan bir daire dilimi, bir dairenin alanının ne kadarlık bölümünü oluşturur?
   a) 45°, b) 60°, c) 90°, d) 120°?
3. Bir daire diliminin alanı, dairenin alanının:
   a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $\frac{5}{9}$,
   kadarıdır. Daire dilimine karşılık gelen merkez açı kaç derecedir?
4. İki eş merkezli dairenin alanları 4π cm² ve 36π cm²'dir. Dairesel halkanın genişliğini hesapla.
5. Çizim 5'te verilen makine elemanının üst yüzeyinin alanını hesapla.



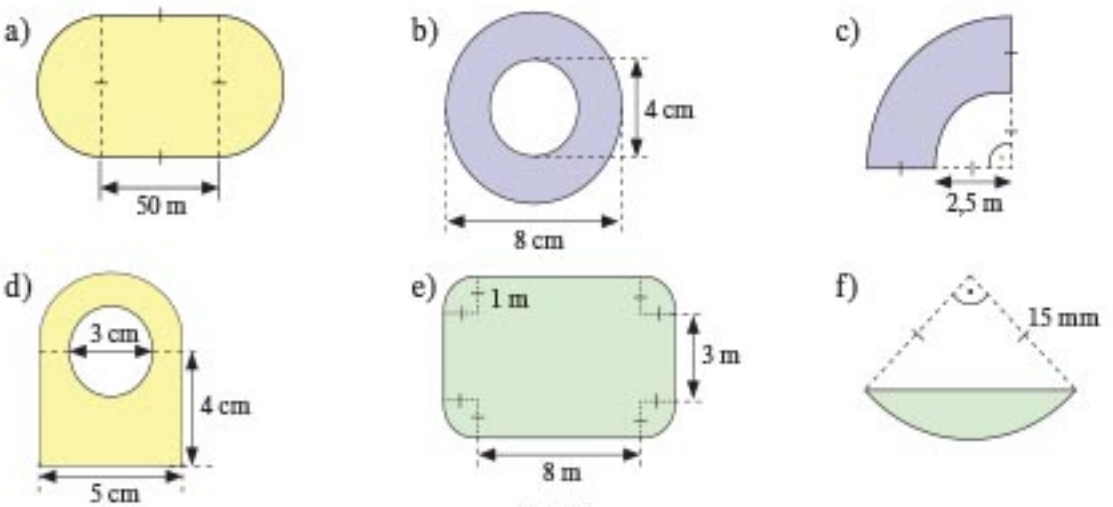
Çiz. 5

6. Küçük dairesel bir göletin çapı 16 m'dir (Çizim 6).
   a) Göletin tabanını kaplamak için gerekli plastik alanını hesapla.
   b) Göletin etrafına, genişliği 100 cm olan ve çakıl taşlarıyla doldurulan bir şerit yerleştirilmelidir. Çakıl taşlarıyla kaplanan yüzeyin alanını hesapla.



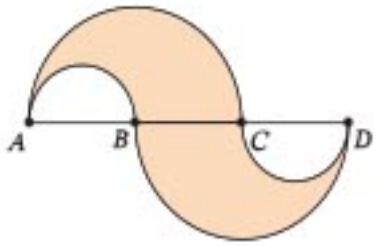
Çiz. 6

7. Çizim 7'de verilen şekillerin alanını hesapla. Sonuçları 2 ondalık basamağa yuvarla.

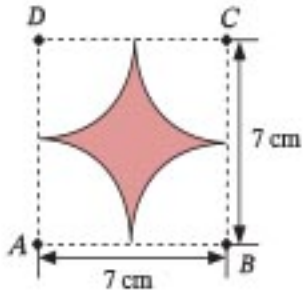


Çiz. 7

8. Dört öğrenci takımı, okul üniformaları için bir arma önerisi hazırlamaktadır. Her grup kendi tasarımını önermektedir. Arma tekstilden yapılmalı ve mümkün olduğunca ekonomik olmalıdır. Hangi arma en az tekstil tüketimiyle yapılır?
Takımların önerileri ve açıklamaları:

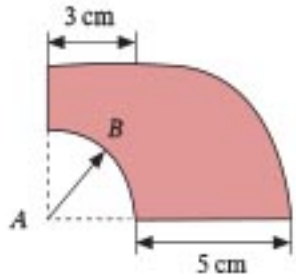


Çiz. 8a

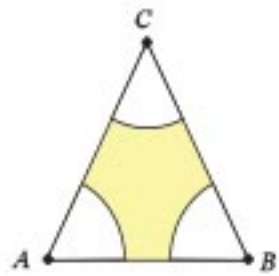


Çiz. 8b

- Birinci takım, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 3$ cm koşuluyla Çizim 8a'da gösterilen armayı hazırlamaktadır.
- İkinci takım, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 7$ cm koşuluyla Çizim 8b'de gösterilen armayı hazırlamaktadır.
- Üçüncü takım, büyük çember yayının yarıçapı 5 cm, küçük çember yayının yarıçapı ise $\overline{AB} = 3$ olmak koşuluyla Çizim 8c'de gösterilen armayı hazırlamaktadır.
- Dördüncü takım, kenarı 7 cm olan ABC eşkenar üçgeninin köşelerinde merkezleri bulunan çember yaylarının yarıçapları 2 cm olmak koşuluyla Çizim 8d'de gösterilen armayı hazırlamaktadır.



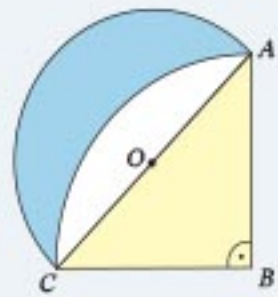
Çiz. 8c



Çiz. 8d

Araştırma

Çizim 9'da mavi renkle boyanmış, iki çember yayıyla sınırlanan şeklin alanının, sarı renkle boyanmış ACB ikizkenar dik üçgeninin alanına eşit olduğunu göster.



Çiz. 9

12. PRİZMANIN VE PİRAMİDİN ALANI

Prizmanın Alanı

Etkinlik

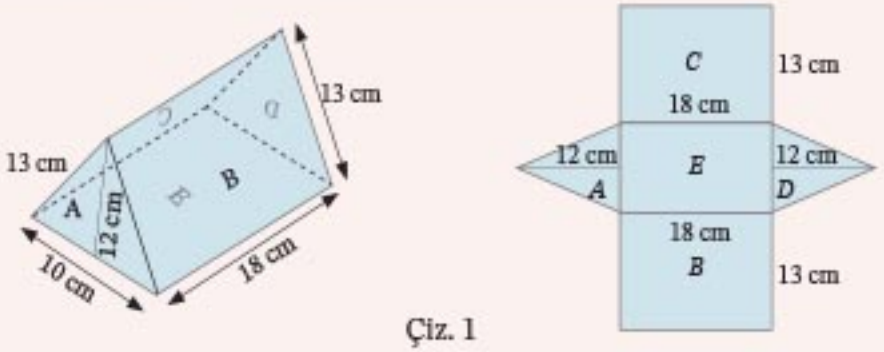
Çizim 1'de verilen prizmayı ve onun açınımını (ağını) incele.

a) Üçgen prizmanın açınımı hangi çokgenlerden oluşmuştur?

b) Prizmanın A yüzünün *D* yüzüyle eş olduğunu, B'nin C ile eş olduğunu, E'nin ise prizmanın diğer yüzlerinden hiçbiriyle eş olmadığını fark et.

c) Prizmanın açınımındaki tüm çokgenlerin alanlarının toplamı neyi temsil eder? Prizmanın alanı nasıl belirlenebilir?

d) Verilen prizmanın alanını, açınımının yardımıyla hesapla.



Çiz. 1

Prizmanın tanımından, onun alanının tüm yüzlerinin alanlarının toplamı olarak hesaplanabileceği açıktır.

Prizmanın alanı, iki tabanının alanları ile yan yüzey alanının toplamıdır.

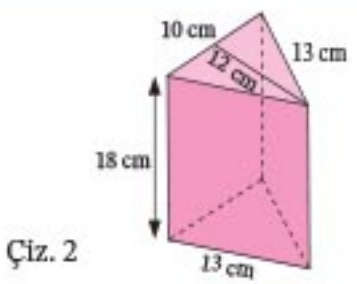
Buna göre, prizmanın alanı *P* şu formüle göre hesaplanır:

$$P = 2B + M,$$

burada *B* tabanın alanı, M ise prizmanın yan yüzey alanıdır.

Örnek 1

Çizim 2'de verilen prizmanın alanını hesapla.



Çiz. 2

Prizmanın tabanı, tabanı 10 cm ve karşılık gelen yüksekliği 12 cm olan ikizkenar üçgendir; bu nedenle alanı şöyledir:

$$B = \frac{10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} = 60\ \text{cm}^2.$$

Prizmanın yan yüzeyi, dikdörtgen olan 3 yan yüzden oluşur. Bunlardan ikisi eştir ve boyutları 13 cm ile 18 cm'dir; üçüncüsünün boyutları ise 10 cm ile 18 cm'dir.
Buna göre, yan yüzey alanı şöyledir:

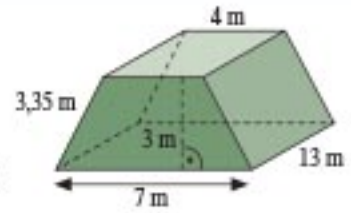
$$M = 2 \cdot 13\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} + 10\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 468\,\text{cm}^2 + 180\,\text{cm}^2 = 648\ \text{cm}^2.$$

Prizmanın alanı şöyledir:

$$P = 2B + M = 2 \cdot 60\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 120\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 768\ \text{cm}^2.$$

Örnek 2

Çizim 3'te verilen prizmanın alanını hesapla.



Çiz. 3

Prizmanın tabanı, alanı

$$B = \frac{7\,\text{m} + 4\,\text{m}}{2} \cdot 3\,\text{m} = 16{,}5\,\text{m}^2.$$

olan bir yamuktur.
Yan yüzey alanı şöyledir:

$$M = 7\ \text{m} \cdot 13\ \text{m} + 4\ \text{m} \cdot 13\ \text{m} + 2 \cdot 3{,}35\ \text{m} \cdot 13\ \text{m} = 230{,}1\ \text{m}^2$$

Prizmanın alanını hesaplama formülüne göre şunu elde ederiz:

$$P = 2B + M = 2 \cdot 16{,}5\ \text{m}^2 + 230{,}1\ \text{m}^2 = 263{,}1\ \text{m}^2.$$

Alıştırma 1

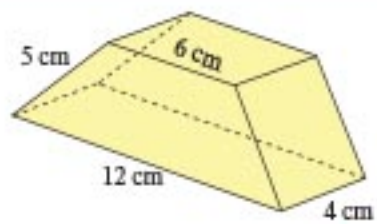
Tabanı, dik kenarları $a = 5$ cm ve $b = 12$ cm olan bir dik üçgen olan prizmanın alanını hesapla; yüksekliği $H = 17{,}4$ cm'dir.

Alıştırma 2

Tabanı, köşegenleri $d_1 = 8$ cm ve $d_2 = 6$ cm olan bir eşkenar dörtgen olan dörtgen prizmanın alanını hesapla; yüksekliği $H = 0{,}74$ dm'dir.

Alıştırma 3

Bir kutu, Çizim 4'teki gibi şekle ve boyutlara sahiptir. Kutuyu yapmak için gerekli kartonun alanını hesapla.



Çiz. 4

Piramidin Alanı

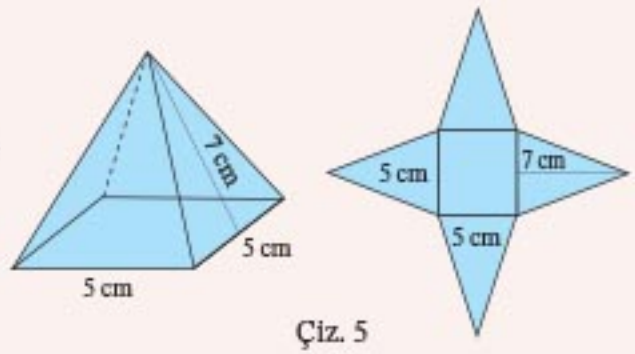
Etkinlik

Çizim 5'te verilen piramidi ve onun açınımını incele.

a) Dörtgen piramidin açınımı hangi çokgenlerden oluşmuştur?

b) Piramidin açınımındaki tüm çokgenlerin alanlarının toplamı neyi temsil eder? Piramidin alanı nasıl belirlenebilir?

c) Verilen piramidin alanını, açınımının yardımıyla hesapla.



Çiz. 5

Piramidin tanımından ve genel olarak piramidin açınımından, onun alanının tüm yüzlerinin alanlarının toplamı olarak hesaplanabileceği görülür.

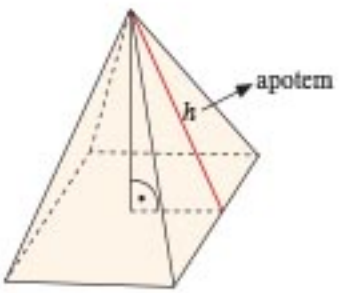
Piramidin alanı, tabanının alanı ile yan yüzey alanının toplamıdır.

Buna göre, piramidin alanı P şu formüle göre hesaplanır:

$$P = B + M,$$

burada B tabanın alanı, M ise piramidin yan yüzey alanıdır.

Düzgün bir piramidin tepesinden karşılık gelen taban kenarına indirilen yan yüz yüksekliğine **piramidin apotemi** denir (Çizim 6).



Çiz. 6

Örnek 3

Taban kenarı $a = 12$ cm ve apotemi $H = 16$ cm olan düzgün dörtgen piramidin alanını hesapla.

Piramidin tabanı bir karedir ve taban alanı şöyledir:

$$B = a^2 = (12\text{ cm})^2 = 144\text{ cm}^2.$$

Yan yüzey, tabanı 12 cm ve yüksekliği 16 cm olan 4 ikizkenar üçgenden oluşur. Onun alanı şöyledir:

$$M = 4 \cdot \frac{ah}{2} = 2 \cdot 12\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 384\ \text{cm}^2.$$

Piramidin alanını hesaplama formülüne göre şunu buluruz:

$$P = B + M = 144\text{ cm}^2 + 384\text{ cm}^2 = 528\text{ cm}^2.$$

Örnek 4

Taban kenarı a = 12 cm olan düzgün üçgen piramidin yan yüzey alanı M = 144 cm²'dir.

Piramidin apotemini hesapla.
Üçgen piramidin yan yüzeyi, tabanı a = 12 cm ve hesaplanması gereken apotemi H olan 3 eş ikizkenar üçgenden oluşur.
Yan yüzey alanı

$$M = 3 \cdot \frac{ah}{2}$$

olduğundan, apotemin şöyle olduğunu buluruz:

$$h = \frac{2M}{3a} = \frac{2 \cdot 144\,\text{cm}^2}{3 \cdot 12\,\text{cm}} = \frac{288\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}} = 8\ \text{cm}.$$

Alıştırma 4

Bir dekorasyon mağazasında altıgen piramit biçiminde cam bir süs satılmaktadır. Süsün toplam alanı 900 cm²'dir. Her yan yüzün alanı 100 cm²'dir.

a) Piramidin kaç yan yüzü vardır?

b) Tabanın alanı ne kadardır?

c) Taban düzgün altıgen ise taban kenarının uzunluğu ne kadardır?

Örnek 5

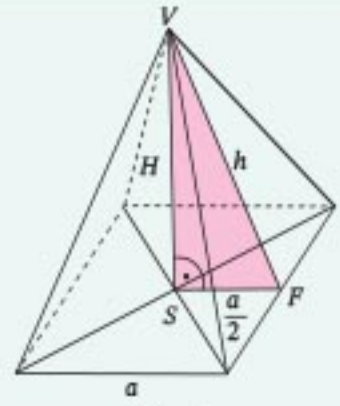
Taban kenarı a = 5 cm ve yüksekliği H = 6 cm olan düzgün dörtgen piramidin alanını hesapla.

FSV dik üçgeninden, Pisagor teoreminin yardımıyla apotemi hesaplayacağız (Çizim 7).

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 + (2{,}5\,\text{cm})^2} = \sqrt{42{,}25\,\text{cm}^2} = 6{,}5\,\text{cm}.$$

Piramidin alanını hesaplama formülüne göre şunu buluruz:

$$P = B + M = a^2 + 4\frac{ah}{2} = (5\,\text{cm})^2 + 2 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 6{,}5\,\text{cm} = 90\ \text{cm}^2.$$



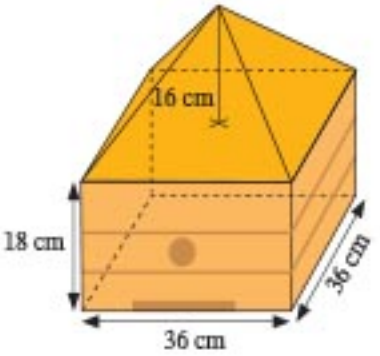
Çiz. 7

Alıştırma 5

Bir kamp çadırı, düzgün dörtgen piramit biçimindedir. Çadırın yüksekliği 3 m, apotemi ise 5 m'dir. Çadırı kurmak için kaç metrekarelik arazi gereklidir?

Alıştırma 6

Bir arıcı, dikdörtgenler prizması biçiminde ve kapağı piramit biçiminde olan bir arı kovanı yapmıştır (Çizim 8). Kovanın tamamı, yağmurdan korunması için özel su geçirmez boya ile boyanmalıdır.
Bir kutu boya ile 150 cm²'lik alan boyanabiliyorsa, kovanın tüm dış yüzeyini boyamak için kaç kutu boya gerekecektir?

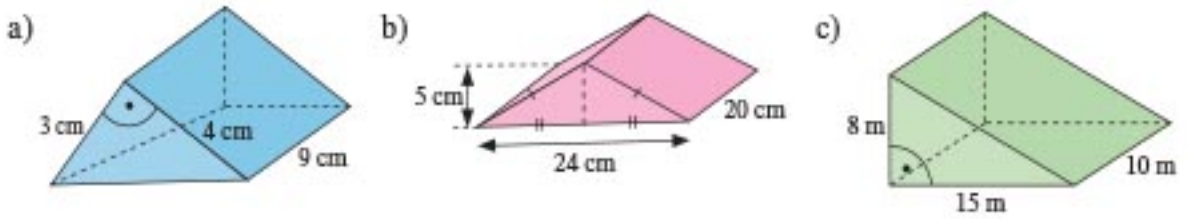


Çiz. 8

ALIŞTIRMA SORULARI

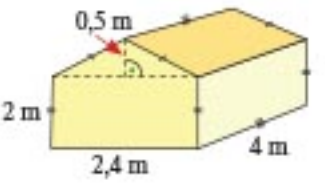
1. Düzgün altıgen prizmanın yan yüzey alanı 660 cm², yüksekliği ise 10 cm'dir. Tabanın alanını hesapla.

2. Çizim 9'da verilen prizmaların alanlarını hesapla:



Çiz. 9

3. Çizim 10'da gösterilen botanik bahçesi, metrekaresi 350 denar olan plastik folyodan yapılmıştır. Plastik folyo toplam kaç denara mal olur?



Çiz. 10

4. Aşağıdakilerin alanını hesaplama formülünü yaz:
a) düzgün üçgen piramit, b) düzgün altıgen piramit.

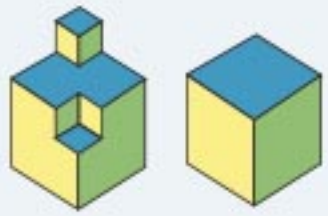
5. Kartondan yapılmış çikolatalı süt ambalajı, kenarı 10 cm olan tetrahedron biçimindedir. Ambalajı yapmak için gerekli kartonun alanı ne kadardır?

6. Bir çatı, apotemi 2 m ve taban kenarı 2 m olan düzgün altıgen piramit biçimindedir. Bir parçanın alanı 2 m² ise çatı için kaç parça sac gereklidir?

7. Okulundaki öğrenciler, ekolojik bir turistik çekim merkezi tasarımı yarışmasına katılmaktadır. Takım, geri dönüştürülmüş camdan yapılacak piramit biçiminde bir pavyon hazırlamalıdır. Piramidin tabanı, kenarı 2 m olan düzgün altıgendir; apotemi ise 3 m'dir. Metrekaresi 1200 denar ise kullanılan camın maliyeti ne kadar olacaktır?

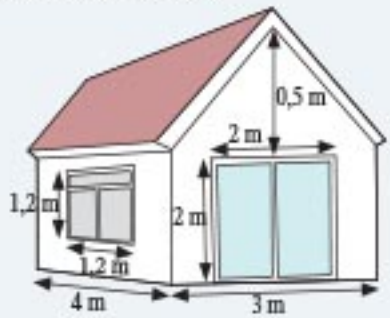
Araştırma

1. Küpten çıkarılan parça, onun üzerine yerleştirilmiştir (Çizim 11).
İki 3B şeklin alanlarını karşılaştır.
Eşit midir?
Cevabını gerekçelendir.



Çiz. 11

2. Aletleri saklamak için küçük bir kulübe yapmak üzere tahta kalaslar, cam ve sac gereklidir. Kulübenin boyutları Çizim 12'deki gibidir; duvarlar ve çatı ahşaptandır, kapı sactandır, pencereye ise yalnızca cam takılır.
Kulübeyi inşa etmek için malzeme bütçesinin ne kadar olması gerektiğini hesapla.
Uygun mağazalardaki veya internetteki fiyatlar hakkında bilgi edin.
Başka hangi malzemelerin gerekli olduğunu araştır; örneğin yapı elemanlarını birleştirmek, kaplama ve koruma yapmak vb. için gereken malzemeler.



Çiz. 12

13. PRİZMANIN VE PİRAMİDİN HACMİ

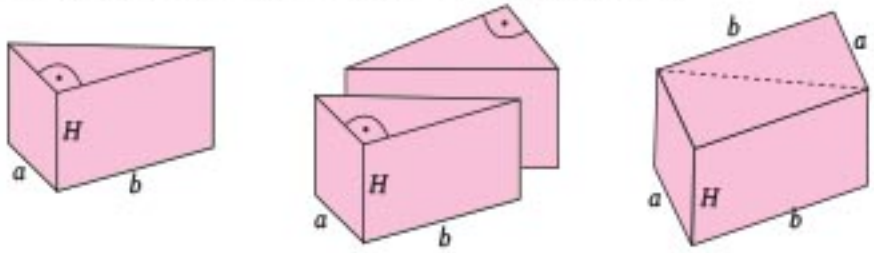
Prizmanın Hacmi

Etkinlik

Günlük yaşamdan dikdörtgenler prizması biçimindeki bir mısır gevreği kutusunun veya başka bir nesnenin hacmini bul. Hacim büyüklüğü neyi temsil eder?

Prizmanın hacmini hesaplama formülüne götüren adımları izleyelim.

1. Tabanı dik üçgen olan bir prizmanın hacmini bulalım (Çizim 1).



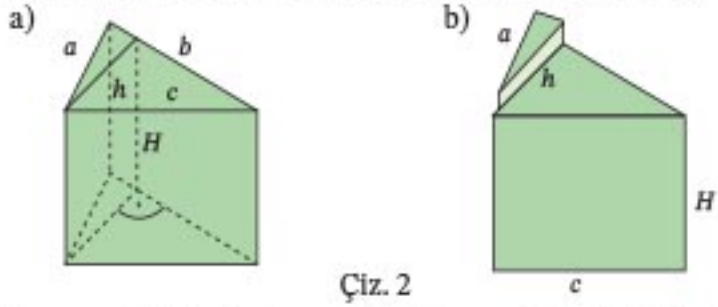
Çiz. 1

Çizim 1'e göre, verilen üçgen prizmanın hacmi; boyutları a, *b* ve *h* olan dikdörtgenler prizmasının hacminin yarısı olarak hesaplanabilir; yani

$$V = \frac{a \cdot b \cdot H}{2} = \frac{a \cdot b}{2} H = B \cdot H$$

burada B, prizmanın taban alanı (dik üçgenin alanı), *H* ise prizmanın yüksekliğidir.

2. Tabanı herhangi bir üçgen olan prizmanın hacmini bulalım (Çizim 2).



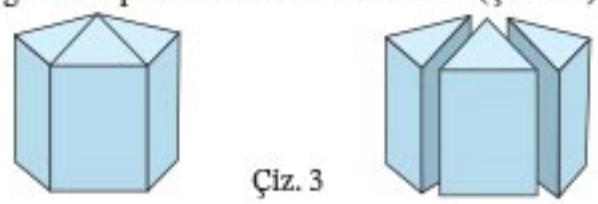
Çiz. 2

Bu durumu önceki duruma indirgeriz; bunun için tabanın yüksekliklerinden birini çizeriz. Bu şekilde ortak bir dik kenarı olan iki dik üçgen elde ederiz.

Şimdi üçgen prizma, tabanları dik üçgen olan iki üçgen prizmaya ayrılmıştır; bu nedenle onun hacmi iki prizmanın hacimlerinin toplamı olacaktır:

$$V = V_1 + V_2 = B_1 \cdot H + B_2 \cdot H = (B_1 + B_2) \cdot H = B \cdot H.$$

3. Tabanı herhangi bir çokgen olan prizmanın hacmini bulalım (Çizim 3).



Çiz. 3

Prizmanın tabanının herhangi bir çokgen olduğu durumda, çokgenin bir köşesinden tüm köşegenleri çizeriz. Bu şekilde çokgen, sonlu sayıda üçgene ayrılır. Elde edilen üçgenlerin her biri için daha önce incelediğimiz yöntemleri uygularız. Yukarıdakine benzer şekilde şunu elde ederiz:

$V = B \cdot H.$

Prizmanın hacmi, taban alanı ile prizmanın yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Buna göre, prizmanın hacmi V şu formüle göre hesaplanır:

$V = B \cdot H,$

burada B tabanın alanı, H ise prizmanın yüksekliğidir.

Örnek 1

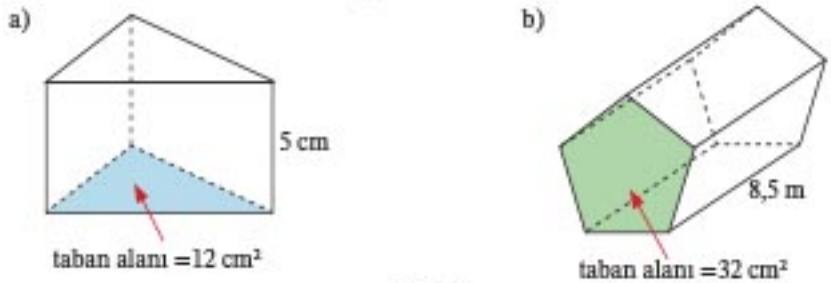
Tabanı, kenarı a = 4 cm ve ona ait yüksekliği $H = 5$ cm olan bir üçgen olan prizmanın hacmini hesapla; prizmanın yüksekliği $H = 6$ cm'dir.

Prizmanın hacmini hesaplama formülüne göre şunu elde ederiz:

$$V = B \cdot H = \frac{a \cdot h}{2} \cdot H = \frac{4\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}}{2} \cdot 6\,\text{cm} = 60\ \text{cm}^3.$$

Alıştırma 1

Çizim 4'teki prizmaların hacmini hesapla:



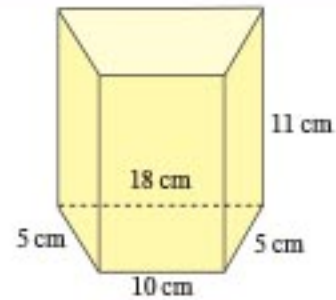
Çiz. 4

Alıştırma 2

Bir çikolata ambalajı, taban kenarı 5 cm ve yüksekliği 18 cm olan düzgün üçgen prizma biçimindedir. Ambalajın hacmi ne kadardır?

Örnek 2

Tabanı; tabanları a = 18 cm, $b = 10$ cm ve yan kenarı c = 5 cm olan ikizkenar yamuk biçiminde olan dörtgen prizmanın hacmini hesapla; yüksekliği $H = 11$ cm'dir (Çizim 5).



Çiz. 5

Öncelikle, prizmanın tabanı olan yamuğun yüksekliğini belirleyeceğiz (Çizim 6).

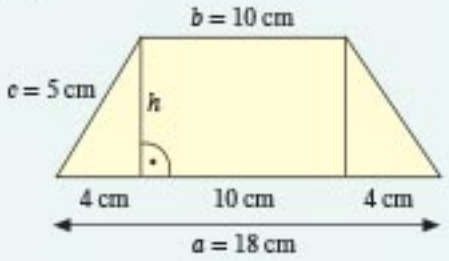
$$h=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-(4\,\text{cm})^2}=\sqrt{25\,\text{cm}^2-16\,\text{cm}^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}.$$

Yamuğun alanını hesaplama formülüne göre, taban alanı için şunu elde ederiz:

$$B=\frac{a+b}{2}h=\frac{18\,\text{cm}+10\,\text{cm}}{2}\cdot 3\,\text{cm}=42\ \text{cm}^2.$$

Prizmanın hacmini hesaplama formülüne göre şunu elde ederiz:

$$V=B\cdot H=42\ \text{cm}^2\cdot 11\ \text{cm}=462\ \text{cm}^3.$$



Çiz. 6

Alıştırma 3

Tabanı, köşegenleri $d_1 = 24$ cm ve $d_2 = 13$ cm olan deltoid biçimindeki prizmanın hacmini hesapla; yüksekliği $H = 7{,}2$ cm'dir.

Etkinlik

$V = B \cdot H$ formülünden aşağıdakileri nasıl hesaplayabilirsin?
a) V ve H verilmişse taban alanı B'yi, b) V ve B verilmişse yükseklik H'yi.

Örnek 3

Düzgün dörtgen prizma biçimindeki küçük bir akvaryuma, $H = 2{,}1$ dm yüksekliğe kadar 8,4 l su dökülmüştür. Akvaryumun taban kenarı kaçtır?

Düzgün dörtgen prizmanın tabanı karedir. Prizmanın hacmini hesaplama formülüne göre şunu elde ederiz:

$$V=B\cdot H=a^2\cdot H$$

Buradan, taban kenarının uzunluğu için şunu buluruz:

$$a=\sqrt{\frac{V}{H}}=\sqrt{\frac{8{,}4\,\text{dm}^3}{2{,}1\,\text{dm}}}=\sqrt{4\,\text{dm}^2}=2\,\text{dm}\qquad (1\,l=1\,\text{dm}^3).$$

Alıştırma 4

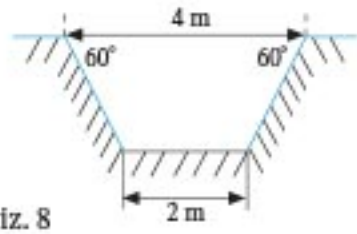
Çizim 7'de, boyutlarıyla birlikte bir akvaryum verilmiştir. Akvaryumdaki su yüzeyi, akvaryumun yüksekliğinden 5 cm aşağıdadır. Akvaryumda kaç litre su vardır?



Çiz. 7

Alıştırma 5

Suyun bol olduğu bir arazide yol yapımı sırasında, suyun akacağı bir kanal kazılması gerekmiştir. Kanalın enine kesiti Çizim 8'de verilmiştir. Kanal 2 km uzunluğunda ise kazı sırasında kaç metreküp toprak çıkarılmıştır?



Çiz. 8

Piramidin Hacmi

Etkinlik

Tabanları eş ve yükseklikleri eşit olan bir prizma ve piramit modelini kartondan yap. Sonra piramidi suyla (kum, pirinç veya şekerle) doldur ve tüm miktarı prizmaya aktar. Prizma dolana kadar işlemi tekrarla. Ne fark ediyorsun?

Piramidin hacmi, taban alanı ile piramidin yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

Buna göre, piramidin hacmi V şu formüle göre hesaplanır:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H,$$

burada B tabanın alanı, H ise piramidin yüksekliğidir.

Örnek 4

Yüksekliği 150 m olan ve tabanı, kenarı 230 m uzunluğunda bir kare olan Keops Piramidi'nin hacmi kaç metreküptür?

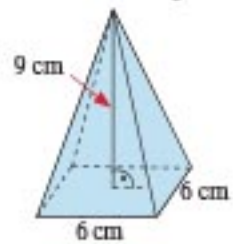
Piramidin hacmini hesaplama formülüne göre şunu elde ederiz:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (230\ \text{m})^2 \cdot 150\ \text{m} = 2645000\ \text{m}^3.$$

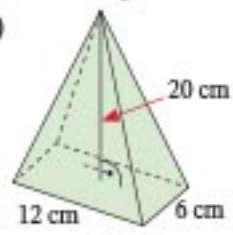
Alıştırma 6

Çizim 9'da verilen piramitlerin hacmini hesapla:

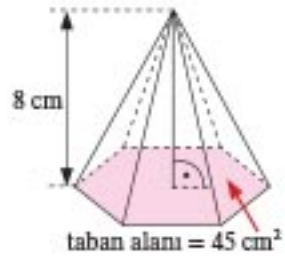
a)



b)



c)



Çiz. 9

Etkinlik

$V = \frac{1}{3} B \cdot H$, formülünden aşağıdakileri nasıl hesaplayabilirsin?

a) V ve H verilmişse taban alanı B'yi,

b) V ve B verilmişse yükseklik H'yi.

Örnek 5

Hacmi 12 cm^3 ve taban alanı 4 cm^2 olan bir piramidin yüksekliğini hesapla.

Piramidin hacmini hesaplama formülünden şunu buluruz:

$$H = \frac{3 \cdot V}{B} = \frac{3 \cdot 12\ cm^3}{4\ cm^2} = 9\ cm.$$

Alıştırma 7

Hacmi 8 cm^3 ve yüksekliği $H = 2$ cm olan bir piramidin taban alanını hesapla.

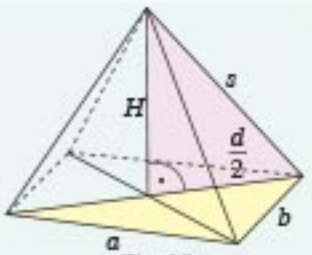
Örnek 6

Tabanı, boyutları a = 24 cm ve $b = 32$ cm olan bir dikdörtgen olan piramidin hacmini hesapla; yan ayrıtı 25 cm'dir.

Piramidin taban köşegeni şöyledir:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{576\ cm^2 + 1024\ cm^2} = \sqrt{1600\ cm^2} = 40\ cm.$$

Dikdörtgen tabanın köşegeninin yarısı, yan ayrıt ve piramidin yüksekliğiyle oluşturulan dik üçgenden, piramidin yüksekliği için şunu elde ederiz (Çizim 10):



Çiz. 10

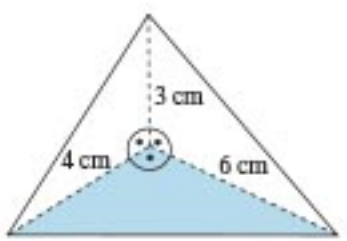
$$H = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(25\ cm)^2 - (20\ cm)^2} = \sqrt{625\ cm^2 - 400\ cm^2} = \sqrt{225\ cm^2} = 15\ cm.$$

Piramidin hacmini hesaplama formülüne göre hacmin şöyle olduğunu buluruz:

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{abH}{3} = \frac{24\ cm \cdot 32\ cm \cdot 15\ cm}{3} = 3840\ cm^3$$

Alıştırma 7

Bir marangoz, dikdörtgenler prizması biçimindeki başka bir tahta parçasından üçgen piramit biçiminde bir parça kesmektedir. Kesilen tahta parçasının boyutları Çizim 11'de verilmiştir. Onun hacmini bul.

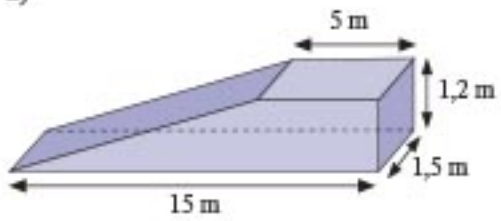


Çiz. 11

ALIŞTIRMA SORULARI

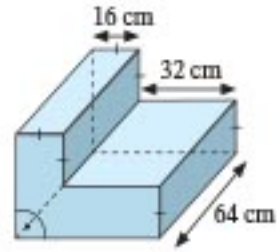
1. Aşağıdakilerin yapımı için kullanılması gereken betonun hacmini hesapla:
a) Çizim 12a'daki rampa, b) Çizim 12b'deki merdivenler.

a)



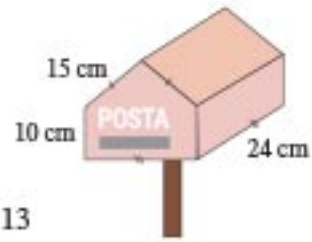
Çiz. 12a

b)



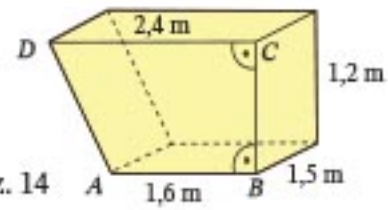
Çiz. 12b

2. a) Posta kutusundaki havanın hacmini bul (Çizim 13).
b) Kutunun içine boyutları 23 cm, 12 cm ve 5 mm olan üç zarf yerleştirilmiştir. Kutudaki kullanılmayan boşluğun hacmi ne kadardır?



Çiz. 13

3. Çizim 14'te bir kompost konteyneri verilmiştir. Konteyner kaç metreküp kompost alır?



Çiz. 14

4. Tabanı, kenarları $a = 7\frac{1}{2}$ cm, $b = 8\frac{1}{3}$ cm, $c = 2\frac{2}{3}$ cm, olan ikizkenar yamuk biçimindeki prizmanın hacmi ne kadardır; yüksekliği $H = 5$ cm'dir?

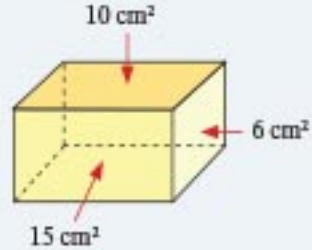
5. Düzgün dörtgen piramidin hacmi 810 cm^3, yüksekliği ise 30 cm'dir. Piramidin taban kenarını bul.

6. Düzgün üçgen piramidin yüksekliği $H = 6$ cm ve apotemi $H = 7$ cm'dir. Piramidin alanını ve hacmini hesapla.

7. Tabanı, boyutları 2,4 m ve 3,2 m olan dikdörtgen biçiminde ve yan ayrıtı 2,5 m olan piramit biçimindeki bir su deposu kaç litre yağmur suyu alır?

Araştırma

Yüzlerinin alanları verilmişse Çizim 15'teki dikdörtgenler prizmasının hacmini bul.



Çiz. 15

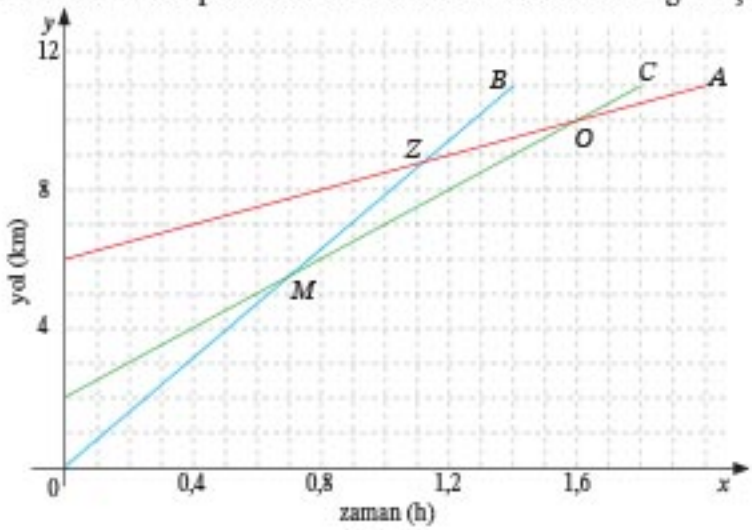
TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

1. Dönüştür: 10 yıl 9 ay 20 gün 15 saati:
   a) yıla, b) aya, c) güne, d) saate.

2. Mimi $12\frac{3}{4}$ yaşındadır, Emi ise $9\frac{1}{6}$ yaşındadır.
   a) 10 ay önce her biri kaç yaşındaydı?
   b) Mimi, Emi'den kaç yaş büyüktür?

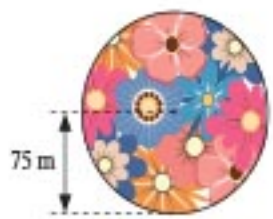
3. A şehrinden sabah saat 9'da hareket eden bir kamyonun yolunu gösteren bir grafik çiz. Kamyon iki saat sonra yarım saat mola veriyor ve saat 14'te A şehrinden 250 km uzakta olan *B* şehrine varıyor. Orada 1 saat kalıyor. Sonra geri dönüyor, molasız gidiyor ve saat 19'da A şehrine varıyor.

4. A, *B* ve C turist grupları, otobüsle şehri panoramik olarak gezmeye gidiyor. M noktası tarih müzesi, Z noktası hayvanat bahçesi, O noktası ise opera binasıdır (Çizim 1).
   a) Opera binası ile tarih müzesi birbirinden ne kadar uzaktadır?
   b) Gruplardan hangisi opera binasının yanından geçmemiştir?
   c) *B* ve C grupları hangi yapının önünde karşılaşmıştır?
   d) Hangi grup şehir içinde en hızlı, hangisi en yavaş yol almıştır?
   e) Gruplardan hangisi en uzun, hangisi en kısa yolu gitmiştir?
   f) C grubu tarih müzesinden opera binasına kadar ne kadar sürede gitmiştir?



Çiz. 1

5. Nataliya, çiçek bahçesinin etrafını çitle çevirmek istemektedir (Çizim 2). Nataliya'nın kaç metre çite ihtiyacı olacaktır?



Çiz. 2

6. Sanya, uzunluğu 1 m olan ince bir telden, daire biçiminde kolye halkaları yapmak istemektedir. Her halkanın çapı 1 cm'dir. Sanya kaç halka yapabilir ve kolyesinin uzunluğu ne kadar olur?

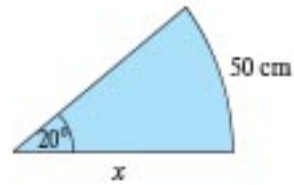
7. Bir saatin dakika ibresinin uzunluğu 6 cm'dir. Bu ibrenin ucu, öğle vaktinden 13.30'a kadar ne kadar yol alır?

8. Çizim 3'te x ile gösterilen elemanları hesapla.

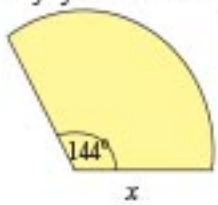
a) x — çember yayının uzunluğu



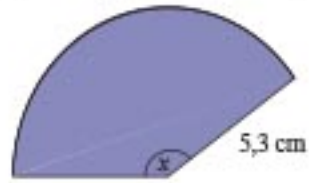
b) çember yayının uzunluğu = 50 cm



c) çember yayının uzunluğu = 10π cm

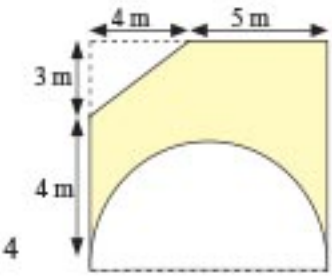


d) çember yayının uzunluğu = 22,81 cm



Çiz. 3

9. Çizim 4'te verilen şeklin çevresini bul.



Çiz. 4

10. Bir asansörün taban alanı için en uygun tahmin hangisidir?

a) 3 mm^2, b) 3 cm^2, c) 3 m^2, d) 3 ha.

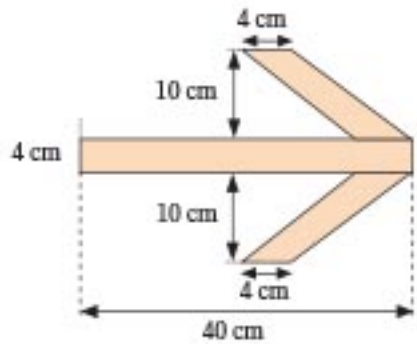
11. Aşağıdakilerin alanını ifade etmek için en uygun ölçü birimini yaz:

a) *DVD*, b) tenis kortu, c) 1 denarlık madeni para, d) İspanya.

12. Leonid, ahşap süs eşyaları yapan bir ustadır. Çevresi 96 dm olan ve karşılıklı kenarları arasındaki uzaklığı 10 dm olan eşkenar dörtgen biçiminde bir ahşap parçası vardır. Elinde, etiketinde "Her desimetrekare için 50 ml boya kullanınız." yazan 400 ml'lik bir ahşap boyası kutusu bulunmaktadır. Leonid'in, ahşap parçasının yüzeyini iki kez boyamak için yeterli boyası var mıdır?

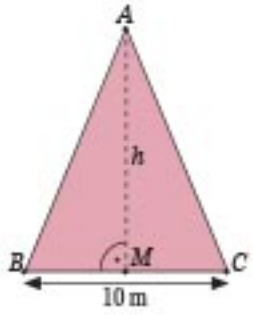
13. Alanı 840 cm^2 olan bir paralelkenarın bir kenarı 3,5 dm ise bu kenara ait yüksekliği kaçtır?

14. Çizim 5'teki okun alanını hesapla.



Çiz. 5

15. h = 14 m ise Çizim 6'daki üçgenin alanını bul.



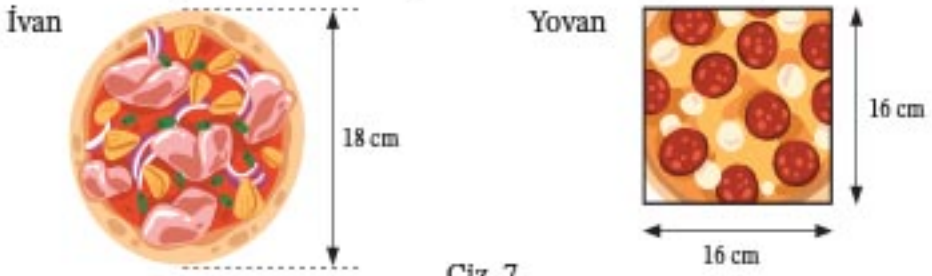
Çiz. 6

16. Üçgenin alanı 63 cm² ise a = 18 cm kenarına indirilen yüksekliği belirle.

17. Bir çalışma masası, paralel kenarları a = 160 cm ve b = 120 cm olan bir yamuk biçimindedir. Bu kenarlar arasındaki uzaklık 50 cm'dir. Metrekaresi 1200 denar olan camla masanın üzeri kaplanırsa maliyet ne kadar olur?

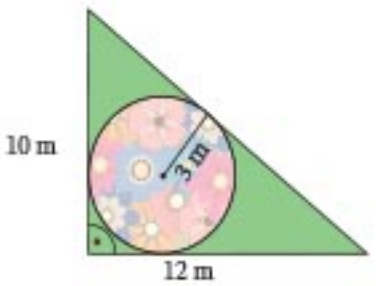
18. Köşegeni 12 cm olan bir kare, köşegenlerinden biri 16 cm olan bir deltoidle aynı alana sahiptir. Deltoidin diğer köşegeni ne kadardır?

19. Kimin pizzası daha büyüktür, İvan'ın mı yoksa Yovan'ın mı (Çizim 7)?



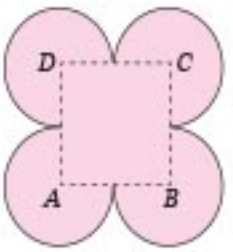
Çiz. 7

20. Parktaki çim alan üçgen biçimindedir ve içinde daire biçiminde bir çiçeklik bulunmaktadır (Çizim 8). Yalnızca çim olan kısmın alanını bul.



Çiz. 8

21. *ABCD* karesinin bir kenarı 7 cm ise Çizim 9'daki şeklin çevresini ve alanını hesapla.

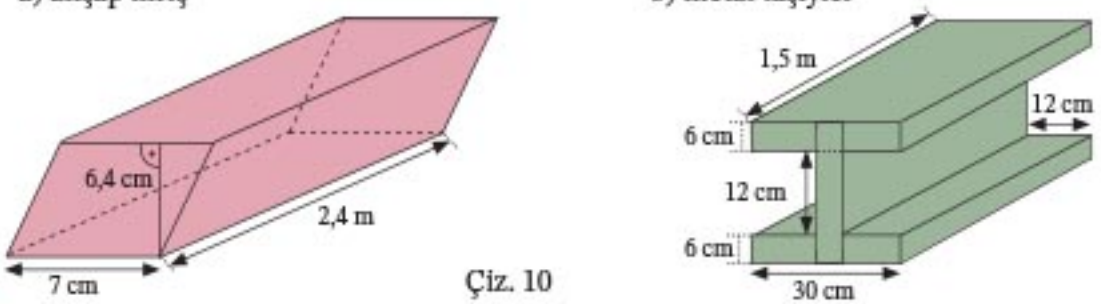


Çiz. 9

22. Çizim 10'da yapı malzemeleri gösterilmiştir. Bunların alanını ve hacmini bul.

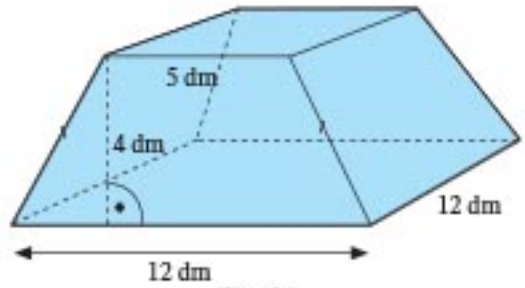
a) ahşap kiriş

b) metal taşıyıcı



Çiz. 10

23. Plastik bir su kabı, Çizim 11'deki şekle ve boyutlara sahiptir. Kabı yapmak için gerekli plastik alanını hesapla (üst yüzü açıktır). Kap tamamen doldurulursa kaç litre su alır?



Çiz. 11

24. Ahşap bir kulübenin çatısı, kare tabanlı bir piramit biçimindedir. Taban kenarının uzunluğu 22 dm, apotemi ise 14 dm'dir. Petar, ahşap kulübesinin çatısını boyamak istemekte ve ne kadar boya alması gerektiğini bilmek istemektedir. Bir kutu boya 400 dm^2 alanı boyuyorsa, Petar kaç kutu boya almalıdır?

25. Petar'ın kulübesini boyamak için kullandığı boya kutusu, tabanı alanı 50 cm^2 ve yüksekliği 18 cm olan ikizkenar üçgen biçiminde bir piramittir. Kutuda kaç mililitre boya vardır?

Konu 5:

VERİLERLE ÇALIŞMA

Öğrenme Sonuçları:

Bu konuyu öğrenirken şunları yapabileceksin:

- Farklı özelliklere göre örneklem seçimini ve veri analizini içeren ayrıntılı ve gerekçelendirilmiş bir araştırma planı hazırlamayı.
- Araştırma sonuçlarını sunmak ve yorumlamak; bunları grafikler ve tablolarla göstermek, ayrıca açıklık, mod, medyan ve aritmetik ortalamayı belirlemeyi.
- Şans oyunları, ekonomik problemler veya istatistiksel analizlerle ilgili çeşitli problem türlerini çözmek; birbirini dışlayan olaylar ve ardışık olayları da kapsayan problemleri çözmeyi.

1. HEDEF KİTLE (NÜFUS) VE ÖRNEKLEM

Etkinlik

Sınıfındaki öğrencilerin matematik dersindeki son sınavdan aldıkları sonuçlara ilişkin verileri topla ve bunları bir tablo ile göster. Verileri nasıl topladığını açıkla.

Bir araştırma için veri toplamadan önce, öncelikle **hedef kitleyi** incelememiz gerekir. Bu, hakkında bilgi edinmek istediğimiz nesnelerin, olayların veya insanların oluşturduğu gruptur.

Hedef kitle, ortak bir özelliğe sahip olan bir olaya ait bütün elemanların (bireylerin, özelliklerin, sonuçların) oluşturduğu kümedir.

Bir nüfustaki elemanların gözlem (ölçme, inceleme) konusu olan ortak özelliğine **değişken** denir.

Nüfusun bir elemanına (nesnesine, birimine) istatistik birimi denir.

Örnek 1

Aşağıdaki gözlem veya araştırmalarda hedef kitleyi, istatistik birimini ve değişkenlerini belirle:

a) Bir şehirde yaşayan kişilerin cinsiyeti, yaşı ve çalışma durumu,

b) Bir çiftlikteki ineklerin ağırlığı, yaşı ve ırkı,

c) Bir telekomünikasyon şirketinin hizmetlerini kullanan abonelerin abonelik türü ve fatura tutarı.

a) Bir şehirde yaşayan kişiler inceleniyorsa:
- hedef kitle, şehirde yaşayan bütün kişilerdir,
- istatistik birimi, bir kişidir,
- istatistik biriminin değişkenleri; cinsiyet, çalışma durumu, yaş, doğum yeri, göz rengi, boy vb. olabilir.

b) Bir çiftlikteki inekler inceleniyorsa:
- hedef kitle, o çiftlikteki bütün ineklerdir,
- istatistik birimi, o çiftlikteki bir inektir,
- istatistik biriminin değişkenleri; bir ineğin günde verdiği süt miktarı (litre), yaşı, ırkı, ağırlığı vb. olabilir.

c) Bir telekomünikasyon şirketinin aboneleri inceleniyorsa:
- nüfus, o şirketin bütün aboneleridir,
- istatistik birimi, bir abonedir,

- istatistik biriminin değişkenleri; abonelik türü (ön ödemeli, faturalı), belirli bir zaman diliminde yapılan telefon görüşmelerinin sayısı, telefon görüşmelerinin süresi, kesilen faturaların tutarı, abonelerin yaş grupları, cinsiyet dağılımı vb. olabilir.

Verilen örneklerden, değişkenlerin farklı değerler alabilen büyüklükler olduğunu ve incelenen değişkenin bir istatistik birimindeki değerinin önceden belirlenemeyeceğini görebilirsin.

Veri toplarken tam sayım yapabilir veya örneklem kullanabiliriz. Tam sayım, nüfustaki her istatistik birimine ait verilerin toplanması anlamına gelir. Örneğin, bir mağazadaki ürünlerin sayımı veya bir ülkenin nüfus sayımı yapılabilir.



Çizim 1

Örnek 2

Enes, okulundaki öğrencilerin ortalama boyunu öğrenmek istiyor.
a) Hedef kitle nedir, değişken nedir?
b) Zamandan ve maliyetten tasarruf etmek için Enes'in nasıl bir yöntem izlemesinin daha uygun olacağını açıkla.

a) Hedef kitle, okuldaki bütün öğrencilerdir.
Enes'in öğrencilerin ortalama boyunu öğrenebilmesi için tam sayım yapması, okulundaki her öğrencinin boyunu ölçmesini gerektirir.
Boy, öğrenci nüfusunun değişkenidir.
b) Okuldaki toplam öğrenci sayısına bağlı olarak, her öğrencinin boyunu ölçmek zaman alacak ve oldukça kullanışsız olacaktır. Araştırmanın zaman ve maliyet açısından daha ekonomik olması için nüfustan bir örneklem alınması daha uygundur.
Toplam öğrenci sayısına bağlı olarak Enes, okulundan rastgele yeterli sayıda öğrenci seçebilir ve onların boylarını ölçebilir.

Örneklem, hedef kitlenin bir alt kümesidir.

Alıştırma 1

Aşağıdaki araştırmalarda hedef kitlenin mi yoksa örneklemin mi kullanılacağını belirle:
a) Bir alışveriş merkezindeki insanların yaşları,
b) Madeni para basım fabrikasında üretilen madeni paraların kütleleri,
c) Bir restoranın menüsündeki ürünlerin fiyatları.

Hedef kitleden örneklem seçildiğinde, veri toplama işlemi tüm kitleyle çalışmaya göre daha hızlı ve daha kolaydır; ancak o kadar ayrıntılı veya kesin değildir.
Örneklemler, nüfusun tamamı hakkında bilgi vermediğinden, örneklemden elde edilen istatistiksel veriler yalnızca kitleye ait istatistiklerin **tahmin** edilmesinde kullanılabilir.

Tahminin gerçek durumu doğru yansıtabilmesi için örneklemin **temsil** edici olması gerekir. Örneklemin temsil edici olabilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

- İstatistik birimlerinin seçimi rastgele ve bağımsız olmalı, her birimin seçilme olasılığı eşit olmalıdır.
- Örneklem, temsil ettiği kitleye göre yeterince büyük olmalıdır.
- Örneklem, hedef kitlenin tamamını doğru şekilde temsil etmelidir.

Örnek 3

Örnek 2'de Enes'in yapacağı araştırmayla ilgili aşağıdaki soruları cevapla:

a) Enes, araştırmasının sonuçlarının güvenilir olabilmesi için örneklemi seçerken nasıl hareket etmelidir?

b) Enes, tüm nüfus yerine örneklem seçerse bunun avantajları ve dezavantajları nelerdir?

a) Enes'in seçeceği örneklem, derste verilen bütün koşulları sağlamalıdır. Örneğin, okulunda 900 öğrenci varsa, 45 öğrenciden oluşan bir örneklem yeterli olabilir. Örneklemde yer alacak her öğrencinin seçimi rastgele ve bağımsız olmalı, her öğrencinin seçilme olasılığı eşit olmalıdır. Ayrıca örneklem, yapısı bakımından öğrenci nüfusunun tamamını temsil etmelidir.

- Enes yalnızca 9. sınıf öğrencilerinden oluşan bir örneklem seçerse, örneklem temsil edici olmayacaktır. Çünkü bu örneklem, okuldaki bütün öğrencileri temsil etmez. Bu durumda örneklemin ortalama boyu, okuldaki **tüm** öğrencilerin ortalama boyundan çok daha yüksek olacaktır.
- Diğer taraftan, Enes yalnızca 5 öğrenci seçerse, örneklemin ortalama boyu **bütün** öğrencilerin ortalama boyu için uygun bir tahmin olmayacaktır; çünkü örneklem çok küçüktür.

b) Örneklem kullanmanın avantajları vardır. Verilerin toplanması zaman ve diğer kaynaklar açısından daha hızlı, daha kolay ve daha ekonomiktir. Ancak diğer taraftan, yalnızca hedef kitle hakkında bir tahmin sağlar ve tüm hedef kitle kullanıldığında elde edilecek sonuçlar kadar ayrıntılı değildir.

Alıştırma 2

Tabloda, verilen nüfusa ait belirli bir değişkenin araştırılması için seçilmiş örneklem örnekleri verilmiştir. Önerilen örneklemin temsil edici olup olmadığını açıkla. Gerekli olan durumlarda, daha iyi sonuç vereceğini düşündüğün bir örneklem öner.

Hedef kitle	Değişken	Örneklem
Ülkemizdeki öğrenciler	Spor yapma durumu	Rastgele seçilmiş bir ilkokul ve bir ortaokul
Bir fabrikada üretilen tost makineleri	Çalışır durumda olma	Seri numarasına göre rastgele seçilen her yüz üründen biri
Atmosferdeki bütün atomlar	Hidrojen oranı	Üsküp'te yapılan ölçümler
Bir mağazadaki ürünler	Ürün sayısı	Tüm nüfus

Alıştırma 3

Bir okulda 820 öğrenci vardır. Öğrencilerden 40'ı, okul üniformasıyla ilgili bir anketi doldurmak için rastgele seçilmiştir.

a) Aşağıdakilerin büyüklüğünü bul:
1. Hedef kitle,
2. Örneklem.

b) Aşağıdaki yöntemlerin her biriyle toplanan verilerin, hedef kitleyi gerçekçi biçimde temsil eden bir örneklem vermeyebileceğini açıkla:
1. Anketi yapan öğrenci, anketi doldurmaları için en yakın on arkadaşına sorar.
2. Bir sınıftaki bütün öğrenciler ankete katılır.
3. Gönüllüler anketi doldurmak için başvurur.

Alıştırma 4

Elektronik cihazlar üreten bir şirket, insanların bu tür cihazları mağazadan mı yoksa internet üzerinden mi daha çok satın aldığını araştırmak istiyor. Pazartesi sabahı bir elektronik cihaz mağazasının önünde bekleyen insanlara sorular soruyorlar. Toplanacak verilerin gerçek duruma büyük olasılıkla neden uygun olmayacağını açıkla.

Alıştırma 5

Bir elektrikli ev aletleri fabrikası günde 15 000 cihaz üretmektedir. Fabrika müdürü olarak, üretilen cihazların kaçının arızalı olduğunu araştırma görevin vardır.

a) Hedef kitleyi, değişkeni belirle ve bir örneklem seçimi öner.

b) Tüm hedef kitle yerine örneklemle çalışmanın avantajları ve dezavantajları nelerdir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Okul kantini yeni bir sağlıklı atıştırmalık sunmak istiyor. Müdür, okuldaki öğrencilerin en çok hangi atıştırmalıkları sevdiğini öğrenmek için küçük bir araştırma yapmaya karar verir. Bu amaçla, araştırma yapacak öğrenci grubuna yardım etmen gerekir.

   a) Bu araştırmada hedef kitle nedir, değişken nedir?

   b) Bu durumda uygulanan bir yöntem olarak tam sayımın avantajlarını ve dezavantajlarını açıkla.

   c) Nüfusu temsil edecek öğrencilerden oluşan bir örneklem seçmek için en az iki farklı yol öner.

   d) Önerilen örneklemlerden, tüm nüfusu en iyi temsil edeni seç ve neden bu örneklemin temsil edici olduğunu düşündüğünü açıkla.

2. "Aziz Kiril ve Metodiy" okulunda 700 öğrenci vardır. Müdür, okulda kaç öğrencinin düzenli olarak bir spor yaptığını öğrenmek istiyor.

   a) Bu araştırmada hedef kitle nedir?

   b) İncelenen değişken nedir?

   c) Aşağıdaki açıklamalardan hangisi bu nüfustan bir örneklemdir, hangisi değildir? Cevabını açıkla.

      1) VI. sınıftaki tüm öğrenciler (85 öğrenci).
      2) Okuldaki her sınıftan on öğrenci (I. sınıftan IX. sınıfa kadar toplam 90 öğrenci).
      3) Okuldaki tüm öğretmenler.
      4) Salı sabahı okul kütüphanesine giren ilk 50 öğrenci.

   d) Müdür, 700 öğrencinin tamamıyla mı anket yapacağını yoksa 120 öğrenciden oluşan bir örneklem mi alacağını düşünmektedir.

      1) 700 öğrencinin tamamıyla anket yapmanın iki avantajını belirt.
      2) 700 öğrencinin tamamıyla anket yapmanın iki dezavantajını belirt.

3. Bir ampul fabrikası günde 50 000 ampul üretmektedir. Kalite kontrol görevlisi, ampullerin dayanıklılığını kontrol etmek istiyor. Dayanıklılık, ampul sürekli yanar durumda bırakılarak ve yanıp sönene kadar geçen süre kaydedilerek incelenir. Bunu yapmak için günlük üretimden 200 ampul test eder.

   a) Bu araştırmada hedef kitle nedir, örneklem nedir ve incelenen değişken nedir?

   b) Aşağıdaki açıklamalardan hangisinin bu hedef kitledeb bir örneklem olduğunu, hangisinin olmadığını açıkla.

      1) Günlük üretimden test edilen 200 ampul.
      2) Fabrikanın çalışmasının ilk saatinde üretilen bütün ampuller.
      3) Bir günde üretilen bütün ampuller.
      4) İncelenen ampullerin şekli.
      5) İşçilerin molasından sonra üretim hattından çıkan ilk 100 ampul.

   c) Kalite kontrol görevlisi, 50 000 ampulün tamamını mı (tüm nüfus) test edeceğini yoksa 500 ampulden oluşan bir örneklem mi alacağını düşünmektedir.

      1) 50 000 ampulün tamamını test etmenin iki avantajını belirt.
      2) 50 000 ampulün tamamını test etmenin iki dezavantajını belirt.

4. Araştırmada tam sayım mı yoksa örneklem mi kullanılması gerektiğini belirle:
   a) millî parkı ziyaret eden insanların yaşı,
   b) fabrikada üretilen pillerin çalışır durumda olup olmadığı,
   c) bir güzellik salonundaki hizmetlerin fiyatları.

5. Otobüs terminalinin yöneticisi, insanların hizmetlerinden memnun olup olmadığını araştırmak istiyor. Çarşamba sabahı otobüs terminaline gelen ilk 10 kişiye sormaya karar vermiştir.
   a) İyi bir örneklem seçmiş midir? Cevabını açıkla.
   b) Veri toplama yöntemini nasıl iyileştirebilir?

6. Bir gazete, okuyucularını şehirdeki trafik güvenliğiyle ilgili telefonla yapılan bir ankete katılmaya davet etmiştir. 40 kişiyle anket yapılmıştır.
   a) Örneklemin bu Çizimde seçilmesi uygun mudur? Cevabını açıkla.
   b) Bu anketin sonucunun neden güvenilir olmadığını gösteren birkaç neden belirt ve temsil edici bir örneklem elde etmek için değişiklikler öner.

7. Ekoloji kulübündeki öğrenciler, okullarının çevresindeki hava kalitesinin nasıl olduğunu öğrenmek istiyorlar. Havada bulunan parçacıkların yoğunluğunu ölçen küçük bir cihazları vardır (PM parçacıkları). Cihazı bahçenin ve çevredeki sokakların farklı yerlerine yerleştirebilirler.
   a) Bu araştırmanın hedef kitle, örneklemi ve değişkeni nedir?
   b) Aynı hedef kitleden alınabilecek en az iki farklı örneklemi açıkla.
   c) Okulun çevresindeki mümkün olan her konumda hava kalitesini ölçmenin (tam sayım) avantajlarını ve dezavantajlarını açıkla.
   d) Tüm nüfus için en temsil edici olduğunu düşündüğün örneklemi seç ve nedenini açıkla.

Araştırma

Hemen hemen hepimiz günlük olarak hava durumunu kontrol ederiz. Meteorologların hava tahminini nasıl hazırladığını araştır.
Aşağıdaki ifadelerin güvenilir olup olmadığını değerlendir ve cevabını gerekçelendir:

a) Şehirde bugün ortalama sıcaklık 25 °C'dir (2 termometreyle ölçülmüştür).
b) Temmuz, yılın en sıcak ayıdır (10 yıllık ölçümlere dayanmaktadır).
c) Bugün şehrin bütün bölgelerinde yağmur yağacaktır (uydu görüntülerine dayalı tahmin).
d) Aşağıdaki soruların cevaplarını açıkla:
   - Meteorologlar termometreleri neden farklı yüksekliklere ve konumlara yerleştirir?
   - Örneklem büyüklüğü hava tahmininin doğruluğunu nasıl etkiler?
   - Bütün şehir için yalnızca bir termometreden alınan ölçümleri kullanırsak ne olur?

2. AYRIK VERİLER. SIKLIK TABLOSU (KESİKLİ VERİLER. FREKANS TABLOSU)

Etkinlik

a) Verilen örneklerin her birinde hedef kitle nedir, değişken nedir?

b) Her örnekte değişkenler nasıl ifade edilmektedir (sayı, açıklama, kategori)?

1) Bir sınıftaki öğrencilerin boyları periyodik sağlık kontrolünde ölçülmüştür.
2) Bir botanik bahçesinde birkaç çiçek türünün çiçek renkleri kaydedilmiştir.
3) Buzdolabı üreten bir fabrikada üretilen ürünlerin çalışır durumda olup olmadığı kontrol edilmektedir.

İfade ediliş biçimlerine göre değişkenler çok farklı olabilir.
Değişken **açıklayıcı(sözel)** olarak ifade edilmişse, buna **nitel değişken** denir.
Değişken **sayıyla** ifade edilmişse, buna **nicel değişken** denir.

Örnek 1

Dersin başındaki etkinlikte verilen değişkenler nitel mi yoksa nicel midir?

1) Bu durumda değişken sayıyla ifade edilmektedir.
Çünkü öğrencilerin boyu, belirli bir değer aralığında herhangi bir sayı olabilir.
Dolayısıyla bu değişken niceldir.
2) Çiçeklerin rengi açıklayıcı olarak ifade edildiği için nitel bir değişkendir.
3) Değişken nitel olup iki kategoriyle açıklanabilir: çalışır durumda veya arızalı ürün.

Örnek 2

Aşağıdaki değişkenler ifade edilirken ne tür sayısal değerler kullanılabilir?

a) koşu parkurunun uzunluğu,
b) saat cinsinden yolculuk süresi,
c) ailedeki birey sayısı,
d) ağaçların boyu,
e) okuldaki devamsızlık sayısı.

a), b) ve d) seçeneklerindeki değişkenler belirli bir değer aralığındaki herhangi bir değeri alabilir. Örneğin, koşu parkurunun uzunluğu 234 m olabilir.
Bu veriler **ölçme** yoluyla elde edilir.

c) ve e) seçeneklerindeki değişkenler ise 1, 2, 3, ... gibi doğal sayı değerleri alabilir. Bu veriler temel olarak **sayma** yoluyla elde edilir.

Ayrık veriler, yalnızca belirli ve sayılabilir değerler alabilen verilerdir.

Ayrık verilere diğer örnekler; öğrenci sayısı, otomobil sayısı, numarayla ifade edilen kıyafet bedeni ve benzeri verilerdir. Bunlar, kesin, belirli ve açıkça tanımlanmış bir değere sahip olan verilerdir. Buna karşılık insanın boyu, hava sıcaklığı, cisimlerin kütlesi ve benzeri büyüklükler, belirli bir değer aralığındaki herhangi bir ondalık sayı olabilir.

Alıştırma 1

Aşağıdaki verilerden hangileri ayrık verilerdir?
a) Bir yarıştaki koşucuların dakika cinsinden koşma süreleri,
b) Bir mahallede yaşayan kişilerin bir hafta boyunca yaptıkları yürüyüş sayısı,
c) Bir markette satın alınan ürün sayısı,
d) 13 yaşındaki çocukların ayak uzunluğu,
e) Okul kütüphanesindeki kitapların kalınlığı,
f)Tam pansiyon sayısı olarak ifade edilen otelde kalış süresi.

Düzenlenmemiş veriler, özellikle sayıları fazla olduğunda, incelenen nüfus hakkında fazla bilgi vermez. Bu nedenle düzenlenmeleri gerekir. İlk olarak veriler aşağıdaki Çizimde sıralanmalıdır:

- Değerleri açıklayıcı olarak (kelimelerle) verilen veriler kategorilere ayrılır.
- Değerleri sayısal olarak verilen veriler, en küçükten en büyüğe doğru sıralanır.
- Değerleri sayısal olarak verilen ve az sayıda tekrarlanan değerlere sahip veriler, tabloda aralıklar hâlinde gruplandırılır.

Her üç durumda da verileri daha kolay düzenleyebilmek için, her değerin (sonucun) yanına aynı verinin her tekrarı bir işaret (çetele çizgisi) ile gösterilir.

Örnek 3

10 öğrenciden oluşan bir grubun tepki hızına ilişkin yapılan bir araştırmada aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Öğrenci	Pero	Tome	Ana	Risto	Kire	Sime	Ema	İlir	Ayşe	İle
Tepki hızı	Hızlı	Yavaş	Hızlı	Hızlı	Hızlı	Yavaş	Hızlı	Hızlı	Yavaş	Hızlı

Verileri bir tabloda düzenle.

Veriler (sonuçlar) herhangi bir sistematik düzen olmadan verilmiştir.
Sayma yoluyla her değerin (hızlı, yavaş) kaç kez tekrar ettiği belirlenir.
Aşağıdaki tablo oluşturulur:

Tepki hızı	İşaret	Öğrenci sayısı
Hızlı tepki	𝍸 II	7
Yavaş tepki	III	3

Alıştırma 2

Bir araştırmada, ilkokul sınıflarından birindeki 16 çocuğun çalışırken kullandığı baskın el ile ilgili aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Çocuk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Baskın el	sağ	sağ	sağ	sol	sol	sağ	sol	sağ	sol	sağ	sağ	sağ	sol	her ikisi	her ikisi	her ikisi

a) Elde edilen verileri bir tabloda düzenle.
b) Araştırma sonucuna göre en çok tercih edilen (kullanılan) baskın el hangisidir?
c) Tablodaki verilerden yararlanarak başka hangi sonuçlara ulaşabilirsiniz? Açıkla.

Örnek 4

Agnesa'nın sınıfında arkadaşları, kimin dalış yapabildiği ve su altında nefeslerini ne kadar süre tutabildikleri hakkında konuşuyorlardı. Agnesa, arkadaşlarının nefeslerini ne kadar süre tutabildiklerine ilişkin verileri kaydetmeye karar verdi:
11, 17, 21, 35, 24, 14, 18, 22, 33, 42, 23, 19, 14, 24, 17, 12, 13, 18, 19, 22, 21, 24, 14, 17

Aşağıdaki soruları cevapla:
a) Kaç öğrenci nefesini 30 saniyeden daha uzun süre tutabilmiştir?
b) Kaç öğrenci nefesini 20 saniyeden uzun, en fazla 40 saniye tutabilmiştir?
c) Bir öğrencinin nefesini tutabildiği en uzun süre nedir?

Elde edilen verilerde az sayıda tekrar eden değer bulunduğundan, veriler düzenlenmeden hazırlanacak tablo çok sayıda satır veya sütun içerecektir ve bu nedenle çok kullanışlı olmayacaktır. Bu nedenle burada verilerin **gruplandırılması**, yani gruplanmış verilerden oluşan bir **sıklık (frekans) tablosu** hazırlanması daha uygundur.

Saniye sayısı	Sıklık (frekans)
11-20	13
21-30	8
31-40	2
41-50	1

Bu yapılırken, grupların ortak değer içermemesi önemlidir. Yani iki komşu grup 10–20 ve 20–30 saniye şeklinde olamaz (20 saniye değeri yalnızca bir gruba ait olmalıdır).
Dolayısıyla gruplar birbirinden ayrık olmalı ve eşit genişlikte olmalıdır.

Elde edilen gruplanmış sıklık tablosundan, nefesini 30 saniyeden daha uzun süre tutabilen öğrenci sayısını görebiliriz.
Bunlar son iki gruptaki öğrencilerdir. Dolayısıyla $2 + 1 = 3$ öğrenci.
20 saniyeden uzun, en fazla 40 saniye nefesini tutabilen 10 öğrenci, 40 saniyeden daha uzun nefesini tutabilen ise yalnızca 1 öğrenci vardır.

Gruplanmış veriler için frekans tablosu hazırlanırken aşağıdaki noktalara dikkat edilmelidir:
- Aralıklar (gruplar) eşit genişlikte olmalıdır.
- Aralıklar birbiriyle örtüşmemelidir.
- Aralıklar arasında boşluk bulunmamalıdır.

Alıştırma 3

Merita, serasındaki bitkilerin bakla sayılarını araştırmaktadır. Kayıt yapmak için aşağıdaki tabloyu hazırlamıştır:

Bakla sayısı	Çetele	Frekans
15-20		
20-30		
35-40		
40-50		

Tablodaki iki hatayı bul, defterine yeniden çiz ve düzelt.

Alıştırma 4

İki sekizinci sınıftaki 50 öğrencinin matematik testinden aldığı puanlar aşağıdaki gibidir:

35, 37, 38, 43, 45, 47, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 57, 57, 57, 59, 59, 60, 60, 52, 62, 63, 64, 64, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 72, 74, 76, 77, 75, 78, 81, 81, 84, 84.

Verileri gruplanmış verilerden oluşan bir sıklık tablosu ile göster.

Alıştırma 5

Bir okuldaki belirli sayıda öğrenciye evleri ile okul arasındaki uzaklık sorulmuş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Uzaklık (km)	İşaret	Öğrenci sayısı
$0 < s \leq 1$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$1 < s \leq 2$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	
$2 < s \leq 3$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$3 < s \leq 4$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$4 < s \leq 5$	𝍸 𝍸 II	

Tabloyu tamamla, ardından aşağıdaki soruları cevapla:

a) Tablodan, herhangi bir öğrencinin evinden okula katettiği en kısa uzaklığı belirleyebilir miyiz? Cevabını açıkla.

b) Hangi uzaklık aralığında en fazla öğrenci vardır?

c) Evinden okula uzaklığı 3 km veya daha az olan kaç öğrenci vardır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Bir halk oyunları grubu üyeleriyle ilgili kayıt tutmaktadır. Bunun için aşağıdaki verileri toplamaktadır:

a) gruptaki üyelik süresi,
b) haftada katıldıkları prova sayısı,
c) öğrendikleri koreografi sayısı,
d) halk oyunları grubundaki her üyenin boyu,
e) halk oyunları grubundaki her üyenin kütlesi,
f)her üyenin yaşı.

Yukarıdaki verilerden hangilerinin ayrık verilere örnek olduğunu belirle ve cevabını gerekçelendir.

2. Bir otelde kalan 40 misafirin konaklama gün sayıları aşağıda verilmiştir:
1, 4, 14, 13, 15, 2, 7, 7, 12, 10, 17, 16, 10, 8, 9, 1, 3, 5, 6, 12, 16, 16, 4, 9, 7, 5, 12, 11, 9, 8, 2, 1, 12, 15, 3, 4, 8, 12, 4, 15.

a) Hedef kitlesi nedir, değişken nedir?
b) Toplanan veriler ayrık veri midir, değil midir?
c) Frekans tablosundaki hataları bul, defterine yeniden çiz, düzelt ve tamamla.

Konaklama gün sayısı	Sıklık (Frekans)
1-3	
4-7	
9-12	
12-14	
15-17	

3. Eski kitapların ciltlenmesi ve yenilenmesi amacıyla okul kütüphanesindeki bazı kitapların kalınlıkları santimetre cinsinden ölçülmüştür. Elde edilen değerler şunlardır:

2,4 3,2 0,3 0,8 1,1 1,4 2,3 2,9 0,4 1
1,2 2,6 2,5 2,1 0,9 1,4 1,1 2 2,2 3

a) Elde edilen veriler ayrık veri midir? Açıkla.
b) Elde edilen verileri bir frekans tablosu ile göster. Tabloda kaydettiğin değişken nedir?

4. Slave, bazı arkadaşlarının evlerinden şehir havuzuna ulaşmaları için gereken süreleri (t, dakika cinsinden) ölçmektedir. Andrey ise arkadaşlarının her gün kaç havuz uzunluğu (n) yüzdüklerini saymaktadır.

Slave'nin topladığı veriler:
24, 18, 25, 6, 31, 20, 17, 29, 37, 7, 23, 46, 30, 33, 19, 41, 15, 45, 21, 32

Andrey'in topladığı veriler:

a) Hangisi ayrık veri toplamıştır? Cevabını açıkla.

b) Slave'nin kaydettiği süreleri, aşağıdaki tabloyu defterine çizerek bir frekans tablosu hâlinde yaz.

Süre, t (dakika)	İşaret	Frekans
$0 < t \leq 10$		
$11 < t \leq 20$		
$20 < t \leq 30$		
$30 < t \leq 40$		
$40 < t \leq 50$		

c) Andrey'in topladığı verileri, aşağıdaki tabloyu defterine çizerek yaz.

Yüzülen havuz uzunluğu, n	İşaret	Frekans
0-2		
3-5		
6-8		

d) b) ve c) maddelerindeki tabloları karşılaştır ve aralarındaki birkaç farkı belirt.

5. Bir sınıftaki öğrencilerin boyları (cm cinsinden) aşağıdaki gibidir:
149, 148, 152, 146, 152, 152, 146, 148, 149, 151, 152, 146, 146, 149, 153, 146, 153, 148, 151, 152, 151, 152, 152, 152, 152, 148, 152, 148, 152, 146, 149.

a) Verileri bir frekans tablosu ile göster.

b) Sınıftaki en büyük boy kaç santimetredir? Bu boya sahip birden fazla öğrenci var mı?

c) Sınıfta hangileri daha fazladır: En kısa boya sahip öğrenciler mi, en uzun boya sahip öğrenciler mi?

d) Boyu 144 cm'den kısa olan öğrenci var mı?

e) Boyu 145 cm'den büyük ve 156 cm'den küçük olan kaç öğrenci vardır?

6. Geçen ayın her günü için, okulda kaç sınıf arkadaşının devamsız olduğunu belirle.

a) Gruplanmış verilerden oluşan bir frekans tablosu hazırla.

b) Ay boyunca 3 günden fazla devamsızlık yapan kaç öğrenci vardır?

c) Hiç devamsızlık yapmayan öğrenci var mı?

d) Tam 7 gün devamsızlık yapan kaç öğrenci vardır?

Araştırma

Sınıfındaki öğrencilerde vücut kütlesi ile beslenme alışkanlıkları arasında bir ilişki olup olmadığını araştır.

Aşağıdaki verileri topla:

a) boy ve vücut kütlesi (vücut kütle indeksini hesaplamak için),

b) gün içinde tüketilen öğün sayısı,

c) öğünlerin ağırlıklı olarak sağlıklı mı yoksa sağlıksız mı olduğu,
d) gruplanmış verilerden oluşan frekans tabloları hazırla,
e) beslenmenin vücut kütle indeksini etkileyip etkilemediğini belirlemek için sonuçları yorumlamaya çalış.

3. ARAŞTIRMANIN PLANLANMASI VE VERİ TOPLAMA

Etkinlik

Birkaç ay sonra, daha önce hiç gitmediğin bir yere seyahat etmek için biletin var.
a) Yolculuk için kıyafet, ayakkabı, yiyecek ve diğer ihtiyaçlar açısından nasıl hazırlanırsın?
b) Yola çıkmadan önce hangi verileri toplarsın?
c) Yolculuğunu nasıl planlarsın?

Bir durum ya da olgu hakkında bilgi edinmek için, o durum veya olguyu yansıtan verileri toplamak ve analiz etmek gerekir. Verilerin başarılı bir Çizimde analiz edilebilmesi için önce hangi verilere ihtiyaç duyduğumuzu ve bunları hangi yöntemle toplayacağımızı planlamalıyız. Bu planlama, görevin amaç ve koşullarına uygun olmalıdır.

Verilerin toplanması, düzenlenmesi, sunulması ve analiz edilmesini içeren araştırmalara **istatistiksel araştırmalar** denir.

Bir istatistiksel araştırmanın belirli bir problemi çözmede başarılı olabilmesi için genellikle aşağıdaki adımlardan oluşan iyi bir plan hazırlanmalıdır:

1. Araştırılacak problemin ve araştırmanın cevaplaması gereken soruların belirlenmesi.
2. Verilerin toplanması ve düzenlenmesi.
3. Verilerin sunulması.
4. Verilerin analiz edilmesi ve uygun sonuçlara ulaşılması.

1) Araştırılacak Problemin ve Araştırmanın Cevaplaması Gereken Soruların Belirlenmesi

Örnek 1

Yovana, Dünya Hentbol Şampiyonası'nda hangi milli takımın en fazla gol attığını araştırmak istiyor. Yovana araştırmasına nasıl başlamalıdır?

İhtiyaç duyduğu verilere ulaşmak için Yovana bütün maçları izleyip sonuçları kaydedebilir ve daha sonra bunları inceleyebilir. Ancak bu her zaman mümkün değildir.
Bazı maçlar aynı anda oynanmaktadır. Ayrıca her maç için bilet bulması da gerekir. Aynı nedenle bütün maçları televizyondan izlemesi de mümkün değildir.
Bu nedenle verileri toplamanın en uygun yolu, şampiyonanın resmî internet sitesindeki tüm maç sonuçlarını takip etmektir.

2) Verilerin Toplanması ve Düzenlenmesi

Veriler farklı kaynaklardan toplanabilir.

- **Birincil veriler**, verileri toplama yöntemlerinden birini kullanarak doğrudan kendimizin elde ettiği verilerdir. (birincil kaynaklardan elde edilen veri)
- Ancak veri kümelerimiz, daha önce başka araştırmacılar tarafından toplanmış verileri de içerebilir. Bu tür verilere **ikincil veriler** denir. (ikincil kaynaklardan elde edilen veri)

Örnek 2

Mustafa, yaşadığı küçük mahallede bir iş yeri açmak istemektedir. Hangi işin daha gerekli ve daha kârlı olacağına karar verebilmek için mahallede yaşayan insanların yaşları ve ilgi alanları hakkında verilere ihtiyaç duymaktadır.
Mustafa, birincil verileri mi yoksa ikincil verileri mi toplayacağına karar vermelidir.
Mustafa'nın yapabileceği veri toplama durumlarının her birinde avantajlar ve dezavantajlar nelerdir?

Her iki yöntemin de avantajları ve dezavantajları vardır.

1) Birincil verilerin toplanması (mahalle sakinlerine doğrudan soru sorarak)

Avantajları:

- Veriler güncel ve yenidir.
- Mustafa, kendi mahallesine ait doğru bilgiler elde eder.
- Anlaşılmayan durumlarda ek sorular sorabilir.
- Elde edilen veriler doğrudan iş planının amacına uygundur.

Dezavantajları:

- Yeterli sayıda kişiyle anket yapmak zaman alır.
- Daha fazla emek ve organizasyon gerektirir (anket hazırlama, verileri işleme vb.).
- Bazı kişiler soruları cevaplamak istemeyebilir.
- Verilerin toplanması ve kaydedilmesi sırasında hatalar oluşabilir.

2) İkincil verilerin kullanılması (internet, istatistik kurumu, önceki araştırmalar, yayınlar)

Avantajları:

- Verilere hızlı bir Çizimde ulaşılır.
- Anket yapmaya veya insanlarla doğrudan iletişim kurmaya gerek yoktur.
- Veri toplama maliyeti daha düşüktür ve daha az emek gerektirir.
- Profesyonel araştırmalardan elde edilen veriler kullanılabilir.

Dezavantajları:

- Veriler yalnızca Mustafa'nın mahallesine değil, daha geniş bir bölgeye ait olabilir.
- Veriler eski veya güncelliğini yitirmiş olabilir.
- Veriler, Mustafa'nın iş fikrine tam olarak uygun olmayabilir.
- İhtiyaç duyduğu bazı bilgiler (örneğin insanların ilgi alanları ve alışkanlıkları) verilerde bulunmayabilir.

Mustafa daha doğru ve güvenilir bir iş planı hazırlamak istiyorsa, en uygun yöntem birincil ve ikincil verileri birlikte kullanmaktır. Önce mevcut istatistikleri incelemeli, ardından yaşadığı mahallede kısa bir anket yapmalıdır.

Alıştırma 1

Aşağıdaki araştırmalarda hangi tür veriler kullanılmalıdır (birincil veriler mi, ikincil veriler mi)?

a) Sınıfındaki tarih dersi notları,
b) Yaşadığın yerde geri dönüşüm alışkanlıkları,
c) Ülkedeki geri dönüşüm alışkanlıkları,
d) Hava durumu.

Cevabını gerekçelendir.

Araştırılan bir problem için veriler farklı yöntemlerle toplanabilir: gözlem, ölçme, anket, karşılaştırma, sayma vb. Veri toplama ve işleme sürecini kolaylaştırmak için mümkün olduğunca uygun veri toplama **araçları** hazırlanmalıdır. Bu araçlar kullanımı kolay ve pratik olmalı, aynı zamanda ihtiyaç duyulan tüm bilgileri sağlamalıdır. En sık kullanılan veri toplama araçları şunlardır: **gözlem, anket, görüşme, kontrol listesi, derecelendirme ölçekli kontrol listesi, olgular, tutumlar, görüşler** veya ilgi alanlarına yönelik **soru formları**. Veriler toplandıktan sonra uygun kategorilere ayrılarak düzenlenir.

Örnek 3

Bir ortaokulun 8. sınıf öğrencileri, öğrencilerin evlerinin okula olan uzaklığını ve okula hangi ulaşım aracıyla geldiklerini araştıracaktır. Bu nedenle, her öğrencinin cevaplayacağı birkaç sorudan oluşan bir anket formu hazırlamışlardır.
Sorular; seçenek işaretleme, boşluk doldurma, yuvarlak içine alma veya benzeri yöntemlerle cevaplanabilir.

ANKET FORMU

Öğrencinin Adı ve Soyadı:

_____

Sınıfı: 1. VII A 2. VII B 3. VII C

Doğru cevabı, uygun seçeneğin önündeki harf veya numarayı daire içine alarak işaretleyiniz.

1. Evim ile okulum arasındaki yaklaşık mesafe:

1. 100 m 2. 200 m 3. 300 m 4. 400 m 5. 500 m
6. 600 m 7. 700 m 8. 800 m 9. 900 m 10. 1km
11. 1 km ile 2 km arası 12. 2 km'den fazla

2. Okula geliş şeklim:

1. Yürüyerek 2. Bisikletle
3. Otomobille 4. Otobüsle

Çoğu zaman seçim, ☑ veya ☒ işaretleri kullanılarak yapılabilir.

Anketlerin, araştırılan konu hakkında gerçeğe en yakın sonuçları verebilmesi için bazı koşulları sağlaması gerekir. Sorular yönlendirici, kırıcı, gereğinden uzun veya anlaşılması güç olmamalıdır. Ayrıca, kullanılmadan önce mümkünse denenmeli (pilot uygulama yapılmalı) ve gerekli düzenlemeler yapılmalıdır.

Alıştırma 2

Vlatko, okulundaki kaç öğrencinin bir veya daha fazla müzik aleti çaldığını ve hangi müzik aletlerini çaldıklarını araştırmak istemektedir.

a) Vlatko veri toplamak için hangi araçları kullanabilir?
b) Toplanan veriler birincil veriler mi yoksa ikincil veriler mi olur?

Örnek 4

İliya, sınıfındaki öğrencilerin televizyon izlemeye ne kadar zaman ayırdıklarını öğrenmek istemektedir. Veri toplamak için aşağıdaki iki soruyu düşünmektedir:

1) Ne kadar televizyon izliyorsun?
2) Televizyon izlemek için kaç saat harcıyorsun?

Her iki soru için birer eksiklik belirleyiniz ve İliya'nın kullanabileceği daha uygun bir soru yazınız.

1) soruda, hangi tür cevabın beklendiği açık değildir. Bu nedenle verilen cevaplar "çok" veya "az" gibi belirsiz olabilir ve araştırma konusu hakkında net bilgi sağlamaz.

Hem 1. soru hem de 2. soru, hangi zaman dilimini kapsadığı belirtilmediği için uygun değildir. Örneğin, bir öğrenci bir günde 3 saat, başka bir öğrenci ise bir ayda toplam 3 saat televizyon izlediğini söyleyebilir. Bu da sonuçların karşılaştırılmasını zorlaştırır.

En uygun yöntem, soruyu belirli bir zaman dilimini kapsayacak Çizimde ve seçenekli olarak hazırlamaktır. Örneğin:
Dün televizyon izlemek için kaç saat harcadın?

- Hiç izlemedim.
- 1 saatten az.
- 1–2 saat.
- 2 saatten fazla.

Bu tür sorular hazırlanırken cevap seçeneklerinin boşluk bırakmamasına, birbirleriyle çakışmamasına ve tüm olası cevapları kapsamasına dikkat edilmelidir.

Alıştırma 3

Lara, insanların toplu şehir içi ulaşım araçlarını ne sıklıkla kullandıklarını araştırmak için bir veri toplama aracı hazırlamıştır. Bu anketin olumsuz yönlerinden birkaçını yazınız ve veri toplamak için yeni ve geliştirilmiş bir anket formu öneriniz.

ANKET FORMU

Adı ve Soyadı:

_____

Toplu şehir içi ulaşım araçlarını ne sıklıkla kullanıyorsun?

- Hiçbir zaman
- Ara sıra
- Sık sık
- Her zaman

Örnek 5

Bir market müdürü, üç farklı üreticiye ait kahvaltılık tahıl ürünlerinden günde kaç paket satıldığını araştırmaktadır. Verileri nasıl toplayabilir?

Bu durumda veriler **gözlem** ve **sayma** yöntemleriyle toplanır.
Elde edilen veriler daha sonra tablo veya grafik hâlinde gösterilebilir. Bu gösterimler, verilerin analiz edilmesinde ve uygun sonuçlara ulaşılmasında kullanılır.

3) Verilerin Sunulması

Verilerin düzenlenmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar, genellikle yatay ve dikey çizgilerin kesişmesiyle oluşan dikdörtgen alanlardan meydana gelen tablolarda düzenli bir Çizimde gösterilir. Ancak bu gösterim biçimi bazen yeterince anlaşılır olmayabilir. Tablo hazırlamanın yanında, verileri sunmanın başka bir yolu da grafik gösterimdir. Grafik gösterim, düzenlenmiş verilerin görsel olarak sunulmasında kullanılır.

Örnek 6

Dört ayrı parseli bulunan bir çiftlikte tarım ürünlerinin (domates ve lahana) üretimini araştırmamız gerekiyor. Parsellerden ikisi normal, ikisi ise seralıdır. Aşağıdakiler hangi yöntemle incelenebilir?

a) Her ayrı parselden günlük kaç kilogram domates ve lahana elde edilmektedir?
b) Her ürün için elde edilen miktar ile parselin normal ya da seralı olması arasında bir ilişki var mıdır?
c) Elde edilen ürün miktarı ile ekilen ürün çeşidi arasındaki ilişki.

a) Soruyu cevaplamak için, daha uzun bir süre boyunca her parselden elde edilen ürün miktarına ilişkin verilerin günlük olarak ölçme yoluyla toplanması gerekir. Daha sonra veriler düzenlenmeli ve parsel türüne ve ürün çeşidine göre gruplandırılmalıdır.

Verilerin düzenlenmesi açısından en anlaşılır yöntem, verileri tablolar hâlinde düzenlemektir. Örneğin, parsele göre üretilen miktara ilişkin tablo:

	Parsel 1 (normal)	Parsel 2 (normal)	Parsel 3 (sera)	Parsel 4 (sera)
Domates	200 kg	250 kg	300 kg	400 kg
Lahana	250 kg	400 kg	450 kg	600 kg

b) İncelenen her tarım ürünü için farklı parsellerden günlük elde edilen miktarlar ayrı ayrı gösterilebilir. Böylece üretimin parsel türüne bağlı olup olmadığı sorusu cevaplanabilir.

c) Son olarak, ürün çeşidi ile elde edilen miktara ilişkin toplanan ve düzenlenen veriler analiz edilerek, sorulan soruya uygun cevaplar çıkarılabilir.

4) Verilerin Analizi ve Uygun Sonuçlara Ulaşılması

Bu adımda, tablo ve grafiklerle gösterilen verileri analiz eder, sorulan sorulara cevap verir ve uygun sonuçlara ulaşırız.
Verilerin grafikle, yani görsel olarak sunulması, çoğu zaman analiz yapılmasına yardımcı olur. Verilerin analiz edilmesi üzerinde daha sonra duracağız.

Örnek 7

Sınıfındaki öğrencilerin telefon, tablet ve bilgisayar kullanma alışkanlıklarıyla ilgili küçük bir araştırma yapman gerekiyor. Araştırma planının tüm adımlarını yaz ve açıkla.

Araştırmayı yürütmek için planın bütün adımları sırasıyla aşağıda verilmiştir:

1) Araştırma planı aşağıdaki soruların cevaplarını içermelidir:
   - Ne öğrenmek istiyorsun? (araştırma sorusu: Sınıfımdaki öğrenciler gün içinde dijital cihazları ne kadar süre kullanıyor?)
   - Hangi öğrencileri araştırmaya dâhil edeceksin? (kaç kişi, hangi sınıftan, hangi yerden)
   - Hangi verileri toplayacaksın? (örneğin, kullanım süresi, cihazları ne amaçla kullandıkları, ...)
   - Araştırma ne kadar sürecek?
2) Veri toplamak için uygun bir araç seçmek de çok önemlidir. Bu araç; hazırlanmış bir anket formu yoluyla anket, günlük kayıt tablosu veya birkaç öğrenciyle görüşme olabilir.
   Anket formuna konulabilecek bazı örnek sorular şunlardır:

- Günde ortalama kaç saat dijital cihaz kullanıyorsun?

  a) 2 saatten az, b) 2 ile 4 saat arası, c) 4 saatten fazla?

- Cihazları en çok ne için kullanıyorsun? (öğrenme, oyun, sosyal medya, ...)
- Cihazları en çok ne zaman kullanıyorsun?

  a) okuldan önce, b) okul teneffüslerinde,
  c) okuldan hemen sonra, d) gece geç saatte, uyumadan önce?

Bu Çizimde birincil veriler toplamış olursun. Araştırmanda ikincil veriler kullanmak istersen, internetten istatistik arayabilirsin: Makedonya'da ya da dünyada gençler dijital cihazları ortalama ne kadar süre kullanıyor?

3) Veriler toplandıktan sonra, daha anlaşılır olması için tablolar hâlinde düzenlenebilir ve/veya grafikle gösterilebilir.
4) Elde edilen verilerin analizi, aşağıdaki sorularla ilgili sonuçlar içeren kısa bir metin şeklinde olabilir: Ne öğrendim? Sonuçlar ne anlama geliyor?

Alıştırma 4

Sınıfındaki öğrencilerin boş zamanlarının ne kadarını spor yapmaya ayırdıklarına ilişkin veri toplamak için bir plan hazırla. Gerekli verileri toplamak için görüşme yapmanın veya anket formu kullanmanın avantajları ve dezavantajları nelerdir?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Lirim, sınıfındaki öğrencilerin günlük harcadıkları para miktarı hakkında bilgi toplamaktadır. Lirim'in verileri toplayabileceği bir araç hazırla. Toplanan veriler birincil veriler mi, yoksa ikincil veriler mi olur?
2. Blagoy, okulundaki öğrencilerin beslenmelerinde meyve ve sebzeyi ne kadar kullandıklarını araştırmak istiyor. Hangi veri toplama araçlarını kullanabilir? Hangi soruları sormalıdır? Uygun bir anket formu hazırla. Blagoy'un verileri nasıl sunabileceğine dair bir fikrin var mı?
3. Sınıfındaki öğrencilerin tatil boyunca okudukları kitap sayısına ilişkin veri toplamak için bir plan hazırla. Hangi veri toplama araçlarını kullanacaksın? Toplanan veriler birincil veriler mi, yoksa ikincil veriler mi olur?
4. Geçen ay boyunca günlük en yüksek ve en düşük sıcaklıklarla ilgili veri toplamak için bir plan hazırla.
5. Avrupa Hentbol Ligi'nde millî takım kalecilerinin başarı durumuna ilişkin veri toplamak için bir plan hazırla.

Araştırma

Okulundaki VIII. sınıf öğrencilerinin günlük olarak ne kadar fiziksel olarak aktif olduklarına ilişkin bir araştırma planı hazırla ve veri topla.

4. DİYAGRAMLAR

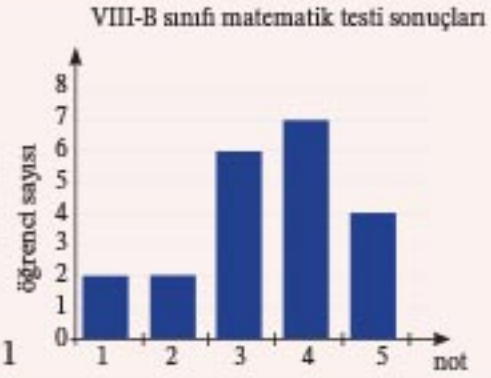
Etkinlik

Çizim 1'deki diyagramda (sütun grafiğinde) VIII-b sınıfının matematik testi sonuçları gösterilmiştir.

a) Kaç öğrencinin notu 5'tir?

b) Kaç öğrencinin notu 1 veya 2'dir?

c) Öğrenciler en çok hangi notu almıştır?



Çizim 1

Toplanan verilerden kolay ve hızlı sonuçlar çıkarmak istiyorsak, verileri anlaşılır ve sade bir biçimde göstermemiz gerekir. Bunu, diyagramlarla grafiksel gösterim yaparak sağlayabiliriz.

Kodu tara ve diyagramları incele.

Örnek 1

Bir sınıfta 36 öğrenci vardır ve bunların 15'i kızdır. Sınıfın cinsiyet dağılımını daire grafiği ile göster.

Cinsiyet değişkeni için iki olasılık vardır: erkek ve kız. Bu nedenle diyagramda iki kategori olacaktır: erkekler ve kızlar.
Erkeklerin sayısı $36 - 15 = 21$ erkektir (Çizim 2).
Buna göre daire grafiği iki parçaya (dilime) ayrılacaktır.
Her parçanın büyüklüğünü belirlemek için önce bir öğrenciyi gösteren tam açı parçasının açısı belirlenir.
Bu açı $360° : 36 = 10°$ olur. Buna göre daire grafiğindeki dilimler şu açıları kaplar:

- kızlar için $10° \cdot 15 = 150°$
- erkekler için $10° \cdot 21 = 210°$

Daire grafiği şöyle olacaktır:



Çizim 2

İkinci yöntem:
Dilimlerin ayrılması bazen kesirlerle ifade edilen parçalar üzerinden daha kolay yapılabilir. Buna göre:

- Kızlar dairenin $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$'sini oluşturur. Derece olarak bu, $\frac{5\cdot 360^\circ}{12}=150^\circ$ olur.
- Erkekler dairenin $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$'sini oluşturur. Bu da, $\frac{7\cdot 360^\circ}{12}=210^\circ$ olur.

Aynı diyagram, daire 12 eş parçaya bölünerek ve erkekler için yedi parça, kızlar için beş parça uygun Çizimde işaretlenerek de elde edilir.

Kodu tara ve diyagramları incele.

Alıştırma 1

Petar'ın mart ayındaki toplam parasının dağılımı tabloda gösterilmiştir.

a) Tabloyu defterine geçir ve tamamla.

b) Tablodaki veriler için bir daire grafiği çiz. Daire grafiğindeki her bir bölümü, dairenin bir parçası olarak kesir biçiminde de yaz.

Gider	Denar	%	Merkez açısı
Kira	1800		
Gıda	6000		
Ulaşım	950		
Diğer	1000		
Tasarruf	250		

Alıştırma 2

Çizim 3'teki daire grafiğinde, belediye satranç derneğinin bir satranç turnuvasını düzenlemek ve gerçekleştirmek için ayırdığı paranın dağılımı gösterilmiştir.
Derneğin kullanabileceği toplam bütçe 60 000 denar ise, her gider kategorisine ne kadar para düştüğünü hesapla.

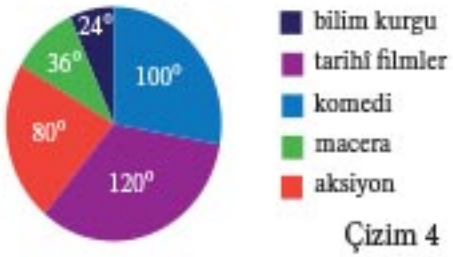


Çizim 3

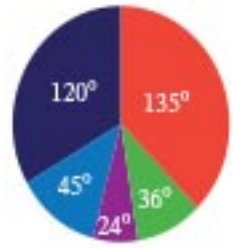
Örnek 2

Belirli film türlerine olan ilginin belirlenmesine yönelik bir araştırmada, 90 yetişkin ve 120 çocuktan oluşan bir çalışma grubu incelenmiştir. Elde edilen veriler düzenlenerek Çizim 4'teki daire grafikleri oluşturulmuştur.

Yetişkinlerin en sevdiği film türleri



Çocukların en sevdiği film türleri



Çizim 4

a) Çocukların yüzde kaçı komedi sevmektedir?
b) Kaç yetişkin tarihî içerikli filmleri sevmektedir?
c) Bilim kurgu filmlerini tercih eden çocuk sayısı, yetişkin sayısından kaç fazladır?
d) Macera filmleri dilimi, yetişkinlerde ve çocuklarda aynı büyüklüktedir. Hesaplama yapmadan, macera filmlerini tercih eden çocuk sayısının yetişkin sayısından daha fazla olduğunu nasıl anlarsın?

a) Komedi seven çocukları gösteren dilimin merkez açısı 45°'dir. Tüm örnekleme karşılık gelen tam açı 360° olduğundan, yüzde oranı $\frac{45}{360} = 0{,}125 = 12{,}5\%$ olarak bulunur. Buna göre çocukların %12,5'i komedi sevmektedir.

b) Yetişkin örneklemi 90 kişiden oluştuğuna göre, 1 yetişkine karşılık gelen merkez açı 360° : 90 = 4° olur. Buna göre tarihî içerikli filmleri en çok seven yetişkinleri gösteren 120°'lik açı, 30 kişiye karşılık gelir (120° : 4° = 30 kişi).

c) Bilim kurgu filmleri izlemeyi seven yetişkin sayısı 24° : 4° = 6'dır.
Şimdi önce 1 çocuğa karşılık gelen merkez açıyı belirleyelim: 360° : 120 = 3°. Buna göre bilim kurgu seven çocuk sayısı 120° : 3° = 40 olur. O hâlde 40 − 6 = 34, yani bilim kurgu seven çocuk sayısı yetişkin sayısından 34 fazladır.

d) Macera filmleri dilimi yetişkinlerde ve çocuklarda aynı büyüklüktedir. Ancak çocuk örneklemi, yetişkin örnekleminden daha büyüktür. Yetişkinlerde 360°'lik tam açı daha küçük bir sayıyı (90 yetişkin), çocuklarda ise aynı 360°'lik açı daha büyük bir sayıyı, yani 120 çocuğu temsil eder. Buna göre macera filmleri için eşit açılar (36°), çocuklarda yetişkinlere göre daha fazla kişiye karşılık gelir.

Alıştırma 3

Aşağıdaki tablolar, iki farklı şehirde yaşayan nüfusun yaş gruplarına göre dağılımını göstermektedir. Buna göre; her şehir için birer daire grafiği oluşturarak iki şehrin nüfus verilerini karşılaştırınız ve aşağıdaki soruları cevaplayınız:

X şehri	%
0-14	28
15-24	21
25-54	38
55-64	7
65 yaş ve üstü	6

Y şehri	%
0-14	14
15-24	12
25-54	43
55-64	12
65 yaş ve üstü	19

a) X şehrinde 25 ile 54 yaş arasında kaç kişi vardır?
b) Y şehrindeki nüfusun yüzde kaçı 55 yaşından büyüktür?
c) X şehrinin 30 000, Y şehrinin 60 000 nüfusu varsa, hesaplama yapmadan iki şehirdeki hangi yaş gruplarının aynı oranda temsil edildiğini nasıl anlarsın?

Örnek 3

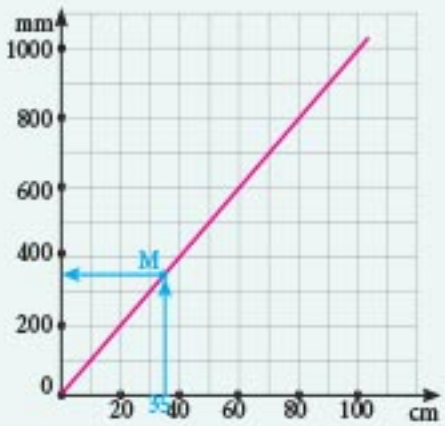
Tabloda uzunluk ölçüleri olan santimetre ile milimetre arasındaki ilişki verilmiştir.

cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
mm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

a) Santimetre ve milimetre uzunluk ölçüleri arasındaki ilişkiyi çizgi grafiği ile göster.
b) Çizgi grafiğinden 35 cm'nin kaç milimetre olduğunu oku.
c) Çizgi grafiğinden 200, 320 ve 470 değerlerinin milimetre cinsinden karşılığını santimetre olarak oku.

a) Verileri koordinat sisteminde grafik olarak göstermek için x eksenine santimetreler,
y eksenine milimetreler işaretlenir (Çizim 5).
b) Çizgi grafiğinden 35 cm'nin mm cinsinden karşılığını okumak için x ekseninde 35 cm işaretlenir ve bu noktadan dikme çıkarılır.
Dikme ile çizgi grafiğinin kesişim noktası M'den, x eksenine paralel bir doğru çizilir.
Bu doğru y eksenini kestiği noktada 35 cm'nin mm cinsinden karşılığını verir.
c) b) maddesine benzer Çizimde, bu kez y ekseninde mm cinsinden verilen değerden başlanır. Çizgi grafiğinden 200 mm'ye karşılık gelen değerin 20 cm olduğu okunabilir.

Uzunluk ölçüleri arasındaki ilişki - santimetre ve milimetre



Çizim 5

Çizim 5'ten, santimetre cinsinden ve milimetre cinsinden ifade edilen uzunluk değerleri arasında doğru orantılı bir ilişki olduğunu görebilirsin.
Bu ilişki $y = 10x$ biçiminde yazılabilir. Burada y, uzunluğun milimetre cinsinden değerini; x ise uzunluğun santimetre cinsinden değerini gösterir.

Kodu tarayın ve diyagramları inceleyin.

Alıştırma 4

Çizim 6'daki diyagramda, belirli yıllarda Resen ve Radoviş'te metrekare başına milimetre cinsinden yağış miktarı verilmiştir. Cevapla:

a) Her şehirde en fazla ve en az yağış ne zaman gözlemlenmiştir?
b) İki şehirde eşit miktarda yağış olan yıllar var mıdır?
c) Bir yıl içinde yağış miktarında en büyük düşüş hangi dönemde gözlemlenmiştir?
d) 2022 yılındaki yağış farkı ne kadardır?



Çizim 6

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Yarım litre inek ve koyun yoğurdunun fiyatı, 5 ay boyunca tablodaki verilere göre değişmiştir:

	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs
İnek yoğurdu	45	47	44	40	40
Koyun yoğurdu	57	60	55	51	51

Bu verileri tek bir çizgi grafiğiyle göster. Dikkat et, iki farklı yoğurt türü vardır.

2. Tablo, 100 öğrencinin ders dışı etkinliklere ilgisini göstermektedir.
Bu verileri göstermek için daire grafiği çiz.

Etkinlik	Spor	Orkestra	Bilim	Sosyal-insani
Frekans	39	18	20	23

3. Çizim 7'deki tablo ve daire grafiğinde, 30 çocuk ve 36 yetişkinde en sevilen kek tadıyla ilgili araştırmanın sonuçları verilmiştir.

Çocuklarda en sevilen tat	Sıklık (frekans)
Meyveli	5
Çikolatalı	11
Vanilyalı	8
Fındıklı	6



Çizim 7

a) Çocuklardan elde edilen veriler için daire grafiği çiz.
b) Kaç yetişkin çikolatalı kek sevmektedir?
c) Çocuklardaki ve yetişkinlerdeki değerleri karşılaştır. İki daire grafiğinde merkez açıları eşit olan dilimler var mı? Bu dilimler kaç birimi göstermektedir?

4. İki sınıftaki öğrencilere boş zamanlarını nasıl geçirdikleri sorulmuştur. Birinci sınıfta 20, ikinci sınıfta 30 öğrenci vardır. Cevaplar Çizim 8'deki daire grafikleriyle verilmiştir:



Çizim 8

a) Hangi iki dilimin açısı eşittir? Toplam öğrenci sayıları farklı olmasına rağmen bunun nasıl mümkün olduğunu açıkla.

b) Hangi sınıfta oyun oynayan öğrenci sayısı daha fazladır? Bu, yüzdesinin de daha büyük olduğu anlamına gelir mi?

c) İki grafikte de spor yapan öğrencilerin yüzdesini hesapla. Ne fark ediyorsun?

d) Aynı soru için toplam 40 öğrenciyle anket yaptığını varsayarak bir daire grafiği hazırla. Spor dilimi, verilen iki daire grafiğindekiyle aynı açıyla (144°) gösterilsin. Diğer etkinliklere karşılık gelen dilimlerin açılarını kendi seçimine göre öner.

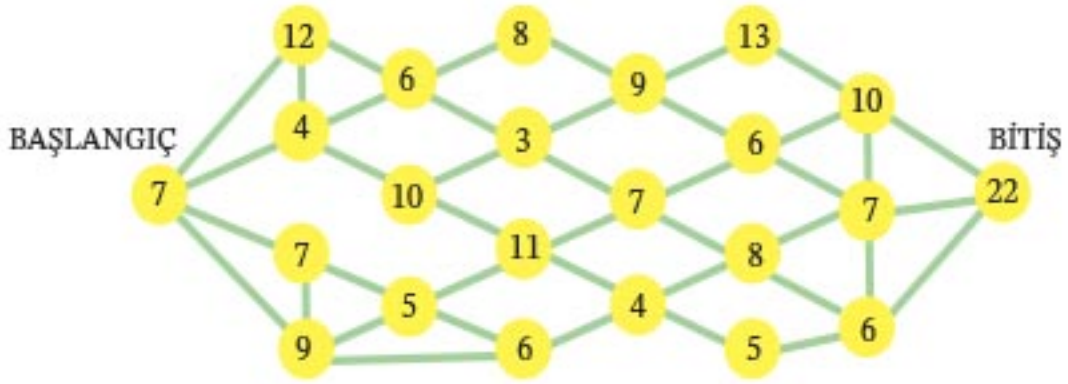
5. Bir şehirdeki en yüksek ve en düşük ortalama aylık sıcaklıklara ait tabloda verilen verileri çizgi grafiğiyle göster.

Ay	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
En yüksek ortalama sıcaklık (°C)	+4	+16	+16	+25	+27	+30	+35	+36	+25	+20	+17	+10
En düşük ortalama sıcaklık (°C)	−25	−20	−2	+3	+5	+13	+18	+11	+12	+5	−4	−15

Araştırma

1. İnternette veya yazılı yayınlarda, öğrenilen diyagramlardan biriyle gösterilmiş veri sunumları ara. Bu istatistiksel araştırmalarda hangi soruların cevaplandığını not et. Daha sonra bunlarla ilgili en az iki soru daha oluşturmaya çalış.
2. Resimdeki oyunu şu kurallara göre oyna: **Başlangıçtan bitişe** doğru çizgiler üzerinde ilerle. Üzerinde durduğun sayıların aritmetik ortalaması 5'ten küçük ve 10'dan büyük olmamalıdır. Aynı karede birden fazla duramazsın.

Sınıf için meydan okuma: Oyunu sınıf düzeyinde veya ikili olarak oynayabilirsiniz. Kazanan, **bitişe** ilk ulaşan kişi olur.



5. GÖVDE-YAPRAK DİYAGRAMI (DAL VE YAPRAK GRAFİĞİ)

Etkinlik

Aşağıdaki veri grubunun medyanını belirle.

a) 3, 5, 6, 6, 8, 10, 13, 14, 14, 14

b) 4, 1, 3, 6, 6, 1, 1, 2, 7

Toplanan sayısal veriler, büyüklüklerine göre sıralanarak düzenlenebilir.
Bu durumda en uygun gösterimlerden biri **gövde-yaprak diyagramıdır** (Çizim 1).
Bu diyagramda: Gövde, dikey çizginin sol tarafında yer alır. Yapraklar, dikey çizginin sağ tarafında yer alır ve her zaman tek basamaklı olarak gösterilir.
Yapraklar küçükten büyüğe doğru sıralanır ve alt alta düzenli Çizimde yazılır.
Her gövde-yaprak diyagramında, diyagramın nasıl okunacağını gösteren bir **anahtar (açıklama)** mutlaka verilmelidir.

gövde	yaprak
2	0 0 1 2 7
3	1 1 2
4	2 3 5 6
5	1 3 4 4 6

Anahtar: 5 | 1 → 51 sayısını gösterir.

Örnek 1

Bir süpermarkette kasada bekleme sürelerini (dakika cinsinden) gösteren aşağıdaki veri kümesi verilmiştir.

17, 23, 20, 19, 25, 30, 32, 25, 12, 10, 23, 15, 11.

a) Sonuçları bir gövde-yaprak diyagramı ile göster.

b) Bekleme sürelerinin değişim aralığını (ranjını) belirle.

c) Müşterilerin yüzde kaçı 20 dakika ve daha fazla beklemiştir?

d) Bu veri grubunun medyanını bul.

a) Birinci adım: Gövdede onlar basamakları gösterilir. Yapraklar ise her değerin birler basamağındaki rakamlardan oluşur.

1	7	9	2	0	5	1
2	3	0	5	5	3	
3	0	2				

İkinci adım: Yapraklar küçükten büyüğe doğru sıralanır.

1	0	1	2	5	7	9
2	0	3	3	5	5	
3	0	2				

Anahtar: 3 | 0 → 30 dakika anlamına gelir.

b) Ranj = En büyük değer − En küçük değer = 32 − 10 = 22

c) İkinci ve üçüncü satırdaki yapraklar sayılır ve bunların toplam içindeki yüzdesi hesaplanır.

7 müşteri en az 20 dakika beklemiştir. Toplam 13 değer bulunduğundan, $\frac{7}{13} \approx 0,54 = 54\%$

Buna göre müşterilerin yaklaşık %54'ü 20 dakika veya daha fazla beklemiştir.

d) Veriler gövde-yaprak diyagramında zaten sıralı olduğundan, baştan ve sondan birer değer çıkarılarak ortadaki değere ulaşılır. Ortadaki değer 20 olduğundan, medyan 20'dir.

1	~~0~~	~~1~~	~~2~~	5	~~7~~	~~9~~
2	0	~~3~~	~~3~~	5	5	
3	~~0~~	~~2~~				

Alıştırma 1

Kodu tara ve diyagramları incele.

Yovan, gezi sırasında bulduğu tırtılların uzunluklarını kaydetmiştir. Uzunluklar gövde-yaprak diyagramında verilmiştir.

a) En kısa tırtılın uzunluğu kaç santimetredir? En uzun tırtılın uzunluğu kaç santimetredir?
b) Yovan kaç tırtıl bulmuştur?
c) Uzunluğu en fazla 3 cm olan kaç tırtıl vardır?
d) Uzunlukların ranjını bulun.
e) Uzunlukların medyanını bulun.

1	3	5	7	7				
2	0	6	8	8	8	9		
3	1	5	5	5	5	6	8	9
4	1	5						
5	2							

Anahtar: 5 | 2 → 5,2 cm anlamına gelir.

Alıştırma 2

İngilizce öğretmeni öğrencilerden kendilerini birkaç cümleyle tanıtmalarını istemiştir. Kırk öğrencinin kullandığı kelime sayıları verilmiştir.

72	81	78	82	78	89	82	77
85	76	75	81	74	87	84	77
80	83	79	82	75	74	74	71
75	79	72	76	71	75	82	78
76	76	81	77	72	84	87	83

a) Verileri gövde-yaprak diyagramı ile göster.
b) Gruplandırılmış frekans tablosu oluştur.
c) Katılımcılardan kaçı 84'ten fazla kelime kullanmıştır?
d) 75'ten az kelime kullanan katılımcıların yüzdesi kaçtır?
e) Verilerin ranjını bulun.
f)Veri grubunun medyanını bulun.

Alıştırma 3

Bir sınıftaki öğrenciler, bir gün boyunca koşu, hızlı yürüyüş veya bisiklet sürmeye ayırdıkları süreyi (dakika cinsinden) ölçmüştür. Elde edilen veriler şu Çizimdedir: 32, 45, 28, 41, 39, 47, 52, 36, 44, 33, 38, 50
a) Veriler için bir gövde-yaprak diyagramı oluştur.
b) En sık görülen değer(ler) hangisidir?
c) Medyanı bulun.
d) 40 dakikadan fazla egzersiz yapan kaç öğrenci vardır?

Alıştırma 4

Biyoloji dersinde bir sınıftaki öğrenciler dinlenme hâlindeki nabızlarını ölçmüştür. Elde edilen değerler verilmiştir: 72, 78, 65, 81, 74, 69, 77, 83, 71, 75, 68, 79
a) Öğrenciler arasındaki fizyolojik farklılıkları daha iyi gözlemleyebilmek için verileri gövde-yaprak diyagramıyla göster.
b) Diyagrama göre en sık görülen nabız değeri kaçtır?
c) Medyanı bulun.
d) Nabzı 75 veya daha yüksek olan kaç öğrenci vardır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Verilen gövde-yaprak diyagramına göre aşağıdakileri belirle:
   a) En küçük değer,
   b) En büyük değer,
   c) Değeri 90'dan büyük olan kaç veri bulunduğunu,
   d) Değeri en az 100 olan kaç veri bulunduğunu,
   e) 75'ten küçük verilerin yüzdesini.

7	3	4	6	7	8	9	9						
8	0	0	1	1	2	3	3	5	5	6	7	8	8
9	1	1	2	4	4	5	8	9					
10	2	3	7										
11													
12	2												

Anahtar: 9 | 1 → 91 anlamına gelir.

2. Aneta, günlük gazetede yer alan 30 cümlenin her birindeki kelime sayısını saymıştır. Sonuçları gövde-yaprak diyagramında verilmiştir.

0	8	8	9					
1	1	2	3	4	4	8	9	
2	0	3	5	5	7	7	8	
3	2	2	3	3	6	6	8	8
4	1	2	3	3	5			

Anahtar: 4 | 1 → 41 kelime anlamına gelir.

a) Kaç cümlede 36 kelime vardır?
b) Ranjı belirle.
c) Medyanı bul.
d) Aneta'nın incelediği cümlelerdeki ortalama kelime sayısını hesapla.

3. On beş paketin kilogram cinsinden kütleleri verilmiştir.

1,1 1,7 2,0 1,0 1,1 0,5 3,3 2,0
1,5 2,6 3,5 2,1 0,7 1,2 0,6

a) Bu bilgileri göstermek için bir gövde-yaprak diyagramı çiz.
b) Kütlesi 2 kilogramdan küçük olan kaç paket vardır?
c) Kütlelerin ranjı nedir?
d) Paketlerin kütlelerinin medyanını belirle.

4. Yana, botanik bahçesindeki bitkilerin yüksekliklerini (milimetre cinsinden) ölçmektedir. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

178	189	147	147	166
167	153	171	164	158
189	166	165	155	152
147	158	148	151	172

a) Sonuçları gövde-yaprak diyagramı ile göster.
b) Yüksekliklerin ranjı nedir?
c) 165 mm'den daha uzun kaç bitki vardır?
d) Yüksekliklerin medyanını bul.
e) Yüksekliklerin modunu belirle.

5. Sekizinci sınıf öğrencileri, laboratuvar deneyinde 3 metre yükseklikten bırakılan küçük bir metal bilyenin düşme süresini ölçmektedir.

Her öğrenci bir ölçüm yapmış ve aşağıdaki sonuçlar (saniye cinsinden) elde edilmiştir.
0,78; 0,81; 0,74; 0,69; 0,72; 0,85; 0,80; 0,73; 0,77; 0,82; 0,76; 0,79; 0,75; 0,83; 0,71; 0,88; 0,84; 0,70; 0,74; 0,78.

a) Veriler için bir gövde-yaprak diyagramı oluştur.
b) Sürelerin ranjı nedir?
c) 0,75 saniyeden kısa kaç ölçüm vardır?
d) Varsa modu belirle.

6. Bir coğrafya kulübü, aynı ocak döneminde Kuzey Makedonya Cumhuriyeti'nin iki farklı bölgesindeki günlük en düşük sıcaklıkları toplamaktadır.
A Bölgesi için gövde-yaprak diyagramını hazırlamışlardır.

A Bölgesi: Gövde-yaprak diyagramı (en düşük sıcaklıklar, °C)

−5	9
−4	8 7
−3	9 5 2
−2	8 6 6 5
−1	9 4

Anahtar: −3 | 5 → −3,5 °C anlamına gelir.

B Bölgesi verileri (°C): −1,0; −0,5; −2,0; −1,5; −3,0; −2,5; −1,0; −0,5; −0,5; −1,0; −4,2; −2,0.

a) B Bölgesi için bir gövde-yaprak diyagramı oluştur.
b) İki diyagramı karşılaştır. Bölgelerin iklimleri arasındaki fark hakkında ne sonucuna varabilirsin?
c) Dona karşı hassas meyve yetiştiriciliği (örneğin şeftali veya kayısı) için hangi bölgeyi önerirsin? Kararını diyagramlara dayanarak gerekçelendir.
d) A ve B bölgeleri arasındaki en düşük sıcaklık farklarını açıklayabilecek iki araştırma sorusu öner.

Araştırma

Sınıfındaki öğrencilerin boy uzunlukları, son sınavdan aldıkları puanlar, 400 metreyi koşma süreleri (dakika cinsinden) veya benzeri okul etkinliklerine ait verileri topla.
Verileri bir gövde-yaprak diyagramı ile göster ve aşağıdakileri belirle:

a) Ranj, b) Medyan, c) Mod, d) Aritmetik ortalama.

Gövde-yaprak diyagramı kullanmanın tablo kullanmaya göre avantajlarını yaz.

6. GRUPLANDIRILMIŞ VERİLER İÇİN İSTATİSTİKSEL HESAPLAMALAR

Etkinlik

Ocak ayında iki hafta boyunca her gün öğle vakti ölçülen sıcaklıklar aşağıdaki gibidir.

−2, −5, −6, −4, −1, 2, 4, 5, 5, 3, −2, −3, 0, 1, 2.

Bu veri grubuna ait aşağıdaki değerleri bulunuz:

a) mod,

b) medyan,

c) aritmetik ortalama,

d) verilerin açıklığı.

Kodu tara ve istatistikleri incele.

Eğer gruplandırılmış veriler verilmişse modu, medyanı ve aritmetik ortalamayı belirleyemeyiz. Bunların yerine modal sınıfı, medyanı içeren sınıfı bulabilir ve ortalama için bir tahmin yapabiliriz.

Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin matematik yazılı sınavından aldıkları puanlar aşağıdaki gruplandırılmış frekans tablosunda verilmiştir:

Puanlar	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100
Öğrenci sayısı	3	8	13	10	8

a) Medyanı içeren sınıfı belirle.

b) Modal sınıfı belirle.

c) Yazılı sınavından alınan ortalama puan kaçtır?

a) Toplam öğrenci sayısını bulmak için frekansları toplarız. $3 + 8 + 13 + 10 + 8 = 42$.
Medyan, 21. ve 22. değerlerin ortasında olmalıdır.
İlk 11 değer 0 ile 49 puan arasındadır, sonraki 13 değer ise 50 ile 72 puan arasındadır.
Buna göre 21. ve 22. değer 50-72 sınıfındadır. Yani medyanı içeren sınıf 50-72'dir.

b) Modal sınıf, frekansı en büyük olan sınıftır. Bu da 50-72'dir.

c) 0-26 sınıfı, 0 ile 26 arasında 3 değer içerir. Bu sınıfın orta değeri 13'tür. 27-49 sınıfında 8 değer vardır. Bu sınıfın orta değeri $(27 + 49) : 2 = 38$'dir vb.

Puan	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	Toplam
Sınıfın orta değeri, m	13	38	61	80	94	
Öğrenci sayısı, frekans f	3	8	13	10	8	42
$m \cdot f$	39	304	793	800	752	2688

Toplam puan için yapılan tahmin 2688'dir ve bu puanları alan öğrenci sayısı 42'dir. Öğrenci başına düşen ortalama puan için yapılan tahmin 2688 : 42 = 64'tür.
Gerçek hayatta istatistiksel araştırmalarda verilerin işlenmesi için çoğunlukla yazılım çözümleri kullanılmaktadır.
Verilen örnekte, ortalama tahmini yapılırken tablodaki bazı değerleri, örneğin toplamı (toplam öğrenci sayısı, Çizim 1), otomatik hesaplama işlevlerini kullanarak hesaplamayı deneyebilirsin.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Puan	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	Toplam
3		Sınıfın orta değeri, m	13	38	61	80	94	
4		Öğrenci sayısı, frekans f	3	8	13	10	8	=SUM(C4:G4)
5								

Çizim 1

Örnek 2

Leyla, bir oyunda her sınıf arkadaşının aldığı puanları toplamıştır.
Puanlar şu Çizimdedir: 7, 9, 5, 6, 8, 7, 10, 6, 8, 9, 7, 5, 6.

a) Verileri elektronik tablo programına gir.
b) Sıralama işlevini kullanarak bir gövde-yaprak diyagramı oluştur.
c) Otomatik olarak hesapla: toplam öğrenci sayısı, ortalama puan, en yüksek ve en düşük sonuç.

a) Çizim 2'de elektronik tablo programına girilmiş verilere ait bir örnek gösterilmiştir.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Öğrenci	Puan			
3		1	7			
4		2	9			
5		3	5			
6		4	6			
7		5	8			
8		6	7			
9		7	10			
10		8	6			
11		9	8			
12		10	9			
13		11	7			
14		12	5			
15		13	6			

Çizim 2

b)

5	5 5
6	6 6 6
7	7 7 7
8	8 8
9	9 9
10	10

Anahtar: 5 | 5 öğrencinin 5 puanı vardır.

c) Otomatik işlem işlevleri:

- Toplam öğrenci sayısı: =COUNTA(C3:C15) → 13
- Ortalama: =AVERAGE(C3:C15) → 7,23
- En yüksek sonuç: =MAX(C3:C15) → 10
- En düşük sonuç: =MIN(C3:C15) → 5

Örnek 3

Aşağıdaki tabloda verilen bir okuldaki öğrencilerin boylarının açıklığını bul.

Uzunluk (cm)	150-154	155-159	160-164	165-169	170-174	175-179
Öğrenci sayısı	5	18	42	14	13	8

Eğer veriler frekans tablolarında aralıklara göre zaten gruplandırılmışsa, açıklık; son aralığın üst sınırı ile ilk aralığın alt sınırı arasındaki farktır.

Açıklık 179 - 150 = 29'dur.

Alıştırma 1

100 kişinin vücut kütleleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Vücut kütlesi (kg)	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70 -79	80- 89	90 - 99	Toplam
Frekans	6	8	22	31	12	11	5	5	100

a) Bu kütlelerin modal sınıfını bul. Modal sınıf neyi gösterir?

b) Medyanı içeren sınıfı bul.

c) Açıklığı bul.

d) Önce ortalama kütle için bir tahmin yap. Tahmin stratejini açıkla.

e) Hesaplama yaparak tahminini kontrol et.

Alıştırma 2

50 ölçümde elde edilen en büyük kütle 8,56 kg'dır. Ölçümlerin açıklığı 1,23 kg ise en küçük ölçülen kütle kaçtır?

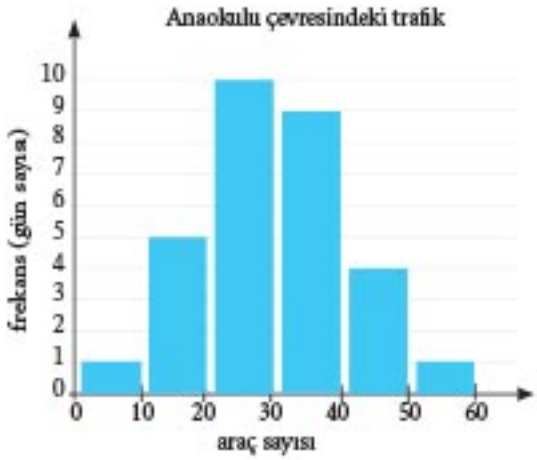
Alıştırma 3

Bir anaokulunun yönetimi, anaokulunun hemen yakınındaki trafikle ilgili güvenlik konusunda endişelenmiştir. İş günlerinde 6 hafta boyunca saat 7:00 ile 8:00 arasında anaokulunun önünden kaç aracın geçtiğine dair bir araştırma yapmışlardır. Veriler sütun grafiğiyle verilmiştir (Çizim 1).

a) Anaokulunun yakınında en sık kaç araç bulunmaktadır? Bu soruyu cevaplamak için neyi belirlemelisin?

b) Grafikten medyanı içeren sınıfı bul ve ortalama araç sayısı için bir tahmin yap.

c) Araç sayısı 35'ten fazla olduğunda güvenlik bozulur. Anaokulunun çevresi güvenli midir? Soruyu cevaplamak için hangi bilgileri kullanıyorsun?



Çizim 1

ALIŞTIRMA SORULARI

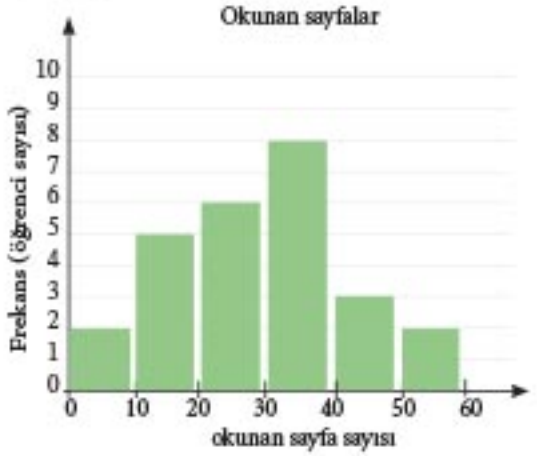
1. Makedonca öğretmeni, öğrencilerine verilen okuma kitabından şimdiye kadar kaç sayfa okuduklarını sormuştur. Sonuçlar sütun grafiğiyle verilmiştir (çizim 2).

a) Öğretmenin topladığı veriler için modal sınıf hangisidir?

b) En az 40 sayfa okuyan kaç öğrenci vardır?

c) Öğrencilerin ev ödevi olarak en az ilk 30 sayfayı okumaları gerekiyordu. Kaç öğrenci ev ödevini tamamlamamıştır?

d) Verilerin açıklığını bul.



Çizim 2

2. Bir mini market, 50 gün boyunca her gün kaç müşterisi olduğunu kaydetmektedir. Sonuçlar şöyledir:

81	82	75	83	104	92	112	124	110	92
111	105	78	87	99	86	129	115	121	76
109	75	104	96	74	104	98	114	106	109
101	110	92	86	122	118	115	117	84	71
73	116	119	122	94	81	107	109	115	127

a) 70-79, 80-89, ..., 120-129 sınıflarıyla gruplandırılmış veriler için bir frekans tablosu oluştur. İmkânın varsa tabloyu elektronik tablo programı yardımıyla oluştur.
b) Modal sınıfı bul.
c) Medyanı içeren sınıfı bul.
d) Marketin en az 100 müşterisi olduğu gün sayısını yüzde olarak ifade et.
e) Market çalışanları, en az 110 müşteri varsa günü başarılı kabul etmektedir. Elde edilen sonuçlara göre market, çalışmasını iyileştirmeye yönelik değişiklikler yapmalı mıdır?

3. Yaşıtlarının günde kaç saat internet kullandığını araştır: öğrenme, oyun, sosyal ağlar veya video izleme için. En az 30 yaşıtından veri topla ve uygun bir elektronik tablo programı kullanarak bunları frekans tablosunda gruplandır. Daha sonra elektronik tablo programının işlevlerinden birini kullanarak bir grafik çizmeyi dene (en iyi gösterimi sağlayacağını düşündüğün grafik türünü seç).
a) Modal sınıfı bul.
b) Medyanı içeren sınıfı bul.
c) Ortalama için bir tahmin yap.

Kısa bir sonuç yaz (3 ile 4 cümle arasında). Bu sonuçta:

- Öğrencilerin interneti en sık nasıl kullandığını analiz edeceksin (modal sınıfa göre)
- "Tipik" kullanımı tahmin edeceksin (medyanı içeren sınıfa göre)
- İnternetin ölçülü mü yoksa aşırı mı kullanıldığını yorumlayacaksin (ortalama tahminine göre)

Öğrencilerin internette geçirdikleri zamanı nasıl daha verimli düzenleyebileceklerine dair öneriler yaz. Kısa bir öneri planı ekleyebilirsin.

4. 50 öğrencinin cm cinsinden boyları şöyledir:

145	154	161	137	137	130	128	154	139	155
168	138	161	152	160	131	156	130	141	146
162	160	163	139	148	157	149	146	146	142
146	137	127	130	128	158	139	144	140	143
130	134	125	176	128	132	138	137	143	135

a) Verileri gruplandırılmış veri tablosu hâlinde düzenle.
Grup aralığının uzunluğuna kendin karar ver.
b) Modal sınıfı bul.
c) Medyanı içeren sınıfı bul.
d) Açıklığı bul.

Araştırma

1. İstatistiksel hesaplamalar için en çok kullanılan yazılımların hangileri olduğunu internette araştır ve bunlardan ikisi için T-tablosu hazırla.
2. Bir popülasyon hakkında sonuç çıkarmak için neden bazen aritmetik ortalamanın, başka zaman ise modun veya medyanın kullanılmasının uygun olduğunu düşün ve cevapla. Bu durum açıklığa nasıl bağlıdır? Medyanın, modun veya aritmetik ortalamanın daha iyi genel bir görünüm verdiği örnekler öner.

7. TEMEL OLAY. KARŞIT OLAY. OLASILIK

Temel Olay

Etkinlik

1. "Bir parayı yalnızca bir kez atma" deneyindeki tüm olası sonuçları ifade et.
2. "Oyun zarı atma" deneyi için olaylardan hangisinin kesin, hangisinin imkânsız olduğunu belirle:

   F: zarın üst yüzünde 1'den 6'ya kadar nokta göründü,

   G: zarın üst yüzünde 7 nokta göründü.

Deneyin, gözlemlenebilen bir etkinlik olduğunu hatırla. Her deney aynı koşullar altında tekrarlanabilir, birden fazla olası sonucu vardır ve hangisinin gerçekleşeceğini önceden bilemeyiz. Örneğin, para veya oyun zarı atma, bitkilerin aydınlıkta mı yoksa karanlıkta mı daha hızlı büyüdüğünü araştırma ve ciddi laboratuvar incelemelerine kadar birçok çalışma deney olarak kabul edilir.
Bir deneyin farklı sonuçlarına olay denir. Oyun kartları destesinden bir kart çekme deneyinde olaylar şunlardır: sinek sekizli çekildi, onlu çekildi, kırmızı renkli kart çekildi vb.

Örnek 1

"Oyun zarı atma" deneyinde aşağıdaki olayları incele:



A: zarın üst yüzünde çift sayıda nokta göründü,

B: zarın üst yüzünde 3 ile bölünebilen sayıda nokta göründü,

E_1: zarın üst yüzünde 1 nokta göründü,

E_2: zarın üst yüzünde 2 nokta göründü,

E_3: zarın üst yüzünde 3 nokta göründü,

E_4: zarın üst yüzünde 4 nokta göründü,

E_5: zarın üst yüzünde 5 nokta göründü,

E_6: zarın üst yüzünde 6 nokta göründü.

Bu olaylardan hangisi başka olaylara "ayrıştırılabilir", hangisi ayrıştırılamaz?

A olayı, aşağıdaki olaylardan biri gerçekleşirse ortaya çıkar:

E_2: zarın üst yüzünde 2 nokta göründü,

E_4: zarın üst yüzünde 4 nokta göründü,
E_6: zarın üst yüzünde 6 nokta göründü,

Bu, bu olayın daha sonra başka olaylara ayrıştırılamayan diğer olaylara "ayrıştırılabileceği" anlamına gelir.

B olayı, aşağıdaki olaylardan biri gerçekleşirse ortaya çıkar:

E_3: zarın üst yüzünde 3 nokta göründü,

E_6: zarın üst yüzünde 6 nokta göründü,

Bu da onun, daha sonra başka olaylara ayrıştırılamayan diğer olaylara ayrıştırılabileceği anlamına gelir. Daha sonra başka olaylara ayrıştırılamayan olaylara temel olay denir. Bu örnekte bunlar E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ve E_6 olaylarıdır.

Verilen bir deneye ilişkin başka olaylara ayrıştırılamayan her olaya **temel olay** denir.

"Oyun zarı atma" deneyinin bir kez yapılması sırasında yalnızca bir temel olay gerçekleşir. Bu da temel olaylardan biri gerçekleştiğinde, o deneye ait diğer temel olaylardan hiçbirinin gerçekleşemeyeceği anlamına gelir.

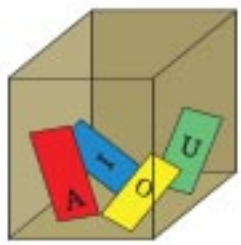
Alıştırma 1

Aşağıdaki deneylere ait tüm temel olayları yaz.

a) Bir parayı yalnızca bir kez atma,

b) Çizim 1a'daki kutudan bir kart çekme,

c) Çizim 1b'deki çarkı döndürme.



Çizim 1a


Çizim 1b

Örnek 2

„İki parayı yalnızca bir kez atma" deneyine ait tüm temel olayları yaz.

Bir para atıldığında oluşan temel olayları aşağıdaki gibi gösterelim:

T ile "paranın üst yüzünde tura göründü" temel olayı,

Y ile "paranın üst yüzünde yazı göründü" temel olayı gösterilir.

Deney iki paranın birlikte atılmasından oluştuğu için daha anlaşılır olması amacıyla temel olayları tabloyla gösterebiliriz:

		Para 1	
		Y	T
Para 2	Y	YY	TY
	T	YT	TT

Buna göre "iki para atma" deneyine ait tüm temel olayları şöyle yazabiliriz:

yazı yazı = Y Y; tura yazı = T Y; yazı tura = Y T; tura tura = T T.

Örnek 3

Çizim 2'de verilen "iki çarkı yalnızca bir kez döndürme" deneyinde tüm temel olayları yaz.



çark 1 çark 2

Çizim 2

İki çarkı döndürme deneyindeki tüm temel olayları yazmak için önce her bir çarkın temel olaylarını aşağıdaki Çizimde göstereceğimizi kabul ederiz:

Harfli çark için:

A: Ok, A harfinin bulunduğu alanda durdu.
B: Ok, B harfinin bulunduğu alanda durdu.
C: Ok, C harfinin bulunduğu alanda durdu.

Sayılı çark için:

1: Ok, 1 sayısının bulunduğu alanda durdu.
2: Ok, 2 sayısının bulunduğu alanda durdu.
3: Ok, 3 sayısının bulunduğu alanda durdu.
4: Ok, 4 sayısının bulunduğu alanda durdu.

"İki çarkı döndürme" deneyine ait tüm temel olaylar tabloda verilmiştir:

		Sayılı çark			
		1	2	3	4
Harfli çark	A	A 1	A 2	A 3	A 4
	B	B 1	B 2	B 3	B 4
	C	C 1	C 2	C 3	C 4

Örneğin, B 3 olayı, bir çarktaki okun B harfi üzerinde, diğer çarktaki okun ise 3 sayısı üzerinde durduğunu gösterir.

Kodu tara ve deneydeki elemanter olayları incele.

Alıştırma 2

Aşağıdaki deneylere ait temel olaylar için tablo oluştur:

a) iki oyun zarı atma,



Çizim 3

b) Yüzleri 1, 2, 3 ve 4 sayılarıyla işaretlenmiş iki üçgen piramit atma (Çizim 3).
Yönerge: Bir tetrahedron atıldığında sonuç, tetrahedronun atıldığı yüzey üzerinde durduğu yüzde yazılı sayıya göre belirlenir.

c) Bir oyun zarı ve yüzleri 1, 2, 3 ve 4 sayılarıyla işaretlenmiş bir tetrahedron atma.

Karşıt Olay (Bir Olayın Tümleyeni). Olasılık

Etkinlik

Bir para atma deneyinde, A: yazı geldi olayının karşıt olayı hangisidir?

A olayının **karşıt olayı** (**tümleyeni**), ancak ve ancak A olayı gerçekleşmediğinde gerçekleşen olaydır.

A olayının karşıt olayı $\overline{A}$ ile gösterilir.

Örnek 4

"Oyun zarı atma" deneyinde aşağıdakileri belirle:
a) A: gelen nokta sayısı 3'ten küçük veya 3'e eşittir olayının karşıt olayı hangisidir?
b) A veya $\overline{A}$ olaylarından yalnızca birinin gerçekleşmesi her zaman doğru mudur?

a) "Oyun zarı atma" deneyinde aşağıdaki temel olaylardan biri gerçekleşir:

E_1: zarın üst yüzünde 1 nokta göründü,
E_2: zarın üst yüzünde 2 nokta göründü,
E_3: zarın üst yüzünde 3 nokta göründü,
E_4: zarın üst yüzünde 4 nokta göründü,
E_5: zarın üst yüzünde 5 nokta göründü,
E_6: zarın üst yüzünde 6 nokta göründü.

A olayı: gelen nokta sayısı 3'ten küçük veya 3'e eşittir olayı; E1, E2 veya E3 temel olaylarından biri gerçekleşirse meydana gelir.

Karşıt olay $\overline{A}$ ise E_4, E_5 veya E_6 temel olaylarından biri gerçekleşirse meydana gelir.

Buna göre A olayının karşıt olayı $\overline{A}$: gelen nokta sayısı 3'ten büyüktür olayıdır.

b) Zar her atıldığında E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 veya E_6 temel olaylarından yalnızca biri gerçekleşir. Bu da A veya $\overline{A}$ olaylarından yalnızca birinin her zaman gerçekleştiği anlamına gelir.

Alıştırma 3

Aşağıdaki deneylerin her birinde verilen olayın karşıt olayı hangisidir?

a) Deney: oyun zarı atma, A olayı: 4'ten büyük bir nokta sayısı geldi.

b) Deney: içinde siyah, beyaz ve kırmızı topların bulunduğu bir kutudan bir top çekme, B olayı: beyaz top çekildi.

c) Deney: iki parayı aynı anda atma, C olayı: her iki paranın üst yüzünde de yazı geldi.

d) Deney: oyun zarı atma ve para atma, D olayı: zarda 3 ile bölünebilen bir nokta sayısı geldi ve paranın üst yüzünde tura geldi.

Kodu tara ve olasılıkları incele.

Etkinlik

"Bir parayı yalnızca bir kez atma" deneyi için A: paranın üst yüzünde yazı geldi olayının olasılığını hesapla.

Kesinlikle A olayının olasılığının

$P(A) = \frac{\text{başarılı sonuçların sayısı}}{\text{tüm sonuçların sayısı}} = \frac{1}{2}$ şeklinde hesaplamışsındır.

Örnek 5

Neboyşa bir oyun zarı atıyor.

a) Zarda üst yüze 6 nokta gelmesi olayı- A'nın olasılığı nedir?

b) A olayının karşıt olayının olasılığı nedir?

a) A olayının olasılığı için $P(A) = \frac{1}{6}$'dır (oyun zarının 6 yüzünden yalnızca birinde 6 nokta vardır).

b) A olayının karşıtı $\overline{A}$: 6 gelmedi olayıdır. $\overline{A}$ olayı, zarın üst yüzüne 1, 2, 3, 4 veya 5 nokta geldiğinde gerçekleşir. Buna göre olasılığı $P(\overline{A}) = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6} = 1 - P(A)$

Örnek 6

Matea zarı 30 kez atmış ve zarın üst yüzüne kaç kez 6 nokta geldiğini gözlemlemiştir. Bu denemelerde zarın üst yüzüne 7 kez 6 nokta geldiğini saymıştır.

"6 nokta geldi" olayının deneysel olasılığı kaçtır? Bunun karşıt olayının (zarın üst yüzüne 6 nokta gelmedi) deneysel olasılığı kaçtır?

"Zarın üst yüzünde 6 nokta geldi" olayının 30 atıştaki deneysel olasılığı $\frac{7}{30}$'dur. Matea'nın deneyinde bu 30 atışın 23'ünde zarın üst yüzünde 6 nokta gelmemiştir. Buna göre karşıt olayın olasılığı $\frac{23}{30}=1-\frac{7}{30}$ olur.

Bir olayın olasılığı P ise onun karşıt olayının olasılığı 1 - P'dir.

Örnek 7

İskra'nın çantasında iki sinema bileti ve üç tiyatro bileti vardır. İskra, çantasından bakmadan bir bilet çekiyor.

a) İskra'nın çantasından bilet çekmesiyle ilgili karşıt olayları yaz.

b) Tiyatro bileti çekme olasılığı kaçtır?

c) Sinema bileti çekme olasılığı kaçtır?

d) Sinema bileti mi yoksa tiyatro bileti mi çekmesi daha olasıdır?

e) Çantasından bir spor karşılaşması bileti çekme olasılığı kaçtır?

f) C: İskra'nın çantasından spor karşılaşması bileti çekmesi olayının karşıt olayı hangisidir?

a) Olası olaylar şunlardır:

A: İskra tiyatro bileti çeker, $\overline{B}$: İskra sinema bileti çeker.

Bunların karşıt olayları şunlardır:

$\overline{A}$: İskra sinema bileti çeker, $\overline{B}$: İskra tiyatro bileti çeker.

b) A: İskra tiyatro bileti çeker, bu nedenle $P(A)=\frac{3}{5}$.

c) B: İskra sinema bileti çeker, bu nedenle $P(B)=\frac{2}{5}$.

d) Tiyatro bileti çekmesi daha olasıdır, çünkü $P(A)=\frac{3}{5}>\frac{2}{5}=P(B)$'tir.

e) C: spor karşılaşması bileti çekme olayı imkânsız olaydır, bu nedenle $P(C)=0$.

f) $\overline{C}$: çantasından spor karşılaşması bileti olmayan bir bilet çeker, yani tiyatro veya sinema bileti çeker, bu nedenle $P(\overline{C})=1$.

Alıştırma 4

Alfabedeki her harf bir karta yazılmış ve kartlar bir kutuya konulmuştur. Kutudan bakmadan bir kart çekiliyor. Aşağıdakilerin seçilme olasılığı kaçtır?

a) N harfinin bulunduğu kart,

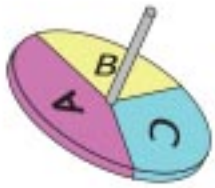
b) MATEMATİK kelimesindeki harflerden birinin bulunduğu kart,

c) sesli harf bulunan kart.

a), b) ve c) maddelerindeki olayların karşıt olayları hangileridir? Bunların olasılığı kaçtır?

ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki deneylerle ilgili tüm temel olayları yaz:
   a) Üzerinde A, B, C harfleri yazılı üç bölümlü bir çarkı döndürme (Çizim 4),
   b) Üzerinde 1'den 5'e kadar sayılar yazılı beş karttan bir kart çekme (Çizim 5).
   c) 30'dan küçük, 5 sayısının tüm katlarının yazılı olduğu kartlardan bir kart çekme.



Çizim 4



Çizim 5

2. Çizim 6'da bir oyun zarı ve dört renkli alanın her birinde harfler yazılı bir çark verilmiştir.





Çizim 6

   a) Çarkı döndürme ve zarı atma deneyiyle ilgili tüm temel olayları yaz.
   b) Zarın üst yüzünde çift sayıda nokta ve çarkta B harfi gelme olasılığı kaçtır?

3. Çizim 7'deki gibi şekerlerin bulunduğu bir kavanozdan bakmadan bir şeker çekiyorsun.
   a) Deneyi yaz.
   b) Tüm temel olayları yaz.
   c) Sarı renkli şeker çekme olasılığı kaçtır?
   d) "Mavi veya yeşil şeker çekildi" olayı, "sarı şeker çekildi" olayının karşıt olayı mıdır? Cevabını açıkla.
   e) "Sarı şeker çekildi" olayının karşıt olayının olasılığını belirle.
   f) "Kırmızı olmayan bir şeker çekildi" olayının karşıt olayı hangisidir?



Çizim 7

4. Luan, Çizim 8'deki hedefe dart oku atıyor.
   a) Luan'ın deneyini ve bu deneyle ilgili tüm temel olayları yaz.
   Aşağıdaki olayların olasılığını hesapla:
   A: mavi alana isabet etti.
   B: mavi olmayan bir alana isabet etti.
   C: kırmızı alana isabet etti.
   D: sarı veya yeşil alana isabet etti.



Çizim 8

b) A, B, C, D olaylarının her birinin karşıt olayını yaz.
Bunların olasılığını hesapla.
c) "Luan kırmızı alana isabet ettirdi" olayının karşıt olayını yaz,
sonra bunun olasılığını hesapla.

Araştırma

Kâğıttan bir uçak yap. Düzgün iniş veya düzgün olmayan iniş için Çizimde gösterilen konumları kullanarak uçağın ne sıklıkla düzgün ineceğini tahmin et.

1) düzgün iniş



2) düzgün olmayan iniş



Uçağı 50 kez fırlat ve kaç kez düzgün indiğini yaz. Daha sonra uçağın düzgün olmayan Çizimde inme şansının ne kadar olduğunu tahmin et. Sonuçlarını sınıf arkadaşlarınla karşılaştır.

8. AYRIK OLAYLAR. BAĞIMLI VE BAĞIMSIZ OLAYLAR

Ayrık Olaylar

Etkinlik 1

"Oyun zarı atma" deneyi için aşağıdaki olayları incele:

A: zarın üst yüzünde çift sayıda nokta göründü ve
B: zarın üst yüzünde üç nokta veya beş nokta göründü.

A ve B olayları birlikte (aynı anda) gerçekleşebilir mi?

Aynı anda gerçekleşemeyen iki veya daha fazla olaya **ayrık (birbirini dışlayan) olaylar** denir.

Örnek 1

1'den 10'a kadar sayıların yazılı olduğu kartların bulunduğu bir kutudan rastgele bir kart çekilmesi deneyinde, ayrık olan iki olaya örnek belirleyiniz.

Bu deneyde ayrık olaylara verilebilecek bir örnek aşağıda belirtilmiştir:

A: üzerinde çift sayı yazılı kart çekildi ve
B: üzerinde tek sayı yazılı kart çekildi.

Verilen deneyde ayrık olaylara başka bir örnek şunlardır:

C: üzerinde 5'ten küçük sayı yazılı kart çekildi,
D: üzerinde 7'den büyük sayı yazılı kart çekildi,
E: üzerinde 6 sayısı yazılı kart çekildi.

Alıştırma 1

"Oyun zarı atma" deneyiyle ilgili verilen olayların olasılığını hesapla ve bu olayların birbirini dışlayıp dışlamadığını belirle:

a) A: zarın üst yüzünde çift sayıda nokta göründü ve
B: zarın üst yüzünde 3 nokta göründü.

b) C: zarın üst yüzünde 3 ile bölünebilen sayıda nokta göründü ve
D: zarın üst yüzünde asal sayı kadar nokta göründü.

c) E: zarın üst yüzünde 2 ile bölünebilen sayıda nokta göründü ve
F: zarın üst yüzünde tek sayıda nokta göründü.

Örnek 2

5 kırmızı top, 2 sarı top ve 4 beyaz top içeren bir kutudan bir top çekiliyor.

a) Aşağıdaki olaylar ayrık olaylar mıdır?
A_1: kırmızı top çekildi ve
A_2: beyaz top çekildi.

b) A: kırmızı veya beyaz top çekildi olayı, A_1 veya A_2 olaylarından biri gerçekleştiğinde her zaman gerçekleşir mi?

c) A olayının olasılığını hesapla.

a) A_1 ve A_2 olayları ayrık olaylar, çünkü aynı anda gerçekleşemezler. Aslında aynı anda hem kırmızı hem de beyaz top çekilemez.

b) A olayı, A_1 veya A_2 olaylarından biri gerçekleştiğinde her zaman gerçekleşir.

c) A olayının olasılığı, A_1 ve A_2 olaylarının olasılıklarının toplamıdır:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{5}{11} + \frac{4}{11} = \frac{9}{11}.$$

Örnek 3

Yeşil zar ve kırmızı zar aynı anda atılıyor ve üst yüzlerinde görünen nokta sayıları toplanıyor. Aşağıdaki olayın olasılığını bul:

A: iki zarın üst yüzlerinde görünen nokta sayılarının toplamı 4'ten küçüktür.

"Kırmızı ve yeşil oyun zarını aynı anda atma" deneyiyle ilgili tabloyu incele.

		yeşil					
		1	2	3	4	5	6
kırmızı	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

A olayı, aşağıdaki olaylardan biri gerçekleştiğinde her zaman gerçekleşir:

A_1: yeşil zarda 1 nokta, kırmızı zarda 1 nokta göründü,

A_2: yeşil zarda 1 nokta, kırmızı zarda 2 nokta göründü ve

A_3: yeşil zarda 2 nokta, kırmızı zarda 1 nokta göründü.

A1, A2 ve A3 olayları ayrık olaylardır. A olayının olasılığı, A1, A2 ve A3 olaylarının olasılıklarının toplamıdır:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Alıştırma 2

4 kırmızı çorap, 3 mavi çorap ve 6 beyaz çorap bulunan bir çekmeceden bakmadan bir çorap çekiliyor.

a) Aşağıdaki olaylar ayrık olaylar mıdır?

A_1: kırmızı çorap çekildi ve

A_2: mavi çorap çekildi.

b) A: kırmızı veya mavi çorap çekildi olayı, A_1 veya A_2 olaylarından biri gerçekleştiğinde her zaman gerçekleşir mi?

c) A_1, A_2 ve A olaylarının olasılığını hesapla.

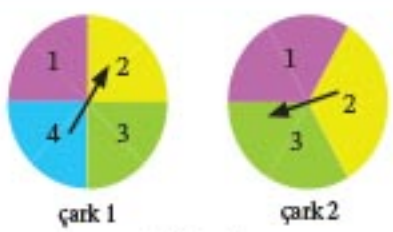
d) A olayının olasılığı, A_1 ve A_2 olaylarının olasılıklarının toplamına eşit midir?

Alıştırma 3

Çizim 1'deki gibi iki çark aynı anda döndürülüyor.

Aşağıdaki olayın olasılığını bul:

A: "İki çarkın oklarının durduğu sayıların toplamı 5'ten küçüktür."



Çizim 1

Bağımsız ve Bağımlı Olaylar

Etkinlik 2

İki para atma deneyiyle ilgili olarak, bir parada tura gelmesinin diğer parada tura veya yazı gelmesini nasıl etkilediğini analiz et.

Bir olayın gerçekleşmesi diğer olayın gerçekleşmesini etkilemiyorsa bu iki olaya **bağımsız olaylar** denir.

Örnek 4

Ana kurabiye pişiriyor. Aynı zamanda kardeşi Marko bahçede futbol oynuyor.
Aşağıdaki olayların neden bağımsız olduğunu açıkla:
A: Ana'nın kurabiyeleri başarılı bir Çizimde pişirmesi ve
B: Marko'nun oyun sırasında gol atması.

Bu iki olay bağımsızdır, çünkü Ana'nın kurabiye pişirmedeki başarısı Marko'nun gol atıp atmamasını etkilemez. Marko'nun oyundaki sonucu da pişirme sonucunu etkilemez.

Örnek 5

Toni ve Sara iki zarla oyun oynuyor. Toni kırmızı zarı, Sara ise mavi zarı atıyor. Aşağıdaki olayların bağımsız olup olmadığını belirle:
A: kırmızı zarda 4'ten büyük nokta sayısı gelmesi ve
B: mavi zarda çift sayıda nokta gelmesi.
Cevabını açıkla.

Bu iki olay bağımsızdır, çünkü kırmızı zarın sonucu mavi zarın sonucunu etkilemez.

Alıştırma 4

Petar mağazadan süt alıyor. Aynı zamanda kız kardeşi Elena evde film izliyor. Aşağıdaki olaylar bağımsız mıdır?
A: Petar'ın süt alması ve B: Elena'nın filmi sonuna kadar izlemesi.
Cevabını gerekçelendir.

Alıştırma 5

Bir kutuda 5 kırmızı ve 6 yeşil top vardır. Meryem bir top çekiyor, onu kutuya geri koyuyor ve sonra tekrar bir top çekiyor.
İki bağımsız olay yaz, sonra bunların neden bağımsız olduğunu açıkla.
Bağımsız olmayan iki olaya **bağımlı olaylar** denir.

Bağımsız olayların tanımına göre, bir olayın gerçekleşmesi diğer olayın gerçekleşmesini etkiliyorsa iki olay bağımlıdır.

Örnek 6

Mutfakta içinde 5 şeker bulunan bir kap vardır. Bunların 3'ü meyveli, 2'si çikolatalıdır. Ana bir şeker çekip yiyor, ardından aynı kaptan hemen bir şeker daha çekiyor. Aşağıdaki olaylar bağımsız mıdır?

A: Ana ilk seçimde meyveli şeker çekiyor ve
B: Ana ikinci seçimde (ilk şekeri yedikten sonra) meyveli şeker çekiyor.

Cevabını açıkla.

Bu iki olay bağımlıdır, çünkü A olayının gerçekleşmesi kaptaki şekerlerin durumunu doğrudan değiştirir ve B olayının gerçekleşmesini etkiler.
Ana önce meyveli şeker çekerse (A olayı gerçekleşirse), kapta daha az meyveli şeker kalır. Bu nedenle ikinci kez meyveli şeker çekme olasılığı azalır. Ana önce çikolatalı şeker çekerse (A olayı gerçekleşmezse), kaptaki şeker sayısı yine değişir, ancak farklı bir Çizimde değişmiş olur. Böylece B olayının gerçekleşme olasılığı da değişir.
Bu nedenle B olayı A olayına bağlıdır, yani olaylar bağımlıdır.

Alıştırma 6

Bir kutuda 4 kırmızı ve 3 mavi kalem vardır. Öğretmen bir kalem alıyor, geri koymuyor ve ardından bir kalem daha alıyor.
İki bağımlı olay yaz, sonra bunların neden bağımlı olduğunu açıkla.

Alıştırma 7

İki oyun zarı aynı anda atıldığında aşağıdaki olaylar gerçekleşmektedir:

A: zarların üst yüzlerinde görünen nokta sayılarının toplamı çift sayıdır ve
B: iki zarın üst yüzlerinde aynı sayıda nokta görülmektedir.

A ve B olaylarının birbiriyle nasıl bir ilişkisi olduğunu açıkla.

Örnek 7

"Para ve oyun zarını aynı anda atma" deneyinde aşağıdaki olayın olasılığını bul.
A: parada yazı, zarda ise 6 nokta gelmesi.

B: parada yazı gelmesi ve C: zarda 6 nokta gelmesi

olayları bağımsız olaylardır, çünkü birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini etkilemez.
A olayı, B ve C olayları aynı anda gerçekleştiğinde meydana gelir.
A olayının olasılığı şöyledir:

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Alıştırma 8

Yasmina ve Leontin, 3 m uzaklıktan kaleye top atışı yapıyorlar. Geçmiş deneyimlere göre Yasmina her 3 atıştan 2'sinde isabet ettirirken, Leontin 7 atıştan 4'ünde isabet ettirir. İkisi aynı anda kaleye atış yaparsa aşağıdaki olasılıkları bul:

a) ikisinin de isabet ettirmesi, b) ikisinin de ıskalaması,
c) Yasmina'nın isabet ettirmesi, Leontin'in ise ıskalaması.

Örnek 8

Bir kutuda aynı Çizim ve büyüklükte 4 mavi ve 3 sarı düğme vardır (Çizim 2). Bakmadan ve geri koymadan rastgele iki düğme seçiliyor.
Aşağıdaki olayların olasılığını hesapla:
a) A: seçilen iki düğme de sarıdır ve
b) B: seçilen ilk düğme sarı, ikincisi ise mavidir.



Çizim 2

a) Aşağıdaki olaylar

A_1: seçilen ilk düğme sarıdır ve A_2: seçilen ikinci düğme sarıdır,

bağımlı olaylardır, çünkü düğmeler kutuya geri konulmaz. A_1 olayının gerçekleşmesi, kutunun içeriğini toplam 6 düğme olacak Çizimde değiştirir; bunlardan 2'si sarıdır. Bu nedenle A_2 olayının olasılığı da değişir. A_1 ve A_2 olaylarının olasılığı

$$P(A_1)=\frac{3}{7} \text{ ve } P(A_2)=\frac{2}{6}.$$

A olayı, A_1 ve A_2 olayları aynı anda gerçekleştiğinde meydana gelir.
A olayının olasılığı

$$P(A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}\text{'dir.}$$

b) Aşağıdaki olaylar

B_1: seçilen ilk düğme sarıdır ve B_2: seçilen ikinci düğme mavidir,

bağımlı olaylardır, çünkü B_1 olayının gerçekleşmesi kutunun içeriğini toplam 6 düğme olacak Çizimde değiştirir. Bu nedenle B_2 olayının olasılığı da değişir. B_1 ve B_2 olaylarının olasılığı

$$P(B_1)=\frac{3}{7} \text{ ve } P(B_2)=\frac{4}{6}\text{'dır.}$$

B olayı, B_1 ve B_2 olayları aynı anda gerçekleştiğinde meydana gelir.
B olayının olasılığı

$$P(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}.$$

Alıştırma 9

Bir kutuda 5 yeşil şeker ve 3 sarı şeker vardır. İki jelibon, geri koymadan art arda seçiliyor. Aşağıdaki olayların olasılığını hesapla:

a) seçilen iki şekerin de yeşil olması,
b) önce yeşil, sonra sarı şeker seçilmesi,
c) önce sarı, sonra yeşil şeker seçilmesi,
d) seçilen iki şekerin de sarı olması.

ALIŞTIRMA SORULARI

1. a) Oyun zarı atma deneyinde aşağıdaki olaylardan hangilerinin bağımsız, hangilerinin bağımlı olduğunu belirle:

A: zarın üst yüzündeki nokta sayısı 2 ile bölünebilir,
B: zarın üst yüzündeki nokta sayısı 3 ile bölünebilir,
C: zarın üst yüzündeki nokta sayısı hem 2 hem de 3 ile bölünebilir,
D: zarın üst yüzündeki nokta sayısı tek sayıdır.

b) a) maddesinde verilen olaylardan hangileri birbirini dışlar?

2. Mariya ve İvan zar ve para ile bir oyun oynuyorlar. Mariya zarı atıyor ve gelen sayıyı yazıyor. Mariya'nın atışında zarda çift sayıda nokta gelirse İvan para atıyor ve tura gelip gelmediğine bakıyor. Aşağıdaki olaylar bağımlı mıdır?

A: Mariya'nın zarı atarken çift sayı elde etmesi ve
B: İvan'ın para atarken tura elde etmesi.

Cevabını açıkla.

3. Okulun çevre kulübünde 3 erkek ve 5 kız vardır. Sabah eko-devriyesi için rastgele iki üye seçiliyor. A ve B olaylarıyla ilgili soruları cevapla:

A olayı: İlk seçilen üye kızdır.
B olayı: İkinci seçilen üye kızdır.

a) İkinci seçimin sonucu, ilk kimin seçildiğine bağlı mıdır?
b) Bu iki olay bağımlı mı yoksa bağımsız mıdır? Açıkla.

4. Bir şapkaya 1'den 20'ye kadar sayıların yazılı olduğu kartlar konulmuştur. Yanko, şapkadan geri koymadan art arda iki kart çekiyor.

A olayı: İlk çekilen sayı çifttir,
B olayı: İkinci çekilen sayı tektir,
C olayı: İlk çekilen sayı asaldır,
D olayı: İkinci çekilen sayı asaldır.

a) A ve B olayları bağımlı mı yoksa bağımsız mıdır? Açıkla.
b) C ve D olayları bağımlı mı yoksa bağımsız mıdır? Açıkla.

5. Bir kavanozda 4 mor jeton, 3 mavi jeton ve 1 altın jeton vardır. Üç jeton geri koymadan art arda çekiliyor. Verilen olaylarla ilgili cevapla:

a) A olayı: İlk çekilen jeton mordur.
B olayı: İkinci çekilen jeton mordur.
C olayı: Üçüncü çekilen jeton mordur.

- İkinci ve üçüncü seçimin sonucu ilk seçime bağlı mıdır?
- Bu olaylar bağımlı mı yoksa bağımsız mıdır? Açıkla.

b) D olayı: Birinci jeton mordur, ikinci jeton mordur, üçüncü jeton altındır.
- Her sonraki seçimin sonucu önceki seçimlere bağlı mıdır?
- Bu olayların neden bağımlı olduğunu açıkla.

c) E olayı: Çekilen jetonların hiçbiri mavi değildir.
- Bu, çekiliş sırasına bağlı mıdır?

6. Viki ve Yakov sürücü sınavına girecekler. Viki'nin sınavı geçme şansı %70, Yakov'un sınavı geçme şansı %60'tır.
Aşağıdaki olasılığı bul:

a) ikisinin de sınavı geçmesi,

b) en az birinin sınavı geçmesi.

Yönerge: Yüzdeleri kesirlere dönüştür.

7. Tina ve Semir dart oynuyorlar. Okları aynı hedefe atıyorlar.
A ve B olaylarıyla ilgili aşağıdaki soruları cevapla:

A: Tina'nın merkezi vurması,

B: Semir'in merkezi vurması,

a) A ve B olayları bağımsız mı yoksa bağımlı mıdır? Nedenini açıkla.

b) "Tina'nın ıskalaması" ve "Semir'in ıskalaması" olayları bağımsız mı yoksa bağımlı mıdır? Açıkla.

c) Tina'nın dart oynarken merkezi vurma olasılığı $\frac{1}{3}$, Semir'in merkezi vurma olasılığı $\frac{2}{5}$'tir. İkisi aynı anda hedefe atış yaparsa aşağıdaki olasılıkları bul:

i) ikisinin de merkezi vurması,

ii) ikisinin de merkezi ıskalaması,

iii) Tina'nın merkezi vurması, Semir'in ise ıskalaması.

8. Bir sınıfta öğrenciler okul etkinliği için bir proje seçmelidir.
3 seçenek arasından seçim yapılmıştır:

Proje türü	Seçen öğrenci sayısı
spor projesi	8
sanat projesi	6
bilim projesi	6

Her öğrenci yalnızca bir proje seçer (aynı anda iki proje seçemez).

a) Sınıfta kaç öğrenci vardır?

b) "Öğrencinin spor projesini seçmesi" ve "öğrencinin sanat projesini seçmesi" olayları birbirini dışlar mı? Açıkla.

c) Rastgele seçilen bir öğrencinin aşağıdaki projeyi seçme olasılığı kaçtır?

i) spor projesi,

ii) sanat projesi,

iii) bilim projesi.

d) Öğrencinin bilim projesini **seçmemiş** olma olasılığı kaçtır?

9. Proje görevi

7 günlük bir süre içinde, hava tahminini analiz edeceğin ve farklı olaylar için olasılıkları hesaplayacağın küçük bir proje hazırla. Bunun sonunda, projenin gerçekleştirilme aşamalarına göre bir rapor hazırlaman gerekir:

1) İnternette araştırma yap ve proje raporunda meteorologların profesyonel hava tahmini yaparken olasılığı nasıl kullandıklarını kısaca açıkla (bilgisayar modelleri, birden fazla senaryo, olasılık yüzdeleri).
2) Hava tahminini alacağın 5–7 ardışık gün için veriler topla (yağmur olasılığı, rüzgâr, sıcaklıklar, hava durumunun açıklaması). Verileri tabloya yaz.
3) Aşağıdaki olayların her biri için olasılık hesapla:
   - güneşli bir gün olması,
   - rüzgâr esmesi,
   - yağmur ve rüzgâr olması,
   - yürüyüş için uygun bir gün olması.
4) Tahminindeki her gün için aşağıdaki olayın olasılığını hesapla:
   A: Şemsiye taşıyacağım (yağmur olasılığı varsa).
   A olayının karşıt olayı B'yi tanımla ve onun olasılığını hesapla.
   $P(A) + P(B) = 1$ eşitliğinin geçerli olup olmadığını kontrol et.
5) Seçilen günlerin sıcaklıkları için şunları hesapla: ortalama, medyan, mod, açıklık ve bunları uygun bir grafikle göster.
6) Aşağıdaki sorulara dayanarak kısa bir sonuç çıkar:
   - Uzmanlar hava durumuna ait olasılıkları nasıl hesaplar?
   - Tahminler ne kadar doğrudur? Neden bazen hata yaparlar?
   - Hesaplanan olasılıklar günlük kararları nasıl etkiler (kıyafet seçimi, yolculuk, etkinliklerin düzenlenmesi)?
   - Daha iyi bir tahmin nasıl elde edilebilir (daha fazla model, gerçek ölçümler veya daha uzun süreli veri dizisi ile)?

Araştırma

Okulda küçük bir oyun düzenleniyor: bir oyun zarı atılıyor ve ardından içinde 2 mavi, 2 yeşil ve 1 kırmızı top bulunan bir torbadan top çekiliyor.

a) Aşağıdaki olayların neden bağımsız olduğunu açıkla:
   A: zarda çift sayı gelmesi ve B: torbadan mavi top çekilmesi.

b) Aşağıdaki olayların neden bağımsız olduğunu açıkla:
   C: zarda 4'ten büyük sayı gelmesi ve D: kırmızı top çekilmesi.

Öğrenciler geri koymadan art arda 2 top çekiyorlar.

c) Aşağıdaki olayların neden bağımlı olduğunu açıkla:
   E: İlk çekilen top yeşildir ve F: İkinci çekilen top yeşildir.

d) İlk olarak kırmızı top çekilirse, aşağıdaki olayı düşün:
   G: İkinci çekilen topun mavi olması.

İkinci çekilişin sonucu neden birinci çekilişe bağlıdır?

Uygulama bölümü – Deney:

20 denemeden oluşan bir deney yapın: kurallara göre zar atın ve toplar çekin.
Sonuçları tabloya yazın. Gözlemlenen sonuçlar, bağımsız ve bağımlı olaylarla ilgili önceki sonuçlara benziyor mu?
Düşünme soruları:

1) Olaylar hakkında düşünmek ne zaman daha kolaydır – olaylar bağımsız olduğunda mı yoksa bağımlı olduğunda mı?
2) Torbadaki top sayısı değişirse (örneğin 10 top olursa), bu durum durumu nasıl etkiler?

TEKRAR SORULARI

1. Aşağıdaki araştırmalarda hedef kitlenin tamamını mı yoksa hedef kitleden bir örneklem kullanmanın mı uygun olduğunu belirle:

   a) elektronik cihaz üreten bir fabrikada üretim kalitesi,
   b) ülkedeki çocuk nüfusunun ayakkabı numarası,
   c) sınıf arkadaşlarının ayakkabı numarası,
   d) bir sandviççideki ürünlerin fiyatı.

2. 900 öğrencisi olan bir okulda, okul atıştırmalıklarıyla ilgili soruyu cevaplamaları için rastgele 50 öğrenci seçilmiştir. Hedef kitledeki ve örneklemdeki birim sayısını belirle. Bu Çizimde seçilen örneklem evreni temsil eder mi?

3. Bir anket şirketi, belirli bir bölgedeki halkın yaklaşan seçimlerdeki oy verme eğilimlerini araştırmak için görevlendirilmiştir. Toplanan verilerden o bölgedeki seçim sonucu tahmin edilmelidir. Aşağıdaki durumların her birinde neden uygun olmayan bir örneklem elde edildiğini açıkla:

   a) İş günü saat 13:00 ile 15:00 arasında yerel büyük alışveriş merkezinde rastgele seçilen kişilere anket yapılır,
   b) yerel satranç kulübünün tüm üyelerine anket yapılır,
   c) yerel tren istasyonunda saat 7:00 ile 9:00 arasında rastgele seçilen kişilere anket yapılır,
   d) kapı kapı dolaşılarak anket yapılır ve belirli bir sokaktaki her seçmene anket uygulanır.

4. Aşağıdaki araştırmalarda toplanan verilerin ayrık olup olmayacağını belirle:

   a) şehirdeki her parkın alanı,
   b) bir yerleşim yerindeki insanların medeni durumu,
   c) bir kutudaki kibrit sayısı,
   d) voleybol devlet şampiyonasında kazanılan puanlar,
   e) ülkemizdeki çiftliklerde bulunan domuz yavrularının kütlesi.

   Verilen araştırmaların her birinde birincil mi yoksa ikincil verilerin kullanılmasının daha iyi olduğunu açıkla.

5. Dimitar, insanların ne sıklıkla tiyatroya gittiğini araştırmak için veri toplama aracı hazırlamıştır. Bu araç şöyle görünmektedir:

Anket formunu, tiyatronun önünden geçerken karşılaştığı birkaç kişiye doldurmaları için vermiştir. Dimitar'ın araştırmasındaki birkaç yanlışlığı yaz ve veri toplamak için yeni, geliştirilmiş bir yöntem öner.

ANKET

Tiyatro Ziyaretleri
(Bilinçli Olarak Hatalı Hazırlanmıştır)

Bu anket, insanların tiyatroya ne sıklıkla gittiklerini araştırmayı amaçlamaktadır.

1. Tiyatroya ne sıklıkla gidersiniz?
   a) Hiçbir zaman
   b) Çok nadiren (yılda 1–10 kez)
   c) Bazen (yılda 2 kereden fazla)
   d) Her zaman
2. En çok hangi tür oyunları izlersiniz?
   a) Komedi b) Dram
   c) Oyun izlemem
3. Tiyatroya neden gidersiniz?
   a) Eğlence için b) Eğitim amacıyla
   c) Arkadaşlarımla birlikte d) Bilmiyorum
4. En son ne zaman tiyatroya gittiniz?
   a) Bir yıl önce b) 5 yıl önce
   c) Birkaç ay önce d) Hiç gitmedim

6. Hastane yönetimi, ekim ayında kardiyovasküler hastalık nedeniyle hastaneye yatırılan hastaların yaşlarını bilmek istemektedir.
Aşağıdaki veriler toplanmıştır::

32	58	72	45	89	68	63	47	54	51
84	17	58	64	67	71	75	69	63	82
76	68	29	48	89	66	24	59	70	74
80	63	4	32	46					

a) 0-15, 16-31, 32-47, ... sınıflarıyla gruplandırılmış veriler için frekans tablosu oluştur.
b) Modal sınıfı bul.
c) Medyanı içeren sınıfı bul.
d) Modal sınıftaki hastaların oranını yüzde olarak ifade et.
e) Medyanı içeren sınıf mı yoksa modal sınıf mı hastaların yaş yapısı hakkında daha iyi genel bir görünüm verir? Neden?
f) Hastaların ortalama yaşı için bir tahmin yap.

7. Bir pazarlama ajansı, 30 gün boyunca her gün telefon aramalarının sayısını kaydetmektedir.

18	32	25	37	24	28	35	42	31	16
28	38	30	41	27	31	46	17	35	26
32	14	44	37	48	23	19	33	15	36

Verileri 4 grupta gruplandırılmış sıklık tablosuyla göster.
Modal sınıfı bul. Ajansın en az 30 arama aldığı günlerin yüzdesi kaçtır?

8. Bir antrenman kampındaki kırk futbolcuya hangi pozisyonda oynadıkları sorulmuştur. Sonuçlar aşağıda verilmiştir. Burada F forvet, O orta saha oyuncusu, S savunma oyuncusu, K ise kaleci anlamına gelir:

F	S	O	O	F	O	S	F	K	O
O	S	F	S	O	S	F	O	S	K
F	K	O	S	F	S	O	S	F	O
S	K	C	H	O	S	K	O	O	F

a) Verileri sıklık tablosunda göster. Tablodaki veriler gruplandırılmış mıdır ve neden?
b) Araştırmada değişken nedir, hedef kitle nedir?
c) Verilerin modunu bul. Bunun ne anlama geldiğini açıkla.
d) Oyuncuların yüzde kaçı savunma oyuncusu veya kalecidir?
e) Verileri daire grafiğiyle göster.

9. Ülkedeki süpermarket zincirlerinin yaygınlığıyla ilgili soruları cevaplamak için Çizim 1'deki daire grafiğini kullan.
a) Hangi süpermarket zincirinin en çok mağazası vardır?
b) Süpermarket sayısı 12582 ise bunlardan kaç tanesi:
1) Evtiniya, 2) Her Şey Tek Yerde, 3) Bağımsızdır.



Çizim 1

10. Bir otobüsteki 60 yolcudan 12'si okul öncesi yaşta çocuk, 11'i öğrenci, 22'si yetişkin ve 15'i emeklidir. Trende ise 90 yolcu seyahat etmiştir; bunların 23'ü okul öncesi yaşta çocuk, 12'si öğrenci, 40'ı yetişkin ve 15'i emeklidir. Her bir ulaşım aracı için daire grafiği çiz ve yolcuların yaş yapılarını karşılaştır. Aşağıdaki soruları cevapla:
a) Otobüsteki yolcuların kaçı yetişkin veya emeklidir?
b) Trendeki yolcuların yüzde kaçı çocuk veya öğrencidir?
c) Trende ve otobüste eşit sayıda emekli vardır. Daire grafiğinde bu iki sektöre karşılık gelen merkez açıları neden farklıdır?

11. Bir teknolog, bir fabrikada yemeklik yağ üretim sürecini denetlemektedir (Çizim 2). Çizgi grafiği, bir gün boyunca uygun bir kapta toplanan yağ hacmini göstermektedir.



Çizim 2

Gün içinde üç kez kaptan kalite kontrolü için yağ alınmıştır.

a) Saat 7'de ne kadar yağ üretilmiştir?

b) Kalite kontrolü nedeniyle her seferinde ne kadar yağ alınmıştır?

c) Gün boyunca toplam ne kadar yağ üretilmiştir?

12. 8. sınıf öğrencilerinden oluşan bir örneklem için kütleleri gövde-yaprak diyagramıyla verilmiştir.

3	2 4 8
4	0 4 4 7 9 9 9
5	0 0 1 2 2 3 3 5 6 8 8
6	0 1 2 4 4 5 7 9
7	0 2 6
8	4
9	1

Anahtar: 9|1, 91 kg anlamına gelir.

Aşağıdakileri bul: a) en büyük kütle, b) en küçük kütle,
c) medyan, d) kütlelerin açıklığı,
e) kütlesi en az 70 kilogram olan öğrenci sayısı,
f) kütlesi 48 kilogramdan az olan öğrencilerin yüzdesi.

13. Gövde-yaprak diyagramıyla verilen veriler için mod, medyan ve açıklığı belirle.

3	8 9
4	2 2 5
5	0 1 1 7 9
6	1 3 4
7	0

Anahtar: 3|8, 3,8 anlamına gelir.

14. Bir okulda devamsız öğrenci sayısı, kış döneminde 40 gün boyunca kaydedilmiştir:

21	16	23	24	18	29	35	37	41	38
25	23	17	26	34	33	10	27	49	52
24	20	25	23	19	22	12	16	17	15
33	43	14	28	41	14	29	31	32	34

a) Veriler için gövde-yaprak diyagramı oluştur.

b) Kış dönemi için en büyük ve en küçük devamsızlık sayısını bul.

c) En az 40 öğrencinin devamsız olduğu günlerin yüzdesi kaçtır?

d) Kış döneminde 25'ten az öğrenci devamsızsa devam durumu "iyi" olarak adlandırılır. Öğrenci devamının iyi olduğu günlerin yüzdesi kaçtır?

15. Yarın yağmur yağması olayı A'nın olasılığının $P(A) = 0{,}03$ olduğunu varsayalım.

a) A olayının karşıt olayı B'yi belirle. b) P(B)'yi bul.

16. Aşağıdaki deneylerde temel olayları yaz:
a) yılın bir ayını rastgele seçme,
b) üzerinde A, B ve C harfleriyle işaretlenmiş üç alan bulunan bir çarkı döndürme,
c) 20'den küçük iki basamaklı bir sayı seçme,
d) 30'dan küçük 3'ün katları kümesinden çift sayı seçme,
e) susamlı poğaça, börek ve simit satılan bir fırında hamur işi türü seçme.

17. Maya ve Kaya bir restoranda tam menü seçiyorlar. Menüde seçim için 3 çeşit pişmiş yemek, 4 çeşit içecek ve 2 çeşit tatlı vardır. Maya ve Kaya'nın sahip olduğu tüm seçim olasılıklarını yaz.

18. Çizim 3'te iki çark verilmiştir. İlir ve İvan, bu çarkları aynı anda döndürerek ve hangi kişinin okunun hangi harfe geldiğini yazarak bir oyun oynuyorlar. 10 döndürmeden sonra elde edilen harflerden bir kelime oluşturmaya çalışıyorlar. İki çarkın aynı anda bir kez döndürülmesi sırasında ortaya çıkabilecek temel olaylar hangileridir?



Çizim 3

19. Erblina, 2'den 10'a kadar olan sayıları iki gruba ayırmıştır: asal ve bileşik sayılar. Her gruptan rastgele bir sayı seçiyor. Erblina'nın deneyindeki tüm temel olayları belirle ve aşağıdakileri seçme olasılığını bul:
a) 3 ve 8,
b) iki tek sayı,
c) toplamı 13 olan iki sayı,
d) ardışık sayılar.

20. Çizim 4'te bir bilardo topu takımı verilmiştir. Rastgele bir top seçilirse, aşağıdaki olasılık kaçtır?
a) beyaz top seçilmesi,
b) yeşil top seçilmesi,
c) 8'den küçük sayı olması.



Çizim 4

21. Şehir sinemasında 20 yetişkin bileti, 16 indirimli bilet ve 9 çocuk bileti satılmıştır. Seyirciler arasından rastgele bir kişi seçiliyor. Aşağıdaki olasılığı bul:
a) indirimli bilete sahip olması,
b) yetişkin biletine sahip olması,
c) çocuk bileti olmayan bir bilete sahip olması.

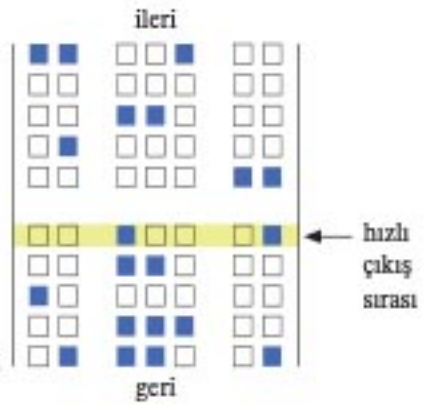
22. Çizim 5'te bir çocuk yapbozu verilmiştir. Rastgele bir parça alınıyor. Seçilen parçanın aşağıdakilerden biri olma olasılığını bul:
a) yapbozun köşelerinden bir parça olması (iki düz kenarı olan),
b) bir düz kenarı olan parça olması,
c) en az bir düz kenarı olan parça olması,
d) düz kenarı olmayan parça olması.



Çizim 5

23. Çizim 6'da, seyahat ettiğin uçaktaki koltuk düzeni ve boş yerler verilmiştir. Dolu koltuklar mavi renkle boyanmıştır. Boş yerlerden birini rastgele seçersen aşağıdaki olasılık kaçtır?

a) ön sırada oturman,
b) hızlı çıkış sırasında oturman,
c) pencere kenarında oturman,
d) koridor kenarında oturman.



Çizim 6

24. TA torbasından bir top çıkarılıp B torbasına konuluyor, sonra B torbasından rastgele bir top çekiliyor (Çizim 7). Şunlar verilsin:

A: A torbasından ilk çekilen top kırmızıdır ve
B: B torbasından ikinci çekilen top kırmızıdır.

a) B torbasından yapılan ikinci seçimin sonucu, önce A torbasından hangi topun çıkarıldığına bağlı mıdır?
b) Bu olaylar bağımlı mı yoksa bağımsız mıdır?

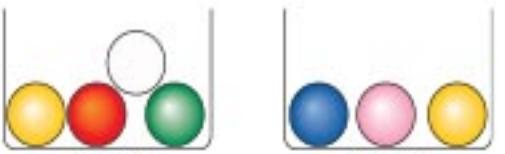


Çizim 7

25. Çizim 8'deki kutulardan rastgele bir top çekildiğini varsay. Şunlar verilsin:

A: X kutusundan kırmızı top çekildi ve
B: Y kutusundan mavi top çekildi.

a) A ve B olayları bağımlı mı yoksa bağımsız mıdır? Nedenini açıkla.
b) X kutusundan yeşil top çekme olasılığı kaçtır?
c) Y kutusundan sarı top çekme olasılığı kaçtır?
d) X kutusundan beyaz top çekilir ve geri konulmazsa, X kutusundan diğer her bir topu çekme olasılığı kaçtır?



Çizim 8

26. Bir somunun 400 kez atılması deneyinde, somun 84 kez dik, diğer zamanlarda ise yan tarafı üzerine düşmüştür (Çizim 9).

a) Somun atıldığında yan tarafı üzerine düşmesinin deneysel olasılığını bul.
b) İki somun atıldığında aşağıdaki Çizimde düşme olasılığını tahmin et:
   1) ikisi de dik,
   2) ikisi de yan tarafı üzerine.



Çizim 9

27. Bir çarkta 6 eş alan vardır: 3 kırmızı, 2 mavi ve 1 sarı. Başka bir çarkta 7 eş alan vardır: 4 mor ve 3 yeşil. İki çark aynı anda döndürülüyor. Döndürme sonucunda aşağıdakilerin gelme olasılığını bul:

a) kırmızı ve yeşil alan,
b) mavi ve mor,
c) sarı ve yeşil,
d) kırmızı ve mor.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

1. Baron, Lorraine, et al. Math 8: Make Sense. Pearson, 2008.
2. Haese, Michael, et al. Grade 8 Mathematics for the International Student. 2016.
3. Pimentel, Ric, and Terry Wall. Mathematics. Hodder Education, 2013.
4. Rayner, David, Ian Bettison, Mathew Taylor. Complete Mathematics. Edited by Deborah Barton, Oxford University Press, 2023.
5. Целакоски, Наум. Дидактика на математиката. Нумерус, 1993.
6. Бакева, Верица. Веројатност. УКИМ–ФИНКИ, 2016.